

КОНЕЧНО ГЕНЕРИРАНИ ПОТПОЛУГРУПИ ОД АДИТИВНАТА ПОЛУГРУПА \mathbb{N}^n

ДОНЧО ДИМОВСКИ*, МАГДАЛЕНА ХАЦИ - КОСТА ЈОСИФОВСКА**

Abstract. Во оваа работа даден е геометриски опис на конечно генерирани потполугрупи од адитивната полугрупа \mathbb{N}^n .

1. ВОВЕД

Во овој дел ќе формулираме неколку основни дефиниции и резултати, потребни во понатамошниот текст.

Нека $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, n, n+1, \dots\}$ е множеството природни броеви заедно со нулата, а нека \mathbb{R} е полето од реалните броеви. Елементот $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ од n -димензионалниот векторски простор \mathbb{R}^n се нарекува n -димензионален вектор. Непразно подмножество C од \mathbb{R}^n се нарекува (**конвексен**) конус ако за секои $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$ и секои реални $\lambda, \mu \geq 0$, $\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} \in C$.

Конус генериран од множество $X = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m\}$ се нарекува множеството:

$$\text{cone}(X) := \{\mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_m \mid \lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0\}. \quad (1)$$

Значи $\text{cone}(X)$ е најмалиот конвексен конус, што ги содржи елементите $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$ и за да се нагласи тоа се користи ознаката $\text{cone}\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m\}$.

Нека $(G, +)$ е адитивна полугрупа. Секое непразно подмножество A од G , генерира потполугрупа од G . Притоа A е генераторно за G ако, потполугрупата генерирана со A е еднаква со полугрупата G .

Потполугрупата од адитивната полугрупа \mathbb{N}^n (со операцијата собирање вектори), генерирана со подмножество $H = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_t\} \subseteq \mathbb{N}^n$, означена со $\langle H \rangle$ е:

$$\langle H \rangle := \left\{ \sum_{i=1}^t \alpha_i \mathbf{a}_i \mid \alpha_i \in \mathbb{N} \right\} \quad (2)$$

Потполна класификација на потполугрупите од адитивната полугрупа \mathbb{N}^n не ни е позната, освен во случајот $n = 1$. За $n = 1$, во [2] е докажана следнава теорема.

2000 Mathematics Subject Classification. 20M14, 20M05.

Key words and phrases. konus, aditivna potpolugrupa od \mathbb{N}^n .

Теорема 1.1. [2] Нека G е потполугрупа од адитивната полугрупа $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. Нека n е најмалиот број во G , d е најголемиот заеднички делител на елементите од G и $n = kd$. Да го означиме со A_i множеството на оние елементи од G што при делењето со n даваат остаток id , т.е. $A_i = \{a \mid a \in G, a = tn + id, t \in \mathbb{N}\}$. Тогаш:

(i) $G = A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_{k-1}$, дисјунктна унија.

(ii) Постојат a_0, a_1, \dots, a_{k-1} , такви што: $a_0 = 1$ и $A_i = \{tn + id \mid t \geq a_i\}$ и притоа:

$$a_i + a_j \geq \begin{cases} a_{i+j}, & i + j < k \\ a_{i+j-k} - 1, & i + j \geq k. \end{cases}$$

(iii) Ако $m_i = a_i n + id$, тогаш $n = m_0$, и $\{m_0, m_1, \dots, m_{k-1}\}$ е генераторно жество за G .

(iv) Нека $b = \max\{a_0, \dots, a_{k-1}\}$, $s = \max\{i \mid a_i = b\}$ и $c = (b-1)k + s + 1$. Тогаш:

$(c-1)d \notin G$ и $\{td \mid t \geq c\} = G^* \subseteq G$. \square

Ова својство не важи за $n > 1$.

Пример 1.1. Нека G е адитивната потполугрупа од \mathbb{N}^2 генерирана со $\{(1, m) \mid m \in \mathbb{N}\}$. Тогаш $R = \{(1, m) \mid m \in \mathbb{N}\}$ е бесконечно, а исто така е и најмалото генераторно множество. Според тоа, секое генераторно множество на G е бесконечно.

2. ОПИС НА КОНЕЧНО ГЕНЕРИРАНИ ПОТПОЛУГРУПИ ОД АДИТИВНАТА ПОЛУГРУПА \mathbb{N}^n

Во овој дел ќе биде даден основниот резултат во овој труд.

Теорема 2.1. Една потполугрупа G од адитивната полугрупа \mathbb{N}^n е конечно генерирана ако и само ако постојат вектори $x_1, \dots, x_m \in G$, такви што G е подмножество од конусот генериран со x_1, \dots, x_m .

Доказ. Ова својство ќе го докажеме со помош на индукција, која ќе ја спроведеме по бројот n .

Доказот на случајот кога $n = 1$, односно кога G е потполугрупа од \mathbb{N} е изнесен во [2], односно тоа е **Теорема 1.1.**

Посебно ќе го разгледаме и случајот $n = 2$, односно кога G е потполугрупа од \mathbb{N}^2 . Ова е од интерес заради тоа што во себе ја содржи основната идеја за изведувањето на целокупниот доказ.

Кога $n = 2$, тврдењето гласи: Една потполугрупа G од адитивната полугрупа \mathbb{N}^2 е конечно генерирана ако и само ако постојат вектори $x_1, \dots, x_m \in G$, такви што G е подмножество од конусот генериран со x_1, \dots, x_m .

Ќе разгледаме два случаја: $m = 1$ и $m \geq 2$.

1⁰. $m = 1$

Нека $G \subseteq \text{cone}\{x\}$ и $x = (\mu, \nu) \in G$, со μ најмал таков број.

Може да ги разгледаме следните случаи:

Ако $\mu = \nu = 0$, тогаш $G = \{(0, 0)\}$, што значи дека G е конечно генерирана.

Ако $\mu = 0, \nu \neq 0$ или $\mu \neq 0, \nu = 0$, тогаш G е изоморфна со потполугрупа од \mathbb{N} , која е конечно генерирана според **Теорема 1.1.**.

Нека $\mu \neq 0 \neq \nu$ и нека $\mu/\nu = \varphi$. Тогаш $\forall (a, b) \in G$ важи $b/a = \varphi$, односно $b = a\varphi$.

Дефинираме множество $H = \{a \mid a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, (a, a\varphi) \in G\}$. Тогаш, според **Теорема 1.1.**, H е конечно генерирана потполугрупа од \mathbb{N} , односно $H = \langle a_1, \dots, a_s \rangle$, за некои s и $a_1, \dots, a_s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Според тоа, $G = \langle (a_1, \varphi a_1), \dots, (a_s, \varphi a_s) \rangle$. Значи G е конечно генерирана потполугрупа. Да забележиме дека $s \leq \mu$.

2⁰. $m \geq 2$. Во овој случај $\text{cone}\{x_1, \dots, x_m\} = \text{cone}\{a, b\}$, за некои $a, b \in \{x_1, \dots, x_m\}$. Ако a, b се колинеарни, тогаш и овој случај се сведува на 1⁰. Затоа, нека $a = (u, w)$ и $b = (c, d)$ не се колинеарни. Без губење на општоста, нека $(0, 0) \in G$ и нека $u \neq 0$ и $d \neq 0$. Ги воведуваме ознаките $w/u = \varphi$ и $d/c = \psi$ ($w = \varphi u, d = \psi c$), при што за $c = 0, \psi = \infty$. Тогаш за секој $z = (\alpha, \beta) \in G$, $\varphi \leq \beta/\alpha \leq \psi$.

На почетокот ќе го разгледаме случајот кога $w \neq 0$ и $c \neq 0$.

Дефинираме множество:

$$G_\varphi = \{z \mid z = (\alpha, \beta) \in G, \beta/\alpha = \varphi\} \subseteq \mathbb{N}^2 \quad (3)$$

Од дефиницијата следува дека $a \in G_\varphi$. Нека $x = (\mu, \nu) \in G_\varphi$, е елемент со најмала ненулта прва компонента μ , (Слика 1). Тогаш: $(\forall t \in \mathbb{N})tx = (t\mu, t\nu) \in G_\varphi$ и $\forall z = (\alpha, \beta) \in G_\varphi$ за кој, $\alpha > \mu$, $tz = (t\alpha, t\beta) \in G_\varphi$. Исто така, за секои $z, w \in G_\varphi$, $z + w \in G_\varphi$. Значи $G_\varphi \subseteq \text{cone}\{x\}$ и G_φ е потполугрупа од \mathbb{N}^2 . Доказот на следната **Лема 2.1.** следува директно од 1⁰, каде што $m = 1$.

Лема 2.1. Потполугрупата G_φ (дефинирано со (3)) е конечно генерирано.

□

Потоа симетрично, дефинираме множество:

$$G_\psi = \{z \mid z = (\alpha, \beta) \in G, \beta/\alpha = \psi\} \subseteq \mathbb{N}^2. \quad (4)$$

Нека $y = (p, q) \in G_\psi$, е вектор со најмала ненулта втора компонента q , (Слика 1). На аналоген начин како погоре се докажува дека G_ψ е потполугрупа од \mathbb{N}^2 и дека е точна следната:

Лема 2.2. Потполугрупата G_ψ е конечно генерирано.

Нека сега претпоставиме дека $G \subseteq \mathbb{N}^2$, $G \subseteq \text{cone}\{x, y\}$, е бесконечно генерирана потполугрупа. Нека постои множество генератори

$X = \{x_i \mid i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$, така што $x_i \notin \langle \{x_i \mid i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \setminus x_i \rangle$. Според Лема 2.1. и Лема 2.2. потполугрупите G_φ и G_ψ се конечно генерирани, т.е. во секое од множествата G_φ и G_ψ има конечно многу елементи од X .

Од $x, y \in G$, следува дека на потполугрупата G и припаѓаат и елементите од видот:

$$\tau x + \sigma y = \tau(\mu, \nu) + \sigma(p, q) = (\tau\mu + \sigma p, \tau\nu + \sigma q).$$

Бидејќи $x = (\mu, \nu)$ и $y = (p, q)$ се линеарно независни, односно $\varphi \neq \psi$, елементите од овој вид се совпаѓаат со темињата на паралелограми распоредени во внатрешноста на $\text{cone}\{x, y\}$.

Нека секој таков паралелограм го означиме со, $T_{\tau\sigma}^2$, (Слика 1), каде што темињата на паралелограмот се во точките:

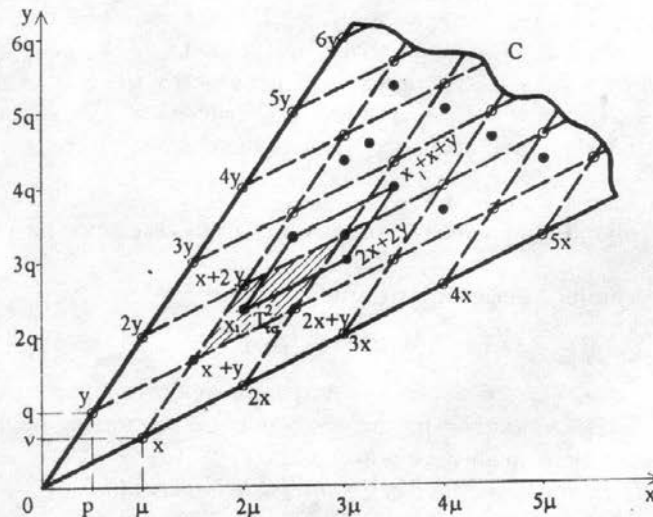
$$\tau x + \sigma y, (\tau + 1)x + \sigma y, \tau x + (\sigma + 1)y \text{ и } (\tau + 1)x + (\sigma + 1)y.$$

Прв чекор: Да претпоставиме дека $x_1 \in X \cap G$, таков што $x_1 = (\mu_1, \nu_1)$, $\mu_1 > \mu$ и $\varphi < \nu_1/\mu_1 < \psi$. Ако нема таков елемент, тогаш или $\nu_1/\mu_1 = \varphi$ или $\nu_1/\mu_1 = \psi$ или има само конечно многу елементи за кои $\mu_1 \leq \mu$.

Нека $\mu_1 > \mu$ и $x_1 \in T_{\tau_0\sigma_0}^2$, $\tau_0, \sigma_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ се најмалите вредности за τ и σ , односно x_1 припаѓа на паралелограмот со темиња:

$$\tau_0 x + \sigma_0 y, (\tau_0 + 1)x + \sigma_0 y, \tau_0 x + (\sigma_0 + 1)y \text{ и } (\tau_0 + 1)x + (\sigma_0 + 1)y.$$

Елементи од видот $x_1 + \gamma x + \delta y$, $\gamma, \delta \geq 0$, има во сите други паралелограми $T_{\tau\sigma}^2$ за кои $\tau \geq \tau_0$ и $\sigma \geq \sigma_0$.



Слика 1

Втор чекор: Да го разгледаме елементот $x_2 \neq x_1 + \gamma(\mu, \nu) + \delta(p, q)$, $x_2 \in G$. Постојат две можности. Елементот x_2 може да припаѓа на паралелограмот $T_{\tau_0\sigma_0}^2$, што претходно го разгледавме, или да припаѓа на некој нов паралелограм $T_{\tau'\sigma'}^2 \neq T_{\tau_0\sigma_0}^2$, каде $\tau' \geq \tau_0$, $\sigma' \geq \sigma_0$ и $\tau', \sigma' \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Ако $x_2 \in T_{\tau_0\sigma_0}^2$, тогаш елементи од видот $x_2 + \gamma x + \delta y$ има во секој од останатите паралелограми за кои $\tau > \tau_0$ и $\sigma > \sigma_0$.

Ако пак $x_2 \in T_{\tau'\sigma'}^2$, тогаш елементи од видот $x_2 + \gamma x + \delta y$ има во сите паралелограми за кои $\tau > \tau' \geq \tau_0$ и $\sigma > \sigma' \geq \sigma_0$.

Во наредниот чекор би се разгледал елементот x_3 , потоа x_4 и т.н. Постапката би требало да продолжи до бескрајност. Меѓутоа, познато е дека секој од паралелограмите има конечно многу целобројни точки. Според тоа, постапката (за разгледување на нови генератори) ќе застане после конечно многу чекори, а ова противречи на претпоставката дека G е бесконечно генерирана потполугрупа.

За да го комплетираме доказот на **Теорема 2.1**, за $n = 2$, треба да ги разгледаме и следните специјални случаи:

1⁰. $\varphi = 0$ и $\psi \in \mathbb{R}, \psi > 0$, **2⁰.** $\varphi \in \mathbb{R}, \varphi > 0$ и $\psi = \infty$ и **3⁰.** $\varphi = 0$ и $\psi = \infty$.

1⁰. За $\varphi = 0$ и $\psi \in \mathbb{R}, \psi > 0$, множеството G_φ го дефинираме со :

$$G_\varphi := \{z \mid z = (\alpha, \beta) \in G, \beta/\alpha = 0\} = \{z \mid z = (\alpha, 0) \in G\} \subseteq \mathbb{N}^2 \quad (5)$$

а множеството G_ψ со (4). За овие две множества G_φ и G_ψ , точни се тврдењата изнесени во **Лема 2.1.** и **Лема 2.2.**, односно тие се конечно генерирани потполугрупи од \mathbb{N}^2 . Останатиот дел од доказот е ист со доказот изнесен во претходното разгледување. Паралелограмите се со една страна паралелна на x - оската.

2⁰. За $\varphi \in \mathbb{R}, \varphi > 0$, и $\psi = \infty$, множеството G_ψ го дефинираме со :

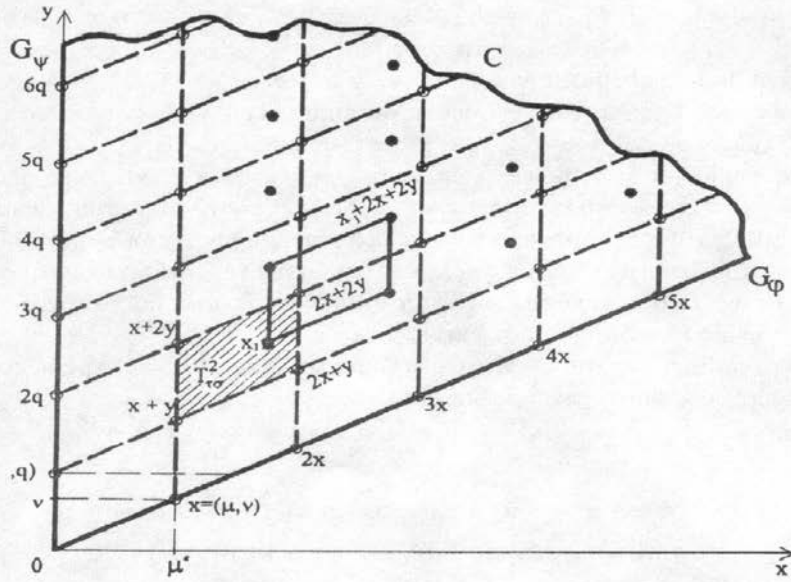
$$G_\psi := \{z \mid z = (0, \beta) \in G\} \subseteq \mathbb{N}^2. \quad (6)$$

За множествата G_φ и G_ψ , точни се тврдењата изнесени во **Лема 2.1.** и **Лема 2.2.** (соодветно). Докажете се исти и за овој случај, користејќи ги горе наведените дефиниции за множествата. Делот од доказот во кој се користат паралелограмите е ист, односно се повторува, со тоа што овие паралелограми имаат по една страна паралелна со y - оската, што може да се види на (Слика 2).

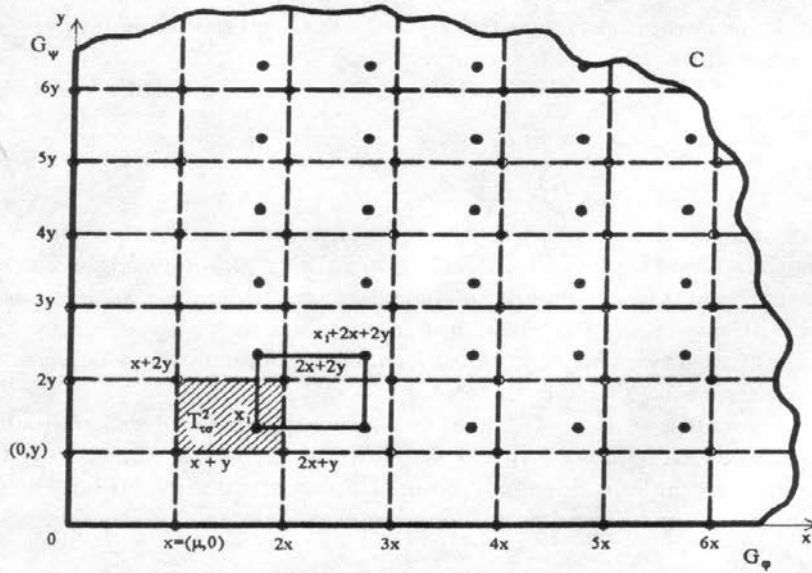
3⁰ Ако $\varphi = 0$ и $\psi = \infty$, (Слика 3), множеството G_φ е дефинирано со (5), а множеството G_ψ со (4). И во овој случај множествата G_φ и G_ψ се конечно генерирани потполугрупи. Паралелограмите во овој случај се правоаголници, (Слика 3) чии страни се паралелни со координатните оски.

Во досегашниот дел од доказот на **Теорема 2.1.** беа изнесени доказите за $n = 1$ и $n = 2$. Сега да се вратиме на понатамошното изведување на доказот со индукција.

Димензија на конвексен многуастр конус е димензијата на минималниот подростор во кој се содржи конусот.



Слика 2 ($\varphi = 3, \psi = \infty$)



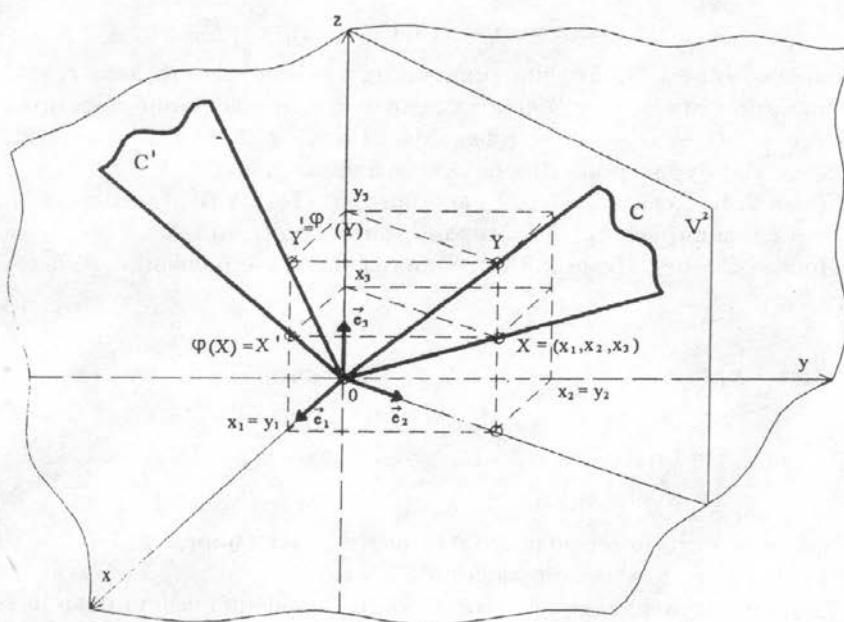
Слика 3 ($\varphi = 0, \psi = \infty$)

Да претпоставиме дека тврдењето во **Теорема 2.1.** е точно за $n \leq k$, т.е. потполугрупата $G \subseteq \mathbb{N}^k$ е конечно генерирана, ако и само ако постојат вектори $x_1, \dots, x_m \in G$, такви што $G \subseteq \text{cone}\{x_1, \dots, x_m\} = C$, ($\dim C = k$, каде што $x_i \in G$, ($i = 1, \dots, m$) и $x_i = (x_1^i, \dots, x_k^i)$).

Треба да се докаже тврдењето за $n = k + 1$.

Нека $G \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ и нека $x_i \in G$, ($i = 1, \dots, m$), $x_i = (x_1^i, \dots, x_{k+1}^i)$ и $G \subseteq C$, каде што $C = \text{cone}\{x_1, \dots, x_m\}$. Може да се разгледаат следните три случаи: $m < n$, $m = n$ и $m > n$.

Прв случај: $m < n = k + 1$, $\dim C \leq m < k + 1$, (Слика 4).



Слика 4. ($m < n, n = 3, m = 2$)

Нека V^m е векторски потпростор од \mathbb{R}^n , при што база на \mathbb{R}^n е:

$$\langle e_1, \dots, e_n \rangle, e_i = (0, \dots, 0, 1^i, 0, \dots, 0), (i = 1, \dots, n)$$

и притоа $C \subseteq V^m \subseteq \mathbb{R}^n$, така што постои $e_i \notin C$.

Дефинираме пресликување $\varphi : G \rightarrow \mathbb{N}^k$ со:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ &= (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (7)$$

Лема 2.3. Нека $G' = \varphi(G)$. Пресликувањето $\varphi : G \rightarrow G'$ дефинирано со (7) е биекција.

Доказ: Нека $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C \subseteq V^m$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_{i-1}, y_i, y_{i+1}, \dots, y_n)$ за кои $\varphi(\mathbf{x}) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$, $\varphi(\mathbf{y}) = (y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n)$ и $\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{y})$. Тогаш, од (7) следува:

$$(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n).$$

Ако $x_i \neq y_i$, нека $x_i > y_i$, односно $x_i - y_i = t$, $t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Бидејќи $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V^m \subseteq \mathbb{R}^n$, следува дека и $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in V^m \subseteq \mathbb{R}^n$. Тогаш:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} - \mathbf{y} &= (0, \dots, 0, x_i - y_i, 0, \dots, 0) \\ &= (0, \dots, 0, t, 0, \dots, 0) \\ &= t(0, \dots, 0, 1^i, 0, \dots, 0) \in V^m, \end{aligned}$$

односно $te_i \in V^m$, што противречи на претпоставката дека $e_i \in V^m$.

Значи, од $\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{y})$ следува дека $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, а тоа значи дека пресликувањето $\varphi : G \rightarrow G' \subseteq \mathbb{N}^k$ е ињекција. Бидејќи $G' = \varphi(G)$, следува дека $\varphi : G \rightarrow G'$ е сурјекција. Значи φ е биекција. \square

Лема 2.4. Нека $G' = \varphi(G)$ како погоре. Тогаш G' е потполугрупа од \mathbb{N}^k и φ (дефинирано со (7)) е изоморфизам од G во G' .

Доказ: Според Лема 2.3., пресликувањето φ е биекција. Ако $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in G$, тогаш:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= \varphi(x_1 + y_1, \dots, x_{i-1} + y_{i-1}, x_i + y_i, x_{i+1} + y_{i+1}, \dots, x_n + y_n) \\ &= (x_1 + y_1, \dots, x_{i-1} + y_{i-1}, x_{i+1} + y_{i+1}, \dots, x_n + y_n) \\ &= (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n) \\ &= \varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

Значи φ е хомоморфизам од G во \mathbb{N}^k , па според тоа $G' = \varphi(G)$ е потполугрупа од \mathbb{N}^k изоморфна со G . \square

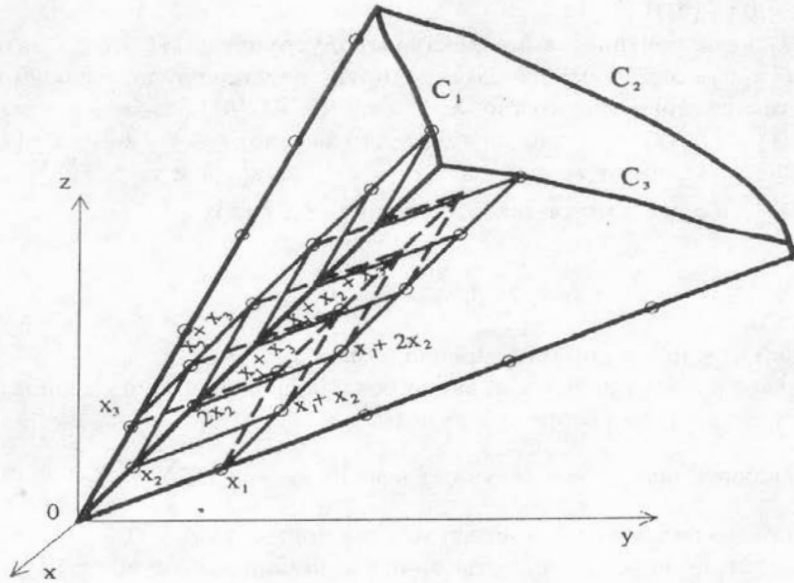
Според индуктивната претпоставка, G' е конечно генерирана потполугрупа. Бидејќи G и G' се изоморфни, следува дека и потполугрупата G е конечно генерирана.

Втор случај: $m = n = k + 1$. Ако $\dim C < n$, тогаш дискусијата се сведува на првиот случај. Затоа нека $\dim C = n$. Тогаш постојат независни вектори

$$\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in G \subseteq \mathbb{N}^{k+1}, \quad \mathbf{x}_i = (x_1^i, \dots, x_n^i), \quad (i = 1, \dots, n = k + 1),$$

такви што $G \subseteq \text{cone}\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$, (Слика 5).

На почеток ќе ги разгледаме потполугрупите од G , со својството $G_j \subseteq C_j$, каде што $C_j = \text{cone}\{\mathbf{x}_1, \dots, \hat{\mathbf{x}}_j, \dots, \mathbf{x}_n\}$, ($j = 1, \dots, n$), $G_j = G \cap C_j$. Вакви потполугрупи има $n = k + 1$. Секоја од овие потполугрупи $G_j \subseteq \mathbb{N}^k$ и за нив важи тврдењето од **првиот случај**, односно потполугрупите од овој вид се конечно генерирани.



Слика 5. ($m = n, n = 3, m = 3$)

Паралелопипед T^{k+1} со димензија $k+1$ се добива како паралелопипед со основа паралелопипед T^k со димензија k и еден раб x со димензија еден, односно

$$T^{k+1} = (T^k \cup (T^k + x)) \cap \mathbb{N}^k, \text{ каде што } T^k + x = \{y + x \mid y \in T^k\}.$$

На почетокот на **вториот случај** напомниме дека постојат вектори $x_1, \dots, x_n \in G \subseteq \mathbb{N}^{k+1}, x_i = (x_1^i, \dots, x_n^i), (i = 1, \dots, n)$, такви што $G \subseteq \text{cone}\{x_1, \dots, x_n\}$. Тогаш од:

$$\begin{aligned} x_1 + \dots + x_n &= x_1 + \dots + x_{k+1} \\ &= (x_1^1, \dots, x_{k+1}^1) + \dots + (x_1^{k+1}, \dots, x_{k+1}^{k+1}) \\ &= (x_1^1 + \dots + x_1^{k+1}, \dots, x_{k+1}^1 + \dots + x_{k+1}^{k+1}) \in G, \end{aligned}$$

и бидејќи x_1, \dots, x_n се независни, следува дека на потполгрупата G и припаѓаат и елементите од видот $\sum_{p=1}^{k+1} \alpha_p x_p$, $\alpha_p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, кои се совпаѓаат со страните со минимална димензија - темиња на паралелопипедите распоредени во внатрешноста на $\text{cone}\{x_1, \dots, x_n\}$. Секој таков паралелопипед $T_{\sigma_p}^{k+1}$, $\sigma_p \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^{k+1}$.

Потоа, нека претпоставиме дека потполгрупата $G \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ за која $G \subseteq \text{cone}\{x_1, \dots, x_n\}$ е бесконечно генерирана потполгрупа, односно дека постои генераторно множество $X = \{z_i | i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$, такво што $z_j \notin \langle z_i | i \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \setminus \{j\} \rangle$, односно такво што за секој $z \in X$, $z \notin \langle X \setminus \{z\} \rangle$.

Нека постои вектор $z_1 \in X \cap G$, $z_1 = (z_1^1, \dots, z_1^{k+1})$ и $z_1 \in T_{\sigma_{p_0}}^{k+1}$, $\sigma_{p_0} \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^{k+1}$ и σ_{p_0} е најмал таков. Елементи од видот

$$z_1 + \sum_{p=1}^{k+1} \beta_p x_p, \quad \beta_p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

има во сите други паралелопипеди за кои $\sigma_p \geq \sigma_{p_0}$.

Ако таков елемент не постои, значи постојат конечно многу генератори за кои стана збор во погоре изнесеното.

Во следниот чекор разгледуваме вектор $z_2 \neq z_1 + \sum_{p=1}^{k+1} \beta_p x_p$, $\beta_p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Од бесконечноста на X следува дека постои $z_2 \in X \cap G$, таков што $z_2 \notin \langle z_1 \rangle$. Елементот z_2 може да припаѓа на паралелопипедот $T_{\sigma_{p_0}}^{k+1}$ што претходно го разгледувавме, или на некој нов паралелопипед $T_{\sigma_{p_1}}^{k+1} \neq T_{\sigma_{p_0}}^{k+1}$ за $\sigma_{p_1} \geq \sigma_{p_1}$ и σ_{p_1} најмал.

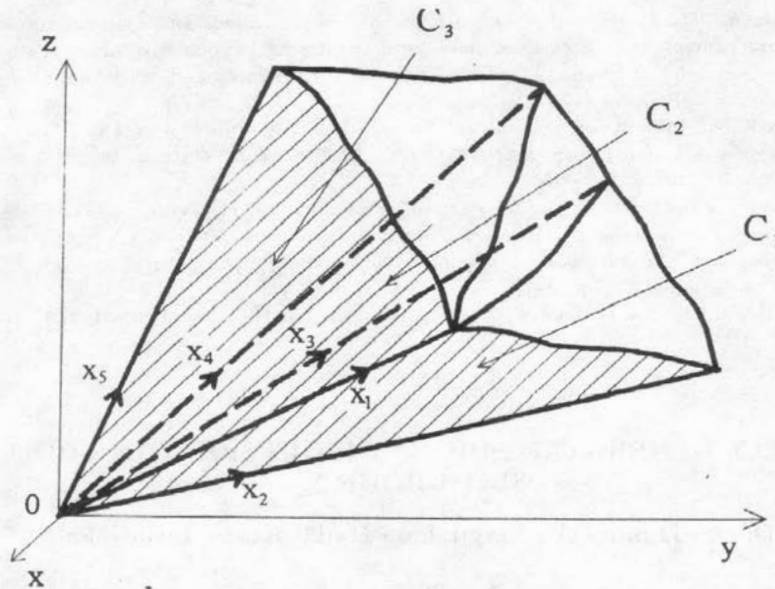
Ако $z_2 \in T_{\sigma_{p_0}}^{k+1}$, тогаш елементи од видот $z_2 + \sum_{p=1}^{k+1} \beta_p x_p$, $\beta_p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ има во секој од останатите паралелопипеди $T_{\sigma_p}^{k+1}$ за кои $\sigma_p \geq \sigma_{p_0}$.

Ако $z_2 \in T_{\sigma_{p_1}}^{k+1}$, тогаш елементи од видот $z_2 + \sum_{p=1}^{k+1} \beta_p x_p$, $\beta_p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ има во секој од останатите паралелопипеди $T_{\sigma_p}^{k+1}$ за кои $\sigma_p \geq \sigma_{p_1} \geq \sigma_{p_0}$.

Постапката треба да продолжи со разгледување на наредниот елемент z_3 , и т.п., до бескрајност. Меѓутоа познато е дека секој од паралелопипедите $T_{\sigma_p}^{k+1}$, има конечно многу целобројни точки, (кои соодветствуваат на целобројни вектори).

Според тоа постапката за разгледување на нови елементи - генератори, ќе застане после конечно многу чекори. Ова противречи на претпоставката дека G е бесконечно генерирана потполгрупа од \mathbb{N}^{k+1} .

Трет случај: $m > n = k + 1$. (Слика 6)



Слика 6. ($m > n, n = 3, m = 5$)

$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$; $C_1 = \text{cone}\{x_1, x_2, x_3\}$; $C_2 = \text{cone}\{x_1, x_3, x_4\}$; $C_3 = \text{cone}\{x_1, x_4, x_5\}$;

Ако $\dim C < n$, тогаш дискусијата се сведува на првиот случај. Затоа нека $\dim C = n$. Бидејќи $x_1, \dots, x_m \in G$, $G \subseteq \text{cone}\{x_1, \dots, x_m\} = C$ и $m > n = k + 1$, многустраниот конус C , може да се претстави како унија од $(m - k)$ конуси C_i , ($i = 1, \dots, m - k$), генерирани од по $k + 1$ вектори, односно

$C = \bigcup_{i=1}^{m-k} C_i$, $\dim C_i = k + 1$. Потполугрупата G може да се претстави

како унија од потполугрупи G_i , односно $G = \bigcup_{i=1}^{m-k} G_i$, каде што $G_i \subseteq C_i$,

($i = 1, \dots, m - k$). Секоја од овие потполугрупи G_i е конечно генерирана, според вториот случај, (за $m = k + 1$). Според тоа и нивната унија е конечно генерирана.

Со целокупната досегашна дискусија е докажана едната насока од **Теоремата 2.1**.

Обратната насока е тривијална, бидејќи секоја потполугрупа од адитивната полугрупа \mathbb{N}^n генерирана со конечно многу вектори е содржана во конусот генериран со тие конечно многу вектори.

REFERENCES

- [1] Bachem A., *The theorem of Minkowski for polyhedral monoids and aggregated linear diophantine systems*, in *Optimization and Operations Research Proceedings of a Workshop held at the University of Bonn, 1977*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems **157**, Springer, Berlin, (1978), 1 - 13.
- [2] Dimovski D., *Aditivni poligrupi na celi brojevi*, MANU, Skopje, Prilozi, **IX**, **2**, 1977.
- [3] Jeroslow R. G., *Some basic theorems for integral monoids*, Mathematics of Operations Research, **3**, (1978), 145 - 154.
- [4] Чупона Ѓ., Трпеновски Б., *Предавања по алгебра*, кн. **II**, Скопје, (1973).
- [5] Хаџи-Коста Јосифовска М., *Многострани конуси во решетката \mathbb{N}^n (со примена во целобројното програмирање и адитивните потполугрупи од вектори од \mathbb{N}^n)*, докторска дисертација, Скопје, 2000.
- [6] А.И.Мальцев, *Алгоритмы и рекурсивные функции*, Издательство Наука, Москва, 1965.

FINITELY GENERATED SUBSEMIGROUPS OF THE ADDITIVE SEMIGROUP \mathbb{N}^n

Dončo Dimovski*, Magdalena Hadži-Kosta Josifovska**

S u m m a r y

In this paper we give a geometric description of finitely generated subsemigroups of the additive semigroup \mathbb{N}^n .

The main result of this paper is the following:

T.2.1 A subsemigroup G of the additive semigroup \mathbb{N}^n is finitely generated, if and only if there are elements $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$ of G , such that G is a subset of the cone generated by $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$.

*) FACULTY OF NATURAL SCIENCES AND MATHEMATICS, P.O. BOX 162, 1000 SKOPJE, MACEDONIA

E-mail address: donco@iunona.pmf.ukim.edu.mk

**) ТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ, 4700 БИТОЛА, МАКЕДОНИЈА