ЗА n - АРНИТЕ ОПЕРАЦИИ

Ирена Стојменовска,
Техноилошко-металуршки факултет , Скопје

Апстракт: Во оваа работа разгледувано е множеството Ω_n од n - арните операции на едно непразно множество Q; се работи со одредени подмножества на Ω_n над кои со помош на соодветно дефинирани операции се конструираат алгебарски структури и се испитуваат нивните својства. Се дефинираат т.н. дополнувања на една n - арна операција.

1. Нека Q е непразно множество, Q^n (Декартов производ на Q); А: $Q^n \to Q$ n - арна операција на Q.

Подредениот пар (Q, A) го викаме n - групоид, кој често пати се означува со $Q(\mathrm{A})$.

n - групоидот $Q(\mathrm{A})$ е со i - то кратење ако е исполнето

$$A(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n) = A(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, y, a_{i+1}, \ldots, a_n) \quad \Rightarrow \quad x = y$$

n - групоидот $Q(\mathrm{A})$ е групоид со кратење ако $Q(\mathrm{A})$ е со i - то кратење за секој $i = 1,2,\ldots,n$.

n - арните операции $A_1, A_2, \ldots, A_n$ се ортогонални ако системот

$$\begin{aligned} &A_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1 \\ &A_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_2 \\ &\vdots \\ &A_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_n \end{aligned}$$

има единствено решение за секои $a_1, a_2, \ldots, a_n \in Q$.

Низата $A_1, A_2, \ldots, A_{n+m}$ од n - арни операции на Q е ортогонален систем на операции ако за секоја инјекција $\phi : \{1,2,\ldots,n\} \to \{1,2,\ldots,n+m\}$ операциите $A_{\phi(i)}$, $i = 1,2,\ldots,n$ се ортогонални.

Операциите E_i $i = 1,2,\ldots,n$ определени со:

$E_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_i$ $\quad i = 1,2,\ldots,n$ ги викаме i - ти проекции во Ω_n.

2070

n - арната операција A определена на множеството Q е i-инверзибилна ако пресликувањето

$$L_i^A : x \rightarrow A(a_1, a_2, ..., a_{i-1}, x, a_{i+1}, ..., a_n)$$

е биекција во Q за секои $a_1, a_2, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_n \in Q$. Со други зборови, n - арната операција A i - инверзибилна ако равенката

$$A(a_1, a_2, ..., a_{i-1}, x, a_{i+1}, ..., a_n) = b$$

има единствено решение за секои $a_1, a_2, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_n, b \in Q$.

Притоа, ако A е i - инверзибилна n - арна операција, со:

$$A^i(x_1, x_2, ..., x_n) = x_{n+1} \Leftrightarrow A(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{n+1}, x_{i+1}, ..., x_n) = x_i$$

е дефинирана n - арна операција на Q.

n - групоидот $Q(A)$ е n - квазигрупа ако равенката

$$A(a_1, a_2, ..., a_{i-1}, x, a_{i+1}, ..., a_n) = b$$

има единствено решение за секои $a_1, a_2, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_n, b \in Q$ и секој $i = 1,2,...,n$. Според тоа, $Q(A)$ е n - квазигрупа ако A е i - инверзибилна за секое i, $i = 1,2,...,n$

2. Во множеството Ω_n разгледуваме бинарни операции "$\overset{i}{\circ}$" определени со:

$$A \overset{i}{\circ} B = A(E_1, ..., E_{i-1}, B, E_{i+1}, ..., E_n) \qquad i = 1,2,...,n$$

Операцијата "$\overset{i}{\circ}$" ја викаме i - ти производ на A со B, $A, B \in \Omega_n$.

2.1 Ако Ω_n^i е множеството од i - инверзибилните n - арни операции на Q, тогаш $\left(\Omega_n^i, \overset{i}{\circ}\right)$ е група.

Доказ. Нека $A, B \in \Omega_n^i$, ќе покажеме дека $A \overset{i}{\circ} B \in \Omega_n^i$. Равенката

$$A(a_1, a_2, ..., a_{i-1}, B(a_1, a_2, ..., a_{i-1}, x, a_{i+1}, ..., a_n), a_{i+1}, ..., a_n) = b \qquad (1)$$

е еквивалентна со равенката

$$A^i(a_1, a_2, ..., a_{i-1}, b, a_{i+1}, ..., a_n) = B(a_1, a_2, ..., a_{i-1}, x, a_{i+1}, ..., a_n) \qquad (2)$$

од каде следува

$$x = B^i(a_1, a_2, ..., a_{i-1}, A^i(a_1, a_2, ..., a_{i-1}, b, a_{i+1}, ..., a_n), a_{i+1}, ..., a_n)$$

т.е. равенката (1) има единствено решение.

Операцијата "$\overset{i}{\circ}$" е асоцијативна:

$$((A \overset{i}{\circ} B) \overset{i}{\circ} C)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (A \overset{i}{\circ} B)(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, C(x_1, x_2, \ldots, x_n), x_{i+1}, \ldots, x_n)$$
$$= A(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, B(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, C(x_1, x_2, \ldots, x_n), x_{i+1}, \ldots, x_n), x_{i+1}, \ldots, x_n)$$
$$= A(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, (B \overset{i}{\circ} C)(x_1, x_2, \ldots, x_n), x_{i+1}, \ldots, x_n) = (A \overset{i}{\circ} (B \overset{i}{\circ} C))(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

очигледно е дека E_i (i - тата проекција во Ω_n) е i - инверзибилна, притоа, за $A \in \Omega_n^i$ имаме:

$$(A \overset{i}{\circ} E_i)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, E_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), x_{i+1}, \ldots, x_n)$$
$$= A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$(E_i \overset{i}{\circ} A)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = E_i(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, A(x_1, x_2, \ldots, x_n), x_{i+1}, \ldots, x_n)$$
$$= A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

т.е. E_i е неутрален елемент во $\left(\Omega_n^i, \overset{i}{\circ}\right)$.

Ако $A \in \Omega_n^i$ тогаш и $A^i \in \Omega_n^i$, при што е исполнето:

$$(A \overset{i}{\circ} A^i)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, A^i(x_1, x_2, \ldots, x_n), x_{i+1}, \ldots, x_n)$$
$$= x_i = E_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$(A^i \overset{i}{\circ} A)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A^i(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, A(x_1, x_2, \ldots, x_n), x_{i+1}, \ldots, x_n)$$
$$= x_i = E_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

значи A^i е инверзен елемент на A во однос на операцијата "$\overset{i}{\circ}$".

2.2 Нека Ω_n^j е множеството од j - инверзибилните операции на Q. Ќе покажеме дека групите $\left(\Omega_n^i, \overset{i}{\circ}\right)$ и $\left(\Omega_n^j, \overset{j}{\circ}\right)$ се изоморфни.

Доказ. Нека $A \in \Omega_n^i$, дефинираме n - арна операција A^{ij} определена со:

$$A^{ij} : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \;\to\; A(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \ldots, x_n) \qquad (3)$$

Поради (3) равенката $A^{ij}(a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \ldots, a_n) = b$ е еквивалентна со равенката $A(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, a_i, a_{j+1}, \ldots, a_n) = b$ која има единствено решение. Значи $A^{ij} \in \Omega_n^j$.

Пресликувањето $\Phi : \Omega_n^i \to \Omega_n^j$ определено со $\Phi(A) = A^{ij}$ е биекција;

за $A, B \in \Omega_n^i$ имаме:

$$(\overset{i}{A \circ B})^{ij}(x_1,\dots,x_n) = (\overset{i}{A \circ B})(x_1,\dots,x_{i-1},x_j,x_{i+1},\dots,x_{j-1},x_i,x_{j+1},\dots,x_n)$$
$$= A(x_1,\dots,x_{i-1},B(x_1,\dots,x_{i-1},x_j,x_{i+1},\dots,x_{j-1},x_i,x_{j+1},\dots,x_n),x_{i+1},\dots,$$
$$x_{j-1},x_i,x_{j+1},\dots,x_n) = A(x_1,\dots,x_{i-1},B^{ij}(x_1,\dots,x_n),x_{i+1},\dots,x_{j-1},x_i,x_{j+1},\dots,x_n)$$
$$= A^{ij}(x_1,\dots,x_{j-1},B^{ij}(x_1,\dots,x_n),x_{j+1},\dots,x_n) = (A^{ij} \overset{j}{\circ} B^{ij})(x_1,\dots,x_n)$$

следува: $\Phi(\overset{i}{A \circ B}) = (\overset{i}{A \circ B})^{ij} = A^{ij} \overset{j}{\circ} B^{ij} = \Phi(A) \overset{j}{\circ} \Phi(B)$.

3. Секоја низа $A_1, A_2,\dots,A_n$ n - арни операции на Q определува една трансформација во Q^n:

$$(A_1,A_2,\dots,A_n)(x_1,x_2,\dots,x_n) = (A_1(x_1,x_2,\dots,x_n),A_2(x_1,x_2,\dots,x_n),\dots,A_n(x_1,x_2,\dots,x_n))$$

и обратно, со:

$$\theta(x_1,x_2,\dots,x_n) = (A_1(x_1,x_2,\dots,x_n),A_2(x_1,x_2,\dots,x_n),\dots,A_n(x_1,x_2,\dots,x_n))$$

е определена една низа $A_1, A_2,\dots,A_n$ n - арни операции на Q.

Ако θ е трансформација во Q^n; C n - арна операција на Q, тогаш $C\theta$ претставува n- арна операција на множеството Q определена со равенството

$$C\theta(x_1,x_2,\dots,x_n) = C(\theta(x_1,x_2,\dots,x_n))$$

т.е. $\phi : C \to C\theta$ е пресликување во Ω_n.

Нека A е n - арна операција на Q, ставајќи

$$A_i = A\theta_i = A(\overset{i-1}{A},E_i,\overset{n-i}{A}) \quad i = 1,2,\dots,n \tag{4}$$

добиваме систем $\Sigma = \{A_1,A_2,\dots,A_n\}$ n - арни операции на Q. Секое подмножество $\Sigma' \subset \Sigma$ кое содржи точно n-1 операции го викаме дополнување на операцијата А.

3.1 Ако Q(A) е n-квазигрупа и Σ' е дополнување на операцијата A, тогаш системот $\{A\} \cup \Sigma'$ е ортогонален систем n - арни операции.

Доказ. Нека $\Sigma' = \{A_1,A_2,\dots,A_{i-1},A_{i+1},\dots,A_n\}$ е едно дополнување на А определено со (4).

Системот

$$A(x_1,x_2,\dots,x_n) = a$$
$$A_k(x_1,x_2,\dots,x_n) = b_k,\ k = 1,2,\dots,i-1,i+1,\dots,n; \qquad a,b_k \in Q,$$

е еквивалентен со

$$A(x_1,x_2,\dots,x_n) = a$$
$$A(\overset{k-1}{a},x_k,\overset{n-k}{a}) = b_k, \quad k = 1,2,\dots,i-1,i+1,\dots,n \tag{5}$$

Како по претпоставка $Q(A)$ е n - квазигрупа, системот (5) има единствено решение.

3.2 Ако за секое дополнување $\Sigma^{/}$ на конечниот n - групоид $Q(A)$ системот $\{A\}\cup\Sigma^{/}$ е ортогонален систем на операции, тогаш Q(A) е n- квазигрупа.

Доказ. Нека $Q(A)$ е конечен n - групоид и нека

$$\{A\}\cup\{A_1, A_2, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_n\}$$

е ортогонален систем n - арни операции за $i = 1,2,\dots,n$.

Нека $i \in \{1,2,\dots,n\}$, ќе покажеме дека A е i - инверзибилна. Ја разгледуваме равенката

$$A(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n) = b\,, \qquad a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n, b \in Q\,.$$

Од ортогоналноста по услов, системот

$$\begin{aligned} &A(x_1, x_2, \dots, x_n) = b \\ &A(\overset{k-1}{A}(x_1, x_2, \dots, x_n), x_k, \overset{n-k}{A}(x_1, x_2, \dots, x_n)) = A(\overset{k-1}{b}, a_k, \overset{n-k}{b}) \end{aligned} \tag{6}$$

$k = 1,2,\dots,i-1, i+1,\dots,n$ има единствено решение. Значи секоја од равенките

$$A(\overset{k-1}{b}, x_k, \overset{n-k}{b}) = A(\overset{k-1}{b}, a_k, \overset{n-k}{b}) \quad k = 1,2,\dots,i-1, i+1,\dots,n \tag{7}$$

има решение. Бидејќи групоидот $Q(A)$ е конечен,

$$x_k = a_k \qquad k = 1,2,\dots,i-1, i+1,\dots,n$$

се единствени решенија на равенките определени со (7), од каде поради ортогоналноста на системот (6) следува дека равенката

$$A(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n) = b$$

има единствено решение.

Забелешка Ако $Q(A)$ е n - групоид со кратење, од (7) следува дека $x_k = a_k$, $k = 1,2,\dots,i-1, i+1,\dots,n$, од каде со дискусија аналогна на претходната заклучуваме дека равенката $A(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n) = b$ има единствено решение.

Значи, условот за конечност на n-групоидот $Q(A)$, може да се замени со релативно послаба претпоставка: $Q(A)$ е n - групоид со кратење. Уште повеќе, тврдењето важи при услов за т.н. "слабо кратење": n - групоидот $Q(A)$ е со "слабо кратење" ако

$$A(\overset{i-1}{a}, x, \overset{n-i}{a}) = A(\overset{i-1}{a}, y, \overset{n-i}{a}) \quad \Rightarrow \quad x = y\,, \text{ за секој } i = 1,2,\dots n\,.$$

Литература

[1] В. Д. Белоусов, n - арные квазигруппы, Кишинев, 1972

[2] В. Д. Белоусов, Алгебраические сети и квазигруппы, Кишинев, 1971

[3] Dr. J.Usan, Kvazigrupe, Institut za matematiku, Novi Sad, 1979