




Математички омнибус

КНИГА 9

Научно-популарни трудови од
Петтиот семинар
„Математика и примени“



Институт за математика

Природно-математички факултет
Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје

СКОПЈЕ, 2022

**Научно-популарни трудови од
Петтиот семинар
„Математика и примени“**

Институт за математика
Природно-математички факултет
Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје
Скопје, Р. Северна Македонија

2022

НАУЧНО-ПОПУЛАРНИ ТРУДОВИ ОД ПЕТТИОТ СЕМИНАР
„МАТЕМАТИКА И ПРИМЕНИ“

МАТЕМАТИЧКИ ОМНИБУС

Едиција на Институтот за математика при ПМФ
Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје

Издавач:

Природно-математички факултет, Скопје

Уредници:

Д-р Весна Целакоска-Јорданова,
редовен професор на Институтот за математика на ПМФ во Скопје

Д-р Ирена Стојковска,
редовен професор на Институтот за математика на ПМФ во Скопје

Рецензенти:

Д-р Анета Гацовска-Барандовска,
вонреден професор на Институтот за математика на ПМФ во Скопје

Д-р Емилија Целакоска,
редовен професор на Машинскиот факултет во Скопје

Д-р Катерина Хаџи-Велкова Санева,
редовен професор на ФЕИТ во Скопје

Д-р Марија Михова,
редовен професор на ФИНКИ во Скопје

Д-р Петар Соколки,
доцент на Институтот за математика на ПМФ во Скопје

Д-р Абдула Букла,
доцент на Институтот за математика на ПМФ во Скопје

М-р Марко Димовски,
специјалист за планирање на енергетско портфолио во ЕВН Македонија

Техничко уредување и обработка:

Д-р Весна Целакоска-Јорданова

© 2022 Сите права за ова издание се заштитени со закон. Забрането е копирање, умножување и објавување на делови или на целото издание во печатени и електронски медиуми или за друг вид јавна употреба или изведба без согласност на издавачот и на авторите.

ПРЕДГОВОР КОН ЕДИЦИЈАТА МАТЕМАТИЧКИ ОМНИБУС

Математиката е јазик што го опишува светот околу нас. Таа е во основата на секоја од природните науки, но истовремено црпи и инспирација од нив. Често, дури и незабележително, математичките откритија им претходат на разни технолошки иновации, а математичките идеи и структури се користат и се заслужни за развојот на скоро секое поле од науките. Денес математиката поставува нови стандарди на современиот начин на живеење. Но, математиката е дисциплина и самата за себе – таа е најдобар пример за човечката упорност и истрајност во стекнување знаења, таа е прилагодлива и има способност да ги поврзе областите кои се многу различни.

Таа разновидност од математички идеи, а истовремено и обединетост, планираме да биде во основата на едицијата Математички омнибус. Книгите во рамките на оваа едиција се со научно-популарни содржини од областа на чистата и применетата математика, како и содржани за наставата по математика. Наменети се за наставниците и професорите по математика, студентите, учениците и сите вљубеници во математиката, но и за оние кои сè уште го откриваат нејзиното значење.

Од уредниците

Скопје,
24.7.2017

Оваа страница намерно е оставена празна

ПРЕДГОВОР КОН КНИГА 9

Петтиот семинар „Математика и примени“ се одржа на 5 и на 6 март 2021 година во вид на вебинар, а беше организиран од Институтот за математика при Природно-математичкиот факултет во Скопје. Целта на Семинарот е преку збир од научно-популарни предавања и предавања за наставата по математика да придонесе за популаризација на математиката меѓу младите и пошироката јавност, за ширење и размена на добрите наставни практики, но и да предложи нови идеи за нивно подобрување.

За успешниот тек на Семинарот беа заслужни и водителите на секциите: проф. д-р Валентина Миовска, проф. д-р Анета Гацовска-Барандовска, проф. д-р Невена Серафимова, проф. д-р Ѓорѓи Маркоски, проф. д-р Весна Целакоска-Јорданова, проф. д-р Слаѓана Јакимовиќ, проф. д-р Ирена Стојковска, проф. д-р Валентина Гоговска и проф. д-р Марија Михова. За техничката поддршка беа заслужни м-р Марко Димовски и демонстраторите Стефан Мирчевски и Ерблина Зеќири.

Математиката како наука можеби изгледа недостапна за многумина, но презентирана на вистинскиот начин, може да биде интересна за секого, зашто таа е јазикот на нашата реалност. Излагачите на предавањата на Семинарот се потрудија да ни ја пренесат оваа порака. Научно-популарниот дел од Семинарот се состоеше од 16 научно-популарни предавања во кои беа презентирани разни математички проблеми, нивната примена во разни области – не само во математиката, туку и во инженерските, економските, хуманистичките, општествените и природните науки.

Во оваа книга во голем дел се содржани трудовите (12) од одржаните предавања, а сите тие имаат научно-популарен карактер од областа на чистата и на применетата математика.

Од уредниците

Скопје,
14.4.2022

Оваа страница намерно е оставена празна

СОДРЖИНА

<p>Јаков Митровски, Марија Михова</p>	<p><i>Корисћење на мајрична факторизација во системи за прејорачување</i></p>	<p>9 – 21</p>
<p>Тамара Кафтанџиева, Виолета Цветкоска</p>	<p><i>Одлучувањето на младата популација во доменот на личните финансии: повеќекритериумски пристап</i></p>	<p>23 – 42</p>
<p>Филип Трајковски</p>	<p><i>Декомпозиција на матрица на сингуларни вредности, анализа на нејзината временска и просторна сложеност и примена при компресија на слики</i></p>	<p>43 – 60</p>
<p>Ангела Здравковска</p>	<p><i>Што е заедничко за мешање чај во шолја, боење темиња во триаголник и фер доделба на трошоци за станарина?</i></p>	<p>61 – 74</p>
<p>Невена Серафимова</p>	<p><i>Пандемски игри и стратегии</i></p>	<p>75 – 95</p>
<p>Владимир Јорданов</p>	<p><i>Фибоначиевите броеви, теоријата на Елиот и тргувањето со хартии од вредност</i></p>	<p>97 – 112</p>
<p>Адмир Хусеини</p>	<p><i>Идентификацијата на широк производ на Јакоби</i></p>	<p>113 – 135</p>
<p>Стево Ѓоргиев</p>	<p><i>(Не)Возможна ослободителна стратегија</i></p>	<p>137 – 148</p>
<p>Анастасија Трајанова</p>	<p><i>Периодичноста кај дискретните динамички системи и теоремата на Шарковски</i></p>	<p>149 – 166</p>
<p>Филип Николовски</p>	<p><i>Логистичка регресија и нејзина примена на задачи од бинарна класификација</i></p>	<p>167 – 176</p>
<p>Ерблина Зеќири</p>	<p><i>Нестранзитивни коцки</i></p>	<p>177 – 189</p>
<p>Ирена Стојковска</p>	<p><i>Задача на најдобар избор и оптимално зазирање</i></p>	<p>191 – 206</p>

КОРИСТЕЊЕ НА МАТРИЧНА ФАКТОРИЗАЦИЈА ВО СИСТЕМИ ЗА ПРЕПОРАЧУВАЊЕ

*Јаков Митровски*¹

*Марија Михова*¹

Под систем за препорачување се подразбира систем кој тежи да ја предвиди оцената или преферирањето на одреден објект од страна на специфичен корисник. Последните години ваков тип системи се неизбежен дел од платформите кои се трудат да го погодат вкусот на своите корисници и да им ги понудат оние производи или содржини кои ним најмногу би им се допаднале. Затоа се користат во многу области, од понуда на музика, интернет содржини, курсеви за слушање, интернет продавници и слично. Најпознат пример за ваков систем е платформата Нетфликс (Netflix) која врши селекција на филмови и серии кои би им се допаднале на нивните корисници. Имено, ваквите системи добија најголема популарност кога оваа компанија го објави познатиот натпревар “The Netflix Prize”, [1], во кој понудија еден милион долари на оној кој ќе го подобри постоечкиот систем за препораки за 10%. Во овој труд ќе биде анализирано решението кое победи на натпреварот, кое се базира на факторизација на матрици, односно запишување на матрицата од веќе дадени оценки, како производ од две други матрици.

Еден систем за препорака на филмови има задача да селектира листа на филмови кои би му се допаднале на конкретниот корисник, врз база на неговите преференции. Неговите преференции се оценуваат врз основа на оцените кои тој веќе ги има дадено за одредени филмови или пак неговата историја на гледани филмови. Селекцијата на филмовите предвид ги зема сличноста помеѓу филмовите и сличноста помеѓу корисниците, и смета дека слични корисници би дале слични оценки за слични филмови. Различните приоди се разликуваат во начинот на оценување на овие сличности, но сите тие, ова оценување го прават преку анализирање на историските податоци од сите корисници и филмови, кои претходно ги имаат на располагање. Па, системот има за цел точно да предвиди каква оценка би дал еден корисник за филм кој тој го нема гледано, и да му ги препорача филмовите за кои тој би дал висока оценка.

1. ВИДОВИ СИСТЕМИ ЗА ПРЕПОРАЧУВАЊЕ

Во последнава деценија, системите за препорачување наоѓаат примена во широк спектар од области кои му се од интерес на човекот. Генерално овие системи се користат за да се предвиди оцената која корисникот би ја дал за множество на ставки преку анализа на неговото претходно оценување и на корисници кои имаат слични карактеристики на корисникот кој е разгледуван. Целта на еден систем за препорачување е да успее да ја предвиди оцената која корисникот би ја дал за одредена ставка, за која важи дека тој не се сретнал претходно со таа ставка, односно, не ја оценил. Постојат два метода кои се користат при изработка на еден ваков систем, и тоа:

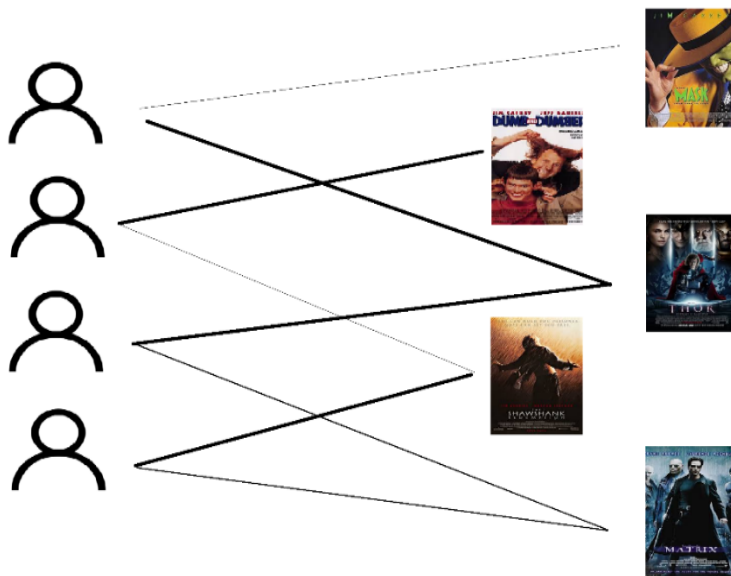
- Методи за колаборативно филтрирање.
- Методи базирани на содржина, [6].

Методите за колаборативно филтрирање како претпоставка земаат дека слични корисници имаат слични преференции. Па така, врз основа на тоа каква оцена поставиле корисниците слични на даден корисник u , за ставката v , може да се предвиди оцената која корисникот u би ја дал на таа ставка v . Со цел ова да функционира, најголемиот дел од ваквите методи користат мерка која ја дефинира сличноста помеѓу корисниците [5]. Од друга страна, методите базирани на содржина работат поинаку. Кај овие методи предвидувањето на оцената која ја дал корисникот u за ставката v се темели на претходните оценки што корисникот u ги дал на други ставки кои се слични на ставката v . Методот кој е искористен од страна на платформата Нетфликс (Netflix) спаѓа во групата на методи за колаборативно филтрирање, дополнително користејќи факторизација на матрици за пресметување на предвидените вредности на оцените.

2. ФОРМУЛАЦИЈА НА ПРОБЛЕМОТ НА ПРЕПОРАЧУВАЊЕ

Проблемот на препорачување на филмови, графички може да се прикаже како што е претставено на Слика 1., каде корисниците се претставени на левата страна, а филмовите на десната. Корисниците се поврзани со филмовите со тенки или со дебели линии. Доколку линијата е тенка тој корисник го оценил филмот со ниска оценка, а доколку лини-

јата е дебела, корисникот го оценил филмот високо. Систем за препорачување има задача да го одреди видот („дебелината“) на оние линии кои не постојат, односно, да се најдат оценките кои дадени корисници би ги дале, за филмови кои тие не ги оцениле.



Слика 1. Графички приказ на проблемот за преферирање на филмови.

За подобро моделирање на проблемот, може да се искористи матрица R чии димензии ќе бидат $n \cdot m$ каде n е бројот на корисници, а m е бројот на филмови.

	Ф1	Ф2	Ф3	Ф4	Ф5
K1	3		1		1
K2	1		4	1	
K3	3	1		3	1
K4		3		4	4

Табела 1. Пример за матрицата R со оценки на четири корисници ($K1, K2, K3, K4$) за пет филма ($\Phi1, \Phi2, \Phi3, \Phi4, \Phi5$).

Секоја од редиците на матрицата R опишува еден корисник, секоја колона – еден филм, а вредноста во ќелијата (i, j) на матрицата е број кој ја претставува оцената на корисникот i за филмот j . Доколку ќелијата (i, j) нема вредност, тоа значи дека корисникот i не го оценил филмот j .

Табела 1 претставува една таква матрица R . Може да се забележи дека, на пример, првиот корисник ($K1$), го оценил петтиот филм ($\Phi5$) со оцена 1, а од друга страна, третиот корисник ($K3$), не го оценил третиот филм ($\Phi3$).

3. МЕТОД НА МАТРИЧНА ФАКТОРИЗАЦИЈА

Претходно споменатиот метод на матрична факторизација е познат како еден од најефикасните методи кога станува збор за прецизноста на предвидувањето на оцените во контекст на системите за препорачување [2, 4]. Овој метод се труди да ја дополни матрицата R со тоа што ќе ги допише оние оценки кои корисниците би ги дале за филмови кои тие не ги оцениле. Дополнително, работи под претпоставка дека матрицата R не е празна, и како негова основа се земаат податоците запишани во R во облик (kor, fil, oce), каде kor е корисник, fil е филм, а oce е оцената која корисникот kor ја дал за филмот fil . За да може да се применуваат некои матрични трансформации или одредени математички операции, потребно е матрицата R да е целосно пополнета со целобројни оценки од 1 до 5. Најчесто местата каде што нема вредност во матрицата R се заменуваат со 0.

Методот на матрична факторизација ја оценува матрицата R на начин што цели да најде две матрици U и V чии димензии се помали од димензиите на матрицата R . Поточно, матрицата U има помалку колони, а матрицата V има помалку редици од матрицата R . Производот на матриците U и V треба да даде што е можно поточни вредности за оние податоци кои се веќе познати во матрицата R . Со множење на матриците U и V , ќе се добијат и вредностите кои недостасуваат во матрицата R , па овие вредности се земаат како предвидени вредности за точните оценки кои корисниците би ги дале за филмовите кои тие не ги оцениле.

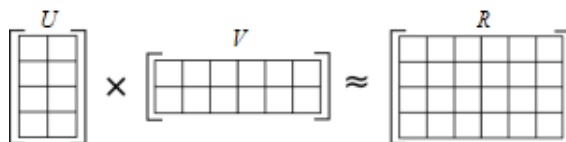
Интуитивно, овој метод претпоставува дека постојат одредени карактеристики кои што ги поседуваат и филмовите и корисниците и дека оцената која даден корисник ја дава за даден филм не е случајна, туку се базира на овие карактеристики уште наречени и латентни карактеристики (*latent features*). На пример, оние корисници кои преферираат комедии, би дале повисока оцена на филмовите од тој жанр, а пониска за филмовите кои се хорор, акција и слично. Според тоа,

латентни карактеристики би биле жанрот на филмот, главниот актер, дали филмот е анимиран и сл. Па така, доколку се опишат корисниците и филмовите со помош на овие латентни карактеристики (кои немаат секогаш одредено значење), тогаш ќе може да се предвиди оцената која корисникот би ја дал за даден филм. Затоа карактеристиките кои соодветствуваат на корисникот треба да се поклопат со оние кои се соодветни за филмот.

Во конкретна примена на методот, бројот на латентни карактеристики не е однапред определен, односно не се знае ниту кои се, а ниту колку вакви карактеристики го опишуваат проблемот. Затоа се нарекуваат латентни, односно скриени. Но, всушност овој метод воопшто не го интересира кое е значењето на карактеристиките, туку само нивниот број. Затоа, во конкретна апликација се експериментира со бројот на латентни карактеристики. Па така, бројот на овие карактеристики се бира така да се добие оптимална брзина на алгоритмот и разумна конвергенција на грешката помеѓу предвидените оценки и оние кои веќе ги знаеме. Тоа би значело дека во општ случај, се пробуваат повеќе различни вредности за бројот на латентни карактеристики и потоа се споредуваат добиените резултати.

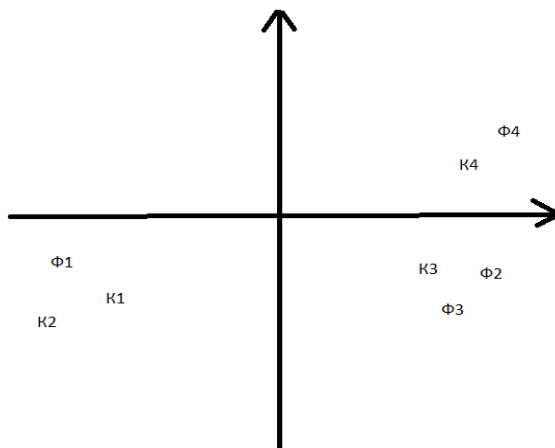
Нека n е бројот на корисници и m е бројот на филмови. Тогаш, матрицата R има димензии $n \cdot m$ и ги содржи сите оценки кои биле дадени од страна на корисниците за одредени филмови, или вредност 0, ако корисникот не дал оценка за соодветниот филм. Да претпоставиме дека се одбрани k латентни карактеристики. На Слика 2. е прикажан методот на факторизација на матрици, чија цел е да се најдат две матрици U (со големина $n \cdot k$) и V (со големина $k \cdot m$) такви што, при нивно множење ќе се добие матрица приближно еднаква на R , односно оценка за R , која ја бележиме со \hat{R} . Притоа, матрицата U претставува врска помеѓу корисниците и латентните карактеристики, каде што редицата i ги опишува важностите на латентните карактеристики за i -тиот корисник (K_i). Од друга страна, V е врска помеѓу латентните карактеристики и филмовите, каде колоната j ги опишува важностите на латентните карактеристики за j -иот филм (Φ_j).

$$R \approx U * V = \hat{R}. \quad (1)$$



Слика 2. Пресметувањето на матрицата \hat{R} е дефинирано со равенството (1).

Главната идеја во методот на матрична факторизација е со помош на матриците U и V да се опишат сите корисници и филмови користејќи ги латентните карактеристики. Односно, секој од корисниците и филмовите да ги запишеме како вектори во k -димензионален простор (чии оски се латентните карактеристики). Во зависност од тоа колку растојанието помеѓу два вектори е помало, толку тие имаат послични латентни карактеристики. Па така, доколку еден корисник kor_i и филм fil_j се на мало растојание во овој k -димензионален простор, тогаш се очекува корисникот kor_i да го оцени филмот fil_j високо.



Слика 3. Корисници и филмови мапирани со помош на 2 латентни карактеристики

Нека една од вредностите кои недостасуваат во матрицата R е на позиција (i, j) . За да се оцени оваа вредност, односно за да се предвиди вредноста на оцената која корисникот u_i би ја дал за филмот v_j , треба да се пресмета скаларниот производ на соодветните вектори од матриците U и V на следниот начин:

$$\hat{r}_{ij} = u_i v_j = \sum_{p=1}^k u_{ip} v_{pj}. \quad (2)$$

Користење на матрична факторизација во системи за препорачување

За да се пресмета резултатот од формулата (2) најпрво треба да се направи оценка и за самите матрици U и V . Еден од начините со кои може да се пристапи на овој проблем е да се иницијализираат двете матрици со случајни вредности, а потоа итеративно да се препресметуваат, така што во секој чекор се повеќе би се приближувале до нивната точна вредност. За таа цел треба да се користи функција на грешка, која дава мерка за тоа колку оценетата матрица \hat{R} отстапува од дадената матрица R . Итеративните промени треба да се прават во насока на минимизирање на функцијата на грешка која е дефинирана со равенството (3).

$$E = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m e_{ij}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (r_{ij} - \hat{r}_{ij})^2, \quad (3)$$

за секои i, j такви што $r_{ij} \neq 0$.

Како функција на грешка најчесто се зема сумата на квадратното отстапување на предвидените од вистинските вредности. Заради тоа овде се зема ова отстапување на оценката од вистинската вредност (реалната оценка на корисникот i за филмот j), за секоја од позициите (i, j) на матрицата R . При пресметување на вредноста на функцијата на грешка, важно е да се напомене дека оние ќелии за кои нема вредности во матрицата R се игнорираат. Ваквиот итеративен процес на ажурирање на вредностите на матриците, следејќи го минимумот на дефинирана функција на грешка, е познат под терминот „gradient descent“ и се користи да се најде локален минимум на дадена функција.

За да се минимизира функцијата на грешка, треба да се знае во која насока и колку да се променат вредностите u_{ip} и v_{pj} (да се зголемат или да се намалат). Затоа, со пресметување на парцијалните изводи на e_{ij}^2 во однос на променливите u_{ip} и v_{pj} (со помош на равенките (4.1) и (4.2)) може да се заклучи колку функцијата на грешка е далеку од минимумот.

$$\frac{d}{du_{ip}} e_{ij}^2 = -2(r_{ij} - \hat{r}_{ij})(v_{pj}) = -2e_{ij}v_{pj} \quad (4.1),$$

$$\frac{d}{dv_{pj}} e_{ij}^2 = -2(r_{ij} - \hat{r}_{ij})(u_{ip}) = -2e_{ij}u_{ip}. \quad (4.2)$$

Откако ќе се пресметаат овие вредности, може да се формулираат правилата за менување на вредностите на u_{ip} и v_{pj} :

$$u'_{ip} = u_{ip} - \alpha \frac{d}{du_{ip}} e_{ij}^2 = u_{ip} + 2\alpha e_{ij} v_{pj}, \quad (4.3)$$

$$v'_{pj} = v_{pj} - \alpha \frac{d}{dv_{pj}} e_{ij}^2 = v_{pj} + 2\alpha e_{ij} u_{ip}. \quad (4.4)$$

Притоа, α претставува константа која ја претставува ратата на учење, односно, стапката со која се приближуваат вредностите u_{ip} и v_{pj} до вредностите за кои функцијата на грешка има минимална вредност. За α вообичаено се одбира ниска вредност, на пример 0.001. Причината за ваквата вредност на α , се должи на идејата да се избегне случај каде што се прескокнува преку минимумот на функцијата и да се заврши осцилаторски околу него. Со други зборови, се одбира ниска вредност за α за да не се направи преголема промена на променливите u_{ip} и v_{pj} , коешто може да резултира со дивергенција на итеративната низа на оценки. Ваквото ажурирање се повторува предодреден број на итерации (на пример 10000) или до момент кога функцијата на грешка достигнала некоја задоволителна вредност (доколку сумата на e_{ij}^2 за секои i, j такви што $r_{ij} \neq 0$ е помала од некоја преодредена вредност, на пример 0,00005). Откако ќе се направи оценка на матриците U и V , вредностите кои недостасуваа во матрицата R , се добиваат со множење на оценетите матрици \hat{U} и \hat{V} .

4. ИЛУСТРАЦИЈА НА МЕТОДОТ

Во овој дел ќе ја илустрираме работата на методот преку примерот на оцени на филмови кој претходно беше даден во Табела 1, којашто ја претставува матрицата R . Претпоставуваме дека корисниците и филмовите имаат две латентни карактеристики, па матрицата R сакаме да ја претставиме како производ на матрица U со димензија 4×2 и матрица V со димензија 2×5 . На Слика 4. се претставени почетните матрици U и V , кои се иницијализирани со случајни вредности. Со нивно множење се добива матрицата \hat{R} .

Користење на матрична факторизација во системи за препорачување

U	
к1	к2
0.2	0.5
0.3	0.4
0.7	0.8
0.4	0.5

V				
к1	3.1	0.3	2.5	0.2
к2	1.5	4.4	0.4	1.1

1.44	1.37	2.26	0.7	0.59
1.32	1.53	1.85	0.91	0.5
2.76	3.37	3.73	2.07	1.02
1.68	1.99	2.32	1.2	0.63

 $\approx R$

Слика 4. Матриците U и V иницијализирани со случајни вредности и матрицата \hat{R} .

Може да се забележи дека предвидената вредност за оцената на првиот корисник за првиот филм изнесува $\hat{r}_{11}=1,44$. Оваа вредност отстапува од вистинската која е 3, па затоа треба да се направи ажурирање на вредностите за латентните карактеристики $k1$ и $k2$ на првиот корисник (u_{11}, u_{12}), како и за вредностите за латентните карактеристики $k1$ и $k2$ на првиот филм (v_{11}, v_{12}). По пресметување на парцијалните изводи по променливите u_{11}, u_{12}, v_{11} и v_{12} користејќи ги формулите (4.1) и (4.2) и ажурирање на истите со примена на формулите (4.3) и (4.4) користејќи $\alpha = 0,01$ (α во овој пример е земено 0,01 само за да бидат значително приметливи промените по една итерација односно за полесна илустрација на едно ажурирање.

При програмското решавање на проблемот, беше користено $\alpha = 0,001$, новите вредности за променливите ќе изнесуваат 0,24, 0,57, 1,2, 2,5 соодветно. Сега, новата предвидена вредност за r_{11} изнесува $\hat{r}_{11}=1,77$, и може да се воочи дека отстапувањето од вистинската вредност е намалено. Следниот чекор е ваквата постапка да се повтори одреден број пати (при решавање на проблемот максималниот број на итерации кој беше одбран изнесуваше 10000) за секоја од ќелиите во матриците U и V , со што би се постигнала посакуваната конвергенција, односно, ќе се определи минимумот на функцијата на грешка.

U	κ1	κ2
	1.00	0.00
0.00	1.00	
1.00	0.00	
1.00	1.00	

V	κ1	κ2
	3.00	1.00
1.00	2.00	4.00
3.00	1.00	1.00
3.00	1.00	1.00
4.00	3.00	5.00

3.00	1.00	1.00	3.00	1.00
1.00	2.00	4.00	1.00	3.00
3.00	1.00	1.00	3.00	1.00
4.00	3.00	5.00	4.00	4.00

\hat{R}

Слика 5. U , V и \hat{R} по 8143 итерации.

По 8143 итерации на препресметување на матрицата \hat{R} , ги добивме оценетите матрици U и V дадени на Слика 5. Бидејќи матрицата од примерот е со помали димензи, функцијата на грешка конвергираше до 0, па нема потреба од понатамошни итерации. На Слика 6 е прикажана споредба помеѓу матриците R и \hat{R} , каде со сино се издвоени вредностите кои недостасуваа во матрицата R . Во општ случај, матрицата R е поголема и функцијата на грешка нема да конвергира до 0, тогаш, со процесот на ажурирање на матриците U и V може да се запре откако ќе поминат претходно дефиниран максимален број на итерации. На Слика 7 е даден псевдо кодот од алгоритмот кој беше искористен при решавањето на проблемот.

3		1		1
1		4	1	
3	1		3	1
	3		4	4

R

3.00	1.00	1.00	3.00	1.00
1.00	2.00	4.00	1.00	3.00
3.00	1.00	1.00	3.00	1.00
4.00	3.00	5.00	4.00	4.00

R^{\wedge}

Слика 6. Споредба помеѓу матриците R и \hat{R} .

Користење на матрична факторизација во системи за препорачување

Data: Matricata R , brojot na latentni karakteristiki K , rata na ucenje $learningRate$, maksimalniot broj na iteracii $maxiter$

Result: Matricite U i V

$iter = 0$;

$converged = false$;

Initialize U, V to $UniformReal(0, 5)$;

while $iter < maxiter$ and not converged **do**

$errorSquared = 0$;

for i in $(0, R.rows)$ **do**

for j in $(0, R.columns)$ **do**

$error_{ij} = (\sum_{p=1}^K U_{ip} * V_{pj} - R_{ij})$; $errorSquared += error_{ij}^2$;

$p = 0$;

while $p < K$ **do**

$U_{ip} = U_{ip} + 2 * learningRate * error_{ij} * V_{pj}$;

$V_{pj} = V_{pj} + 2 * learningRate * error_{ij} * U_{ip}$;

$p += 1$;

end

end

end

if $errorSquared < 0.00001$ **then**

$converged = true$;

end

$iter += 1$;

end

return U, V

Algorithm 1: *MatricnaFaktorizacija*

Слика 7. Псевдо код од алгоритмот.

5. ПРОСТОРНА И ВРЕМЕНСКА СЛОЖЕНОСТ

Просторната сложеност на овој алгоритам е значително помала од чување на матрицата R во меморија и е $O(n \cdot k + m \cdot k)$, каде што n е бројот на корисници, m е бројот на филмови, а k е бројот на латентни карактеристики. Ова се должи на фактот дека не мора да се чува матрицата \hat{R} , туку таа може да се изведе од матриците U и V со наоѓање на нивниот производ. Оттука, потребно е да се чуваат само матриците U и V . Од друга страна, временската сложеност на алгоритмот е $O(n \cdot k^2 \cdot m \cdot t)$, каде што n , k и m се претходно дефинираните вредности, а t е бројот на итерации потребни за конвергенција на матриците U и V , но најмногу максималниот број на дозволени итерации. Оваа сложеност директно следува од начинот на кој се пресметуваат матриците U и V , бидејќи за секоја од ќелиите (кои се $m \cdot n$), потребно е t пати, да се направи предвидување чија комплексност е $O(k)$, каде k е бројот на латентни карактеристики.

6. ЗАКЛУЧОК

Алгоритмот кој користи матрична факторизација има широка примена во системите за препорачување и тоа не само во оние кои се користат за препорачување на филмови или серии, туку и во системи кои препорачуваат музика, онлајн продавници кои препорачуваат свои производи [7], предвидени оценки за студенти пред да направат избор за одредени предмети [3] и слично. Овој метод дава многу добри резултати за оценување на непознатите вредности во така наречените ретки матрици, матрици во кои многу мал број на ќелии се познати, па најчесто се користи во такви ситуации. Во овој труд на кратко беше објаснета интуицијата позади основната верзија на алгоритмот за препорака на филмови на платформата Нетфликс и математичкиот апарат за негова реализација, а начинот на работа беше илустриран преку еден едноставен пример.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] D. Jackson, *The Netflix Prize: How a \$1 Million Contest Changed Binge-Watching Forever*, <https://www.thrillist.com/entertainment/nation/the-netflix-prize>
- [2] P. B. Kantor, L. Rokach, F. Ricci, and B. Shapira, *Recommender Systems Handbook*, Springer, 2011.
- [3] Lj. Rechkoski, V. Ajanovski and M. Mihova, *Evaluation of grade prediction using model-based collaborative filtering methods*. 2018 IEEE Global Engineering Education Conference, 2018.
- [4] P. Symeonidis and A. Zioupos, *Matrix and Tensor Factorization Techniques for Recommender Systems*. Springer, 2016.
- [5] G. Tak'acs, I. Pil'aszy, B. N'emeth, and D. Tikk. *Matrix factorization and neighbor based algorithms for the netflix prize problem*. In Proceedings of the 2008 ACM conference on Recommender systems, pages 267–274. ACM, 2008.

- [6] H.Tan, J.Guo,Y.Li. 2008. *E-learning Recommendation System*, International Conference on Computer Science and Software Engineering, CSSE, vol. 5, pp 430–433.
- [7] M. Zhou, Z. Ding, J. Tang and D.Yin, *Micro Behaviors: A New Perspective in E-commerce Recommender Systems*. In Proceedings of the Eleventh ACM International Conference on Web Search and Data Mining, 2018.

¹ Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје
Факултет за информатички науки и компјутерско инженерство,
ул. „Ругер Бошковиќ“ 16, 1000 Скопје, Р. Северна Македонија
e-mail: jakovvmitrovski@yahoo.com
marija.mihova@finki.ukim.edu.mk

Примен: 30.3.2021

Поправен: 20.5.2021

Одобен: 30.5.2021

Објавен на интернет: 29.6.2021

ОДЛУЧУВАЊЕТО НА МЛАДАТА ПОПУЛАЦИЈА ВО ДОМЕНОТ НА ЛИЧНИТЕ ФИНАНСИИ: ПОВЕЌЕКРИТЕРИУМСКИ ПРИСТАП

*Тамара Кафтанџиева*¹

*Виолета Цветкоска*¹

1. ВОВЕД

Како едно од најбрзо растечките полиња на дисциплината операциони истражувања, повеќекритериумското одлучување се однесува на донесување одлука во услови на голем број критериуми кои можат да бидат меѓусебно конфликтни. Повеќекритериумското одлучување забележува огромна примена во последните неколку децении, во донесувањето одлуки во секојдневниот живот, но и во голем број други области: бизнис, образование, политика, медицина, животна средина, енергетика, спорт и др. Доброто структурирање на комплексните проблеми и земањето предвид повеќе различни критериуми во процесот на одлучување, доведува кон донесување поинформирани и подобри одлуки. Изминатите неколку децении, развојот на постоечките и воведувањето нови модели во рамки на повеќекритериумското одлучување, како и дизајнирањето на софтверски алатки и решенија обезбедија сосема нов пристап кон анализата на одлучувањето, [16]. Еден од најпопуларните методи во рамките на повеќекритериумското одлучување е методот аналитички хиерархиски процес, развиен од Thomas L. Saaty, што овозможува избор на најдобра алтернатива или рангирање на алтернативи кои се евалуираат врз основа на повеќе критериуми. Овој метод се темели на математиката и психологијата, дисциплини што даваат основа за вклучување квалитативни и квантитативни критериуми во анализата [11].

Примената на методот аналитички хиерархиски процес за решавање на комплексни проблеми, дава одлична основа за негово имплементирање во општествените науки, особено во доменот на личните финансии, област која зема сè поголем замав поради засилениот интерес за вметнување на психологијата во економските науки. Психолошките фактори, особено ставот кон ризикот и социо – демографските фактори, го

дефинираат однесувањето и активноста на луѓето на финансиските пазари. Донесувањето на финансиски одлуки е ограничено од практичните можности за остварување на финансиските избори и е под влијание на домашниот финансиски систем и економското окружување. Тој комплексен процес е предмет на истражување на овој труд, за чија подетална елаборација ќе се користи методот аналитички хиерархиски процес. Целите на овој труд се: да се анализира процесот на одлучување во врска со личните финансии на младата популација во Република Северна Македонија, да се објаснат мотивите на младата популација за донесената одлука и условите во кои таа е донесена и да се поедностават сложените ставови и склоности што ги обликуваат финансиските избори со користење на методот аналитички хиерархиски процес.

2. ПОВЕЌЕКРИТЕРИУМСКО ОДЛУЧУВАЊЕ

Во процесот на одлучување, доносителот на одлуката креира поголем број на критериуми, односно атрибути, а конфликтноста помеѓу нив е чест предизвик во решавањето на реалните проблеми. Кај повеќекритериумското одлучување, решението на проблемот е да се проектира најдобрата акција односно алтернатива или истата да се избере од множеството на претходно дефинирани конечни акции. Притоа, за разлика од еднокритериумските проблеми на одлучување, во повеќекритериумското одлучување вообичаено не станува збор за оптимално решение, туку најдобро компромисно решение, [4]. Проблемите во повеќекратното одлучување можат да се класифицираат во следните две групи: повеќекритериумско одлучување (Multiattribute Decision Making – MADM) и повеќекритериумско одлучување (Multiobjective Decision Making – MODM), а разликите од аспект на: критериум (стандард на проценка или правила за тестирање на прифатливоста), цел (одраз на желбата на доносителите на одлуки што укажуваат на насоката во која доносителите на одлуки сакаат да работат), атрибут (карактеристики, квалитети или својства на алтернативите), ограничувања, акции (алтернативи), интеракција со доносителот на одлуката и примена се прикажани на Слика 1 [17]. Кога станува збор за проблем на повеќекритериумско одлучување, доносителот на одлуката избира алтернатива од претходно утврден конечен број на алтернативи (акции), додека пак во повеќекритериумското

одлучување се проектира најдобрата алтернатива при што бројот на алтернативи е бесконечен. Интеракцијата со доносителот на одлуки кај повеќекритериумното одлучување не е изразена, што не е случај кај повеќецелното одлучување. Повеќецелното одлучување е проблем на математичко програмирање во кое се вклучени повеќе цели кои можат да бидат конфликтни меѓу себе, додека пак кај повеќекритериумното одлучување се вклучуваат повеќе атрибути врз основа на кои се врши избор на најдобрата алтернатива. Понатаму, кај повеќекритериумното одлучување целта е имплицитна, а атрибутот експлицитен, додека пак кај повеќецелното одлучување е обратно. Исто така, кај повеќекритериумното одлучување, ограничувањата не се активни (тие се вклучени во атрибутите), додека пак кај повеќецелното одлучување тие се активни.



Слика 1: Разлики помеѓу повеќекритериумно и повеќецелно одлучување (приспособено според [17, стр. 241]).

Mardani et al., [9], имаат направено преглед на литературата за техниките и апликацијата на повеќекритериумското одлучување, анализирајќи 393 трудови објавени во повеќе од 120 меѓународни рецензирани списанија во периодот од 2000 до 2014 година. Според овие автори, постојат голем број методи на повеќекритериумското одлучување (АНР, ELECTRE, TOPSIS, PROMETHEE, Grey theory) кои во периодот што бил предмет на истражување, нашле примена во 15 области, а како најпознат

и најкористен метод е истакнат аналитичкиот хиерархиски процес (АНР) кој бил применет во 128 труда.

Аналитичкиот хиерархиски процес овозможува решавање на комплексни проблеми, обезбедувајќи рамка за структурирање на проблемите, составена од три главни делови (во основната верзија) што градат хиерархиска структура. Хиерархиската структура се користи за да се стекне детално познавање на сложената реалност и комплексните проблеми да се разложат на нивните составни делови. Кај овој модел хиерархијата се состои од цел, алтернативи за постигнување на целта и фактори или критериуми што ги поврзуваат алтернативите и целта. Критериумите можат дополнително да се разложат на поткритериуми, зависно од сложеноста на проблемот, [13]. Овој метод се потпира на проценките на доносителот на одлуката за релативната важност на критериумите и алтернативите, користејќи ја фундаменталната скала на Saaty, [10]. Главната карактеристика на методот е споредба во парови, техника што се користи и за споредување на алтернативите во однос на различните критериуми, давајќи им нумерички вредности и за проценка на тежините на критериумите во однос на целта, [8]. Притоа, збирот на тежинските коефициенти на елементите на секое ниво на хиерархискиот модел треба да изнесува 1. Токму таа техника може да предизвика неконзистентност на вредносните судови затоа што не дозволува поединците да оценуваат еден елемент изолирано, туку во споредба со останатите, без да ги идентификуваат предностите и слабостите, [7].

Притоа, АНР моделот не цели кон донесување оптимална одлука, туку им помага на доносителите на одлуки да пронајдат компромисно решение, односно одлука што најдобро одговара на нивната цел. Сеопфатната и рационална рамка овозможува структурирање на проблемот, хиерархиско претставување и квантифицирање на соодветните елементи и евалуација на алтернативните решенија во функција на целите. Во процесот на евалуација, проценката се дава врз основа на релативното значење и важност на елементите за доносителот на одлуката, што упатува на клучното влијание на човечките перцепции и вредносни судови во процесот. Со методот понатаму, овие проценки се конвертираат во нумерички вредности. За секој елемент од хиерархијата се добива нумеричка тежина или приоритет, дозволувајќи разновидни и често

немерливи елементи да се споредуваат едни со други на рационален начин [12]. АНР методот е идеален за примена во услови кога треба да се донесе одлука на ниво на тим или група, а најголема примена може да најде во следните ситуации: избор на алтернатива од даден сет алтернативи, при постоење повеќе критериуми за одлука; рангирање на алтернативите; приоритизација на алтернативите; алокација на ресурси; бенчмаркинг; менаџмент на квалитет; решавање конфликти [5].

Имајќи ги во предвид горенаведените карактеристики, матрицата на одлучување е резултат на споредба во парови на елементите на дадено хиерархиско ниво и ги има следните својства:

- Матрицата е со димензии $n \times n$, каде што n е бројот на елементите што се споредуваат: $A = [a_{ij}]$, каде што $i, j = 1, 2, \dots, n$; a_{ij} покажува колку повеќе (или помалку) е важен i -тиот елемент од j -тиот;
- Принцип на хомогеност на елементите: $a_{ij} = 1$, за $i = j$; укажува на тоа дека кога еден ист елемент се споредува со сам себе оценката на релативна важност е 1;
- Принцип на реципрочност: $a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}}$, за $i \neq j$; ако i -тиот елемент е x пати поважен од j -тиот елемент, j -тиот елемент е $1/x$ пати поважен од i -тиот елемент.

Притоа, во споредбата на два елемента (пр., поврат и ликвидност на инвестициите) на дадено хиерархиско ниво, елементот во редот i секогаш се споредува со елементот во колоната j , односно, колку повеќе (или помалку) i -тиот елемент е важен од j -тиот. Во матрицата A , a_{ij} ги прикажува споредбите на доносителот на одлука во изразувањето на преференцијата на i -тиот елемент во однос на j -тиот елемент. Споредбите се прават врз основа на фундаменталната скала на Saaty, [12], претставена на Табела 1, која вклучува интензитет на важност од 1 до 9.

Интензитет на важност	Дефиниција	Објаснување
1	Еднакво важно	Двете активности подеднакво придонесуваат за целта
3	Умерено поважно	Искуството и проценката незначајно ја фаворизираат едната активност во однос на другата
5	Строго поважно	Искуството и проценката строго ја фаворизираат едната активност во однос на другата

7	Доста строга или докажана важност	Едната активност строго се фаворизира во однос на другата; нејзината доминација се докажува во пракса
9	Екстремна важност	Доказите врз основа на кои се фаворизира едната активност во однос на другата, се потврдени со најголема уверливост
2, 4, 6, 8	За компромис помеѓу горните вредности	Понекогаш треба да се интерполира проценка на компромис нумерички затоа што не постои добар збор за да се опише.
Реципрочности на горенаведеното	Ако активноста i има една од горните вредности кои не се нула која е доделена кога се споредува со активноста j , тогаш j има реципрочна вредност кога се споредува со i	Споредбата се прави со избор на помал елемент како единица за да се пресмета поголемиот како повеќе од таа единица
Рационални броеви	Односи кои произлегуваат од скалата	Ако конзистентноста треба да биде принудена со добивање на n нумерички вредности за проширување на матрицата
1.1-1.9	За поврзани активности	Кога елементите се блиску и речиси не се разликуваат; умерено е 1.3 и екстремно е 1.9

Табела 1. Фундаментална скала на Saaty за споредување во парови [12, стр. 215].

Методот на Thomas L. Saaty се дефинира како метод на нормализирани аритметички средини. Дадената матрица на споредби во парови се нормализира. Пресметувањето на преференциите помеѓу елементите (сопствениот вектор $w = [w_i]$) се врши со пресметување на аритметичка средина од редовите на нормализираната матрица на споредби во парови. Нормализираниот сопствен вектор се нарекува и вектор на приоритет и ги искажува финалните преференции помеѓу истражуваните елементи. Согласно спецификациите на овој метод и во отсуство на можноста за спроведување прецизни мерења, творецот на методот, Thomas L. Saaty ги открил особините на овој вид матрица на начин што ќе овозможи проверка на конзистентноста на мерењата. При тоа, мерењата на преференцијата на елементите се означени со w_1, w_2, \dots, w_n , при што се споредуваат елементот i со елементот j , така што резултатот е изразен како однос помеѓу w_i и w_j . Оттука, матрицата на споредби во парови (A) којашто се формира во првиот чекор, се изразува во следната

форма:

$$A = \begin{bmatrix} w_1 / w_1 & w_1 / w_2 & \cdots & w_1 / w_n \\ w_2 / w_1 & w_2 / w_2 & \cdots & w_2 / w_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ w_n / w_1 & w_n / w_2 & \cdots & w_n / w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

каде што n е бројот на критериуми, односно алтернативи, а a_{ij} претставува однос на релативна важност. За матрицата на релативна важност (матрицата на споредби во парови) A за која важи релацијата $a_{ij} = a_{ik} a_{kj}$ се вели дека е конзистентна бидејќи ја задоволува следната релација: $Aw = nw$, каде w претставува вектор на приоритети.

Пресметките на векторот на приоритети води кон решавање на равенството: $Aw = \lambda_{\max} w$, каде λ_{\max} е најголемиот сопствен вектор на матрицата A . Во случај кога проценките се перфектно конзистентни, тогаш важи $\lambda_{\max} = n$, а во спротивно, $\lambda_{\max} > n$, со што за мерење на отстапувањето на неконзистентната матрица од конзистентната споредбена матрица се користи: $\lambda_{\max} - n$. Индексот на конзистентност се пресметува со формулата:

$$CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}$$

Додека, показателот на конзистентност се пресметува со формулата:

$$CR = \frac{CI}{RI} = \frac{\lambda_{\max} - n}{RI(n - 1)}, \quad (1)$$

при што RI претставува случаен индекс кој се пресметува од релацијата $RI = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N CI(i)$, и се применува кога $n \geq 3$. Притоа, n е бројот на критериуми односно алтернативи кои се споредуваат во парови.

На пример, ако бројот на критериуми кои се споредуваат во парови е 5, тогаш случајниот индекс ќе биде 1.11. Вредностите на случајниот индекс за различен број на критериуми (алтернативи) се прикажани во Табела 2 [12].

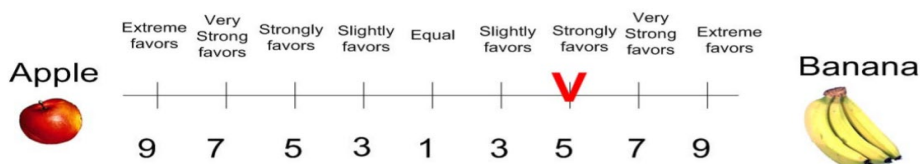
N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Случаен индекс (RI)	0	0	0,52	0,89	1,11	1,25	1,35	1,40	1,45	1,49

Табела 2. Вредности на случаен индекс [12]

Притоа, оценките на доносителот на одлуката се сметаат за прифатливи, односно моделот се смета дека е конзистентен, доколку CR не надминува 10%.

АНР методот може да се применува за донесување најразлични одлуки од секојдневниот живот, со оглед на тоа што секојдневно сме изложени на избор помеѓу повеќе алтернативи (избори) засновани врз повеќе критериуми. Процесот во продолжение е прикажан преку поедноставен пример.

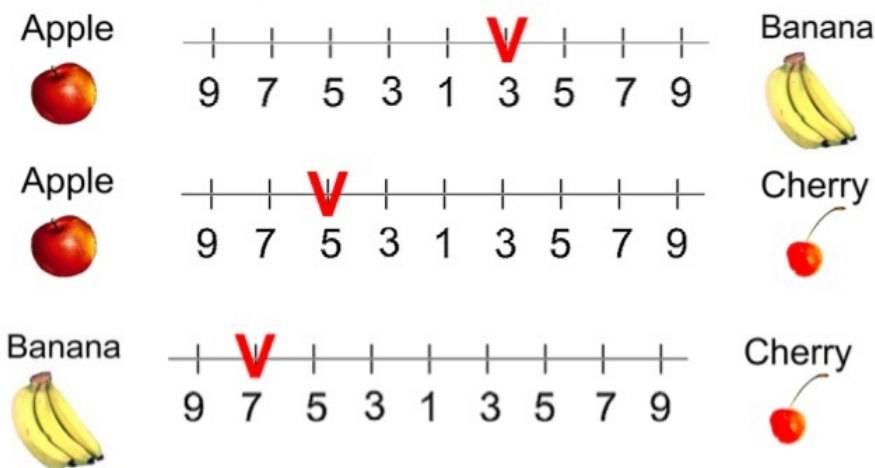
Клучната специфика на АНР моделот е споредбата во парови, при што кога се споредуваат два критериума се поставува прашањето кој критериум има поголема важност, а кога се споредуваат две алтернативи, на која алтернатива ѝ се дава приоритет според преференциите на доносителот на одлука. Користејќи го примерот на Текното [14], претпоставуваме дека треба да направиме избор помеѓу две овошја: јаболко и банана. Согласно тоа, испитаникот треба да одбере кое овошје го преферира и колку повеќе го преферира во споредба со другото (слика 2). Со оглед на тоа што ознаката на сликата е на десната страна и на бројот 5, испитаникот строго повеќе преферира банана, во споредба со јаболко.



Слика 2: Споредба на два елемента согласно преференциите на носителот на одлуката (приспособено според [14])

Во некои случаи, потребно е да се направат повеќе споредби, во зависност од бројот на вклучени елементи. Доколку, на пример, изборот треба да се направи помеѓу јаболко, банана и цреша, бројот на споредби

што треба да се направат е 3 (слика 3). Бројот на опсервации што треба да се направат ја следи формулата: $n(n - 1)/2$. Доколку бројот на опсервации е 3 како на слика 3, може да се формира матрица 3 на 3, согласно добиените вредносни судови од споредбите во парови, со што кај преферираното овошје се внесува цел број (1-9), а кај другото – реципрочната вредност.



Слика 3: Споредба на елементите во парови согласно преференциите на носителот на одлуката (приспособено според [14])

Доколку се извршат горенаведените споредби, ќе се добие следната матрица:

$$\begin{array}{c}
 J \quad B \quad C \\
 A = B \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ C \begin{bmatrix} 1/5 & 1/7 & 1 \end{bmatrix} \\
 \text{Збир} \quad \frac{21}{5} \quad \frac{31}{21} \quad 13
 \end{array}$$

Со оглед на тоа што испитаникот дава умерена важност на бананата во споредба со јаболкото, внесуваме 3 во ред 2, колона 1 во матрицата и 1/3 во ред 1, колона 2 од матрицата. На истиот начин се внесуваат и останатите споредби, при што сите елементи од матрицата се позитивни, односно $a_{ij} > 0$. Понатаму, се сумира секоја колона од матрицата на релативна важност, па секој елемент од матрицата се дели со збирот на

нејзината колона, при што се добива нова матрица во која збирот на секоја колона е 1.

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \frac{5}{21} & \frac{7}{31} & \frac{5}{13} \\ \frac{15}{21} & \frac{21}{31} & \frac{7}{13} \\ \frac{1}{21} & \frac{3}{31} & \frac{1}{13} \end{bmatrix}$$

Нормализираниот сопствен вектор се добива како аритметичка средина на редиците на нормализираната матрица:

$$w = \begin{bmatrix} 0,2828 \\ 0,6434 \\ 0,0738 \end{bmatrix}$$

Нормализираниот сопствен вектор се нарекува и вектор на приоритет и збирот на сите елементи во векторот на приоритет е 1. Векторот на приоритет покажува релативна тежина помеѓу елементите што се споредуваат. Во примерот погоре, векторот на приоритет за јаболкото е 28,28%, за бананата е 64,34%, а за црешата е 7,38%, што значи дека за испитаникот, најпосакувано овошје е бананата, проследено со јаболкото и црешата. Релативната тежина е сооднос на вредностите, така што испитаникот преферира банана 2,27 пати ($64.34 / 28.28$) повеќе од јаболкото и 8,72 пати повеќе од црешата ($64.34 / 7.38$). Сопствениот вектор w , кој одговара на максималната сопствена вредност λ_{max} од матрицата на споредбени парови A е финалниот израз на преференциите помеѓу истражуваните елементи, при што λ_{max} се добива на следниот начин:

$$\lambda_{max} = \frac{21}{5}(0,2828) + \frac{31}{21}(0,6434) + 13(0,0738) = 3,0967$$

Согласно формулата за конзистентност на Thomas L. Saaty, конзистентноста се пресметува на следниот начин:

$$CI = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1} = \frac{3,0967 - 3}{2} = 0,0484$$

$$CR = \frac{CI}{RI} = \frac{0,0484}{0,52} = 9,3\% < 10\%$$

што значи дека доносителот на одлуката бил конзистентен при споредба на елементите во парови.

3. ОДЛУЧУВАЊЕ ВО ДОМЕНОТ НА ЛИЧНИТЕ ФИНАНСИИ

Луѓето со своите финансиски средства се однесуваат нерационално, зависно од сопствените афинитети и дадената ситуација, што налага потреба од вклучување на психолошките елементи во анализата. Согласно тоа, во процесот на донесување одлуки во доменот на личните финансии, луѓето одлучуваат според нивната субјективна, очекувана корисност, којашто некогаш подразбира преземање на помал, а некогаш поголем степен на ризик. Секој инвеститор, воден од индивидуалните желби, мотиви, ставови и цели ќе направи различна алокација на финансиските средства, во зависност од тоа што го смета како оптимален сооднос помеѓу ризикот и приносот. Притоа, ставовите за ризик на поединците се набљудуваат како ендогени човечки карактеристики. Индивидуалната подготвеност за преземање ризици е пресудна за финансиските инвестиции. Секој инвеститор, избира проекти во кои би сакал да вложи и при тоа е свесен за несигурниот финансиски исход. Имено, преземањето финансиски ризик е поврзано со избор на средства со несигурен финансиски исход, т.е. неизвесен принос.

Финансиските одлуки често се донесуваат во услови на ризик, висока комплексност и голема неизвесност, во отсуство на формални правила за одлучување, затоа, многу заклучоци се потпираат на интуиција, [6]. Емпириската литература содржи голем број сознанија конзистентни со присуство на психолошки фактори специфични за личноста што го детерминираат однесувањето на инвеститорите и донесувањето финансиски одлуки, [2]. Индивидуалното преземање ризик е релативно во различни ситуации и се објаснува со мноштво фактори: социјални, културни, демографски, когнитивни и емотивни аспекти што се разликуваат од една до друга земја или регион со оглед на нивните специфичности, [15]. Во управувањето со личните финансии од големо значење е финансиската писменост, која може да го олесни целиот процес, бидејќи доносителот на одлуката ќе биде запознаен со клучните финансиски концепти, карактеристиките на финансиските инструменти и законитостите на финансиските пазари, [3].

Во процесот на одлучување во доменот на личните финансии постојат конфликтни критериуми при избирање на соодветната финансиска опција, особено кога се има предвид односот ризик – принос. Идеалната комбинација би била остварување на високи приноси, истовремено минимизирајќи ги ризиците, иако, во реалноста, средствата што имаат потенцијал да остварат високи приноси, обично носат и високи ризици. При одлучувањето во ситуации од секојдневниот живот, луѓето вообичаено донесуваат одлуки врз основа на интуиција. Од друга страна, за посложени проблеми, особено за оние што вклучуваат финансиска компонента, важно е проблемот да се структурира и да се вклучат повеќе критериуми во анализата.

4. МЕТОДОЛОГИЈА И ПОДАТОЦИ

Постапката за користење на АНР методот може да се сумира во следното [12]:

1. Проблемот се претставува како хиерархија составена од: цел, алтернативи за нејзино остварување и критериуми за проценка на алтернативите;
2. Се поставуваат вредносни судови помеѓу елементите на хиерархијата, преку нивна меѓусебна споредба во парови врз основа на преференциите на одлучувачот;
3. Вредносните судови се синтетизираат во вкупни приоритети за хиерархијата;
4. Се проверува конзистентноста на вредносните судови;
5. Се донесува конечна одлука врз основа на добиените резултати.

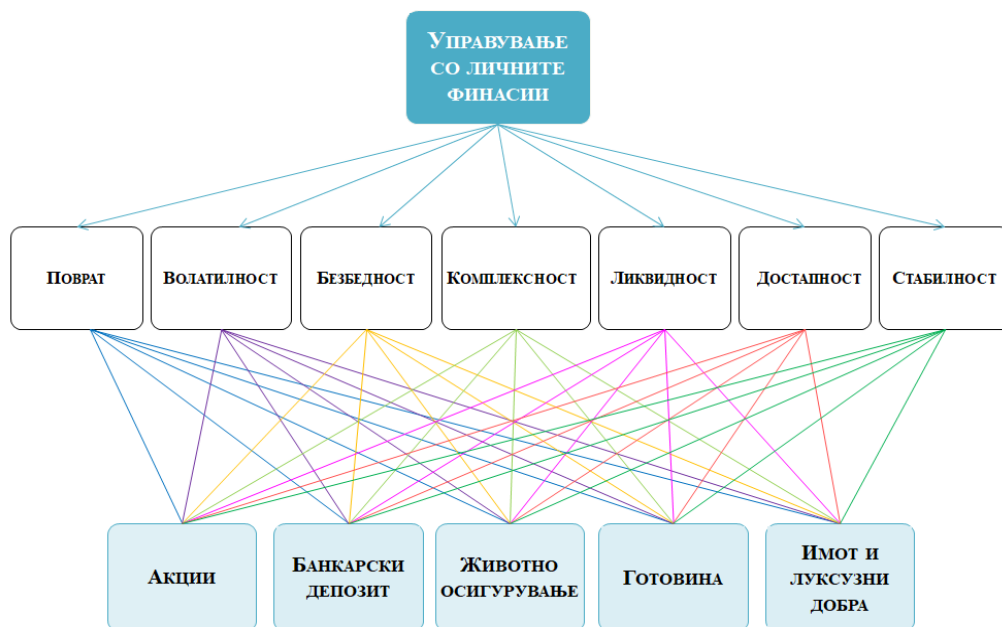
АНР методот беше применет на резултатите добиени од прашалникот спроведен помеѓу 9 испитаници помлади од 35 години (како претставници на младата популација) со цел да се оцени нивната перспектива кон трите клучни активности во доменот на личните финансии: штедење, трошење и инвестирање. Испитаниците беа селектирани врз основа на случаен примерок од младата популација од Скопје, Република Северна Македонија. Истражувањето беше спроведено од февруари до мај 2020 година, со оглед на повторувањето на постапката при процесот на анализа на податоците. Младата популација е предмет на ова истражување

бидејќи со оглед на стареењето на населението и намалените стапки на наталитет, таа популација ќе биде носител на општествените и економски промени, кои ќе имаат важни импликации врз економијата и финансискиот систем, како нејзин интегрален дел. Анкетираните лица на прашалникот ги дава своите одговори согласно нивните преференции, познавања од областа, како и ставот кон ризикот што е клучна алатка за ефикасно донесување одлуки во секоја област од животот. Нивото на ризик што едно лице е подготвено да го преземе има развиено низа можни ставови што можат да се усвојат кон одредена ситуација, што резултира со различни однесувања, перспективи и активности. На испитаниците им беше поставено хипотетичко прашање, да одлучат како ќе постапат со своите пари, доколку наследиле 10000 ЕУР (десет илјади евра). Имајќи предвид дека истражувањето беше спроведено помеѓу младата популација, алтернативите беа избрани врз основа на нивните навики и склоности и карактеристиките на македонскиот финансиски систем: инвестиции во акции, заштеда во форма на банкарски депозит, купување полиса за животно осигурување, трошење или инвестирање во капитални добра (имот или луксузна добра). Критериумите врз основа на кои алтернативите беа евалуирани се: поврат (профитабилност на инвестираните средства), волатилност (можност за брзи, непредвидливи и неповолни промени во вредноста), безбедност (можност за солидни приноси со мал ризик или безризични), комплексност (сложени инвестиции за кои е потребно значително познавање и/или интензивни консултации со стручни лица), ликвидност (брзо и лесно купување или продавање на инвестицијата, без значително влијание на цената), достапност (можност за брзо купување на посакуваната инвестиција) и стабилност (инвестицијата не е подложна на нагли промени на цената и каматните стапки). Со оглед на спецификите на методологијата, прашалникот беше соодветно прилагоден за споредби во парови.

5. АНАЛИЗА НА РЕЗУЛТАТИТЕ

Со цел да се добие општа слика на младата популација, врз основа на оценките на испитаниците вклучени во примерокот, развиеме АНР модел со седум критериуми, каде што главната цел, е да се идентификуваат активностите во врска со управувањето со лични финансии, а

предвид се земени 5 алтернативи (акции, банкарски депозит, животно осигурување, готовина и имот и луксузни добра) Слика 2.



Слика 4: ANP модел за управување со личните финансии, претставен преку 7 критериуми (прв ред) и 5 алтернативи (втор ред).

Земајќи ја предвид хиерархиската структура, следниот чекор во постапката е меѓусебна споредба на критериумите во парови, при што кај критериумот со поголема релативна важност се внесува број (степен на важност) од фундаменталната скала на Saaty, а кај другиот критериум се внесува реципрочната вредност на тој број. За таа цел, испитаниците пополнуваа прашалник соодветно дизајниран за ANP методот, каде користејќи ја фундаменталната скала од 1–9, испитаниците ги правеа соодветните споредби во парови, односно ги оценуваа критериумите во однос на главната цел, и алтернативите во однос на критериумите. Пред пополнувањето на прашалникот, испитаниците беа обучени за моделот, а по пополнување на прашалникот го следевме Azcel and Saaty [1] за да ја пополниме Табела 3. Во таа насока од оценките од секој испитаник за секој критериум беше пресметана геометриска средина која е внесена во Табела 3. За решавање на моделот користен е софтверот SuperDecisions.

	Поврат	Волат.	Безбед.	Комплекс.	Ликв.	Достап.	Стаб.
Поврат	1	2	½	3	½	1/3	1/5
Волатилност	½	1	1/3	1	½	¼	1/6
Безбедност	2	3	1	3	4	4	1
Комплексност	1/3	1	1/3	1	¼	1/3	1/7
Ликвидност	2	2	¼	4	1	1	1/3
Достапност	3	4	¼	3	1	1	½
Стабилност	5	6	1	7	3	2	1

Табела 3. Матрица на споредби на критериумите во парови.

Врз основа на матрицата на споредба во парови на критериумите, се пресметува нормализираната матрица, прикажана на Табела 4, така што елементите во секоја колона се делат со збирот на елементите од соодветната колона. Врз основа на пресметаните вкупни приоритети, евидентно е дека испитаниците најмногу ги вреднуваат критериумите: стабилност (0.2978) па безбедност (0.2642), по кој следат достапност (0.1416), ликвидност (0.1156), поврат (0.0852), волатилност (0.0503) и комплексност (0.0454). Коefициентот на конзистентност, пресметан по формулата (1) изнесува 0.0573 (кој е помал од 0.1), што упатува на конзистентност на споредбите на критериумите во парови.

	Поврат	Волат.	Безбед.	Комплекс.	Ликв.	Достап.	Стаб.	Приоритети
Поврат	0,0723	0,1053	0,1364	0,1364	0,0488	0,0374	0,0598	0,0852
Волатил.	0,0361	0,0526	0,0909	0,0455	0,0488	0,0280	0,0499	0,0503
Безбедност	0,1446	0,1579	0,2727	0,1364	0,3902	0,4486	0,2991	0,2642
Комплекс.	0,0241	0,0526	0,0909	0,0455	0,0244	0,0374	0,0427	0,0454
Ликвидност	0,1446	0,1053	0,0682	0,1818	0,0976	0,1121	0,0997	0,1156
Достапност	0,2169	0,2105	0,0682	0,1364	0,0976	0,1121	0,1496	0,1416
Стабилност	0,3614	0,3158	0,2727	0,3182	0,2927	0,2243	0,2991	0,2978

Табела 4. Нормализирана матрица.

Понатаму, анализата продолжува со споредба на алтернативите во однос на секој од критериумите каде повторно се користи геометриска средина за формирање на матрицата на споредби во парови. Пресметките на соодветните приоритети за алтернативите се извршени со користење на софтверот SuperDecisions. Резултатите се сумирани во Табела 5. Врз основа на добиените вкупни приоритети, прворангирана е алтернативата имот и луксузни добра (0,4069). Следните алтернативи се рангираат соодветно големината на нивниот приоритет: банкарски депозит

(0,1865), готовина (0,1789), животно осигурување (0,1280) и акции (0,0996).

	Акции	Банкарски депозит	Животно осигурување	Готовина	Имот и луксузни добра
Поврат	0,5713	0,1185	0,1850	0,0387	0,0865
Волатилност	0,0495	0,2425	0,0646	0,1106	0,5328
Безбедност	0,0424	0,1705	0,1480	0,0420	0,5970
Комплексност	0,0436	0,3285	0,0436	0,4482	0,1361
Ликвидност	0,0756	0,2262	0,0333	0,5205	0,1444
Достапност	0,0720	0,1726	0,0369	0,4909	0,2275
Стабилност	0,0606	0,1808	0,1971	0,0340	0,5275
Приоритети	0,0996	0,1865	0,1280	0,1789	0,4069
Ранг	5	2	4	3	1

Табела 5: Синтетизирани резултати за алтернативите.

Согласно добиените резултати, под претпоставка дека испитаниците добиле 10000 евра во наследство:

1. За испитаниците најприоритетно во оваа фаза од животот е вложувањето на средствата во имот, бидејќи сегашните нивни плати не се доволни да си купат вредно и трајно средство;
2. Второ по приоритет за младите, согласно традиционалните форми на штедење и потребата од сигурност и стабилност, е вложување на средствата во банкарскиот сектор и покрај ниските каматни стапки на депозитите;
3. Трето по приоритет за испитаниците, е трошење на парите, со цел задоволување на моменталните потреби и обезбедување пристоеен и удобен живот;
4. Четврто по приоритет за младите е инвестирање во животно осигурување, кое се чини дека не е атрактивна опција за инвестирање кај младите, бидејќи периодот до доживување (осигуреникот доживеал истек на договореното траење на осигурувањето) е многу долг, имајќи во предвид дека во тој период тие немаат можност да располагаат со своите средства;
5. Инвестирањето во акции има најмал приоритет за испитаниците. Значењето на пазарот на капитал за македонскиот финансиски систем е мало, пред сè поради скромната понуда на хартии од

Одлучувањето на младата популација во доменот на личните финансии

вредност и малиот обем на берзанско тргување со овие инструменти.

6. ЗАКЛУЧОК

Луѓето донесуваат одлуки од три финансиски аспекти: трошење, штедење и инвестирање. Меѓутоа, во динамичното и турбулентно окружување во кое живееме, одлуките се носат во услови на неизвесност и ризик, затоа и еден од основите постулати во финансиите е постоењето асиметрични информации. Согласно тоа, луѓето ги немаат сите расположливи информации поврзани со одредено финансиско средство во кое сакаат да инвестираат и во такви услови треба да донесат одлука. Во ова истражување, испитаниците припаѓаат на иста категорија – млади од главниот град на Република Северна Македонија, а согласно тоа, не се очекува голема дисперзија во ставовите кон ризикот. Сепак, кога станува збор за донесување одлука за финансирање и/или инвестирање, од исклучителна важност е финансиската писменост и разбирањето на финансиските текови, финансиските инструменти и правилата и условите за тргување на финансиските пазари, како и основните законитости според кои се движат цените и каматните стапки. Сепак, тоа не е гаранција за сигурен иден принос, туку само подобра информираност за основните факти и подобра подготвеност.

Одлучувањето на младите во врска со личните финансии е општествен и економски проблем, што се врзува со нивото на младинска невработеност и подвработеност. Мотивот за штедење и инвестирање е во втор план, наспроти примарната потреба за обезбедување пристоен живот. Недоволното инвестирање во нашата земја е резултат на скромната понуда на атрактивни финансиски инструменти, нискиот животен стандард и вообичаените навики за потрошувачка и штедење. Намалената заработка од депозитите во банките е причина граѓаните да размислуваат за друг тип инвестирање, но, искуството покажува дека мал дел од граѓаните носат таква одлука, бидејќи алтернативните начини на инвестирање ги сметаат за поризични. Покрај постоечките кампањи, неопходно е понатамошно стимулирање на младите да донесуваат подобри и поинформирани финансиски одлуки. Концептот на склоност кон ризик има важни импликации за теоретското моделирање на ставот

кон ризикот и практични сознанија за мотивите што лежат во основата на индивидуалното одлучување.

Во овој труд се истражува процесот на одлучување во врска со личните финансии кај младите. За таа цел изграден е АНР модел со 7 критериуми и 5 алтернативи, со помош на кој 9 млади индивидуи од Скопје донесуваат најприоритетно решение како да управуваат со наследените 10000 евра. Врз основа на добиените резултати, утврдено е дека во оваа фаза од животот, најприоритетно за испитаниците е вложување во имот, потоа вложување во банкарскиот сектор, трето по приоритет е трошењето на средствата заради задоволување на моменталните потреби, додека најмалку атрактивни за вложување за младите се животното осигурување и инвестирањето во акции.

Сепак, постојат и одредени ограничувања од аспект на добиените резултати. Имено, резултатите се добиени врз основа на примерок од 9 испитаници, број што е доволен од аспект на применливост на моделот, со што би се спречила голема неконзистентност во резултатите добиени од многубројните одговори, но, од друга страна, примерокот може да е недоволен да се добијат генерални впечатоци за целокупната млада популација во државата. Во следното истражување планираме да истражиме како пандемијата предизвикана од вирусот Ковид-19 влијаеше на одлуките поврзани со лични финансии на младата популација во регионот.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] J. Aczel, T. L. Saaty, *Procedures for synthesizing ratio judgment*, Journal of Mathematical Psychology, 27 (1983), 93–102.
- [2] J. Y. Campbell, *Household finance*, The Journal of Finance, 61(4) (2006), 1553–1604.
- [3] B. I. Carlin, D. T. Robinson, *Financial education and timely decision support: Lessons from junior achievement*, American Economic Review, 102(3) (2012), 305–308.

- [4] V. Cvetkoska, N. Begicevic-Redzep, *Applying the analytic hierarchy process to rank city-branches*, in Book of Proceedings of the XV International Symposium SYMORG2016, 10-13 June, 2016, Zlatibor, Serbia, University of Belgrade, Faculty of Organizational Sciences, Belgrade (2016), 241–252.
- [5] E. H. Forman, I. G. Saul, *The analytical hierarchy process—an exposition*, Operations Research 49(4) (2001), 469–487.
- [6] D. Kahneman, M. Riepe, *Aspects of investor psychology*, The Journal of Portfolio Management, 24(4) (1998), 52–65.
- [7] P. Konidari, D. Mavrakakis, *A multi-criteria evaluation method for climate change mitigation policy instruments*, Energy Policy, 35(12) (2007), 6235–6257.
- [8] E. Loken, *Use of multi-criteria decision analysis methods for energy planning problems*, Renewable and Sustainable Energy Reviews, 11(7) (2007), 1584–1595.
- [9] A. Mardani, A. Jusoh, K. MD. Nor, Z. Khalifah, N. Zakwan, A. Valipour, *Multiple Criteria Decision-Making Techniques and Their Applications – a Review of the Literature from 2000 to 2014*, Economic Research-Ekonomska Istraživanja, 28(1) (2015), 516–571.
- [10] T. L. Saaty, *Decision making with the analytic hierarchy process*, International Journal of Services Sciences, 1(1) (2008), 83–98.
- [11] T. L. Saaty, *The Analytic Hierarchy Process: Planning, priority setting, resource allocation*, McGraw-Hill New York, NY, 1980.
- [12] T. L. Saaty, *Creative Thinking, Problem Solving & Decision Making*, RWS Publications, Pittsburgh, 2006.
- [13] T. L. Saaty, L. G. Vargas, *Decision Making with the Analytic Network Process: Economic, Political, Social, and Technological Applications with Benefits, Opportunities, Costs, and Risks*, Springer Science+Business Media, LLC, New York, 2006.
- [14] K. Teknomo, *Analytic hierarchy process (AHP) tutorial*, Revoledu, 2006.
- [15] A. Tversky, D. Kahnemann, *The framing of decisions and the psychology of choice*, Science, 211 (4481) (1981), 453–458.

- [16] М. Velasquez, Р. Т. Hester, *Analysis of Multi-Criteria Decision Making Methods*, International Journal of Operations Research, 10 (2) (2013), 56 – 66.
- [17] М. Чупић, М. Сукновић, *Одлучивање*, Факултет организационих наука, Београд, 2008.

¹ Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје
Економски факултет – Скопје,
Гоце Делчев 9В, 1000 Скопје, Р. Северна Македонија
e-mail: tamara.kaftandzieva@gmail.com
e-mail: Violeta.Cvetkoska@eccf.ukim.edu.mk

Примен: 15.3.2021

Поправен: 27.5.2021

Одобен: 2.6.2021

Објавен на интернет: 30.6.2021

ДЕКОМПОЗИЦИЈА НА МАТРИЦА НА СИНГУЛАРНИ ВРЕДНОСТИ, АНАЛИЗА НА НЕЈЗИНАТА ВРЕМЕНСКА И ПРОСТОРНА СЛОЖЕНОСТ И ПРИМЕНА ПРИ КОМПРЕСИЈА НА СЛИКИ

Филип Трајковски¹

1. ВОВЕД

Под поимот декомпозиција на матрица на сингуларни вредности (Singular Value Decomposition, или кратко, SVD) се подразбира факторизација на матрица A од ред $m \times n$ во форма

$$A = USV^T$$

каде U е $m \times m$ ортогонална матрица, V е $n \times n$ ортогонална матрица, а S е $m \times n$ дијагонална матрица чиешто елементи различни од нула лежат на главната дијагонала. Понатаму, ќе претпоставиме дека $m \geq n$ и всушност, при многу важни примени, m е многу поголемо од n .

Декомпозицијата на матрица на сингуларни вредности има прилично долга историја, со тоа што првпат овој метод бил разгледуван од страна на математичарите во доцниот XIX век. Но, важните примени на оваа техника почекале сè додека пресметковната моќ на компјутерите не станала достапна во втората половина на XX век, кога биле развиени различни алгоритми за нејзина ефикасна имплементација, [1].

2. ИЗВЕДУВАЊЕ НА ДЕКОМПОЗИЦИЈАТА НА МАТРИЦА НА СИНГУЛАРНИ ВРЕДНОСТИ

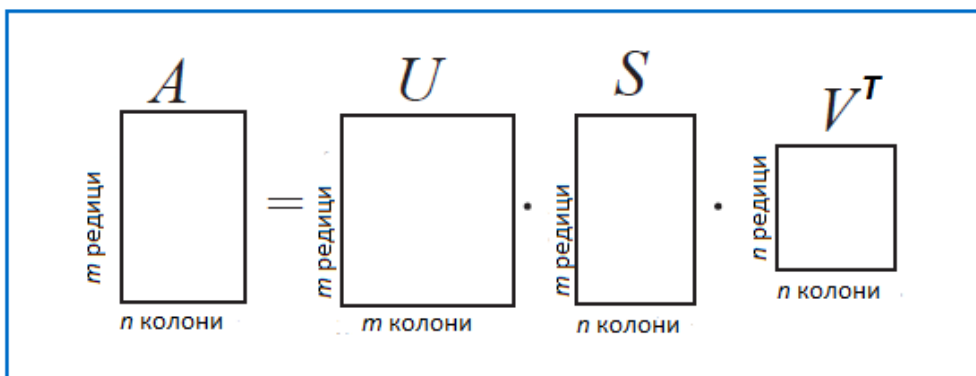
Идејата зад декомпозицијата на матрица на сингуларни вредности лежи во обопштувањето на спектралната декомпозиција или уште позната како факторизација со сопствени вредности којашто се изведува кај квадратните матрици. Затоа, добро би било да се потсетиме дека за дадена квадратна матрица M од ред n над \mathbb{R} , за бројот $\lambda \in \mathbb{R}$ велиме дека е сопствена вредност за M ако и само ако постои ненулти вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, така што $M\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Векторот \mathbf{x} го нарекуваме сопствен вектор на матрицата M соодветен на сопствената вредност λ . Претставувањето

на матрицата M во облик $M = PDP^{-1}$, при што колоните на P се ортонормални сопствени вектори со соодветни сопствени вредности на дијагоналата на матрицата D , се нарекува спектрална декомпозиција на M , [8].

Неквadratна матрица A , поточно матрица со различен број редици и колони, не може да има сопствени вредности бидејќи Ax и x би биле вектори со различни димензии. Меѓутоа, постојат броеви коишто играат улога кај неквadratните матрици слична на онаа којашто ја имаат сопствените вредности кај квадратните матрици. Едно важно својство на SVD за општа матрица од која било димензија е тоа што дозволува генерализација на сопствените вредности и сопствените вектори во ваква ситуација. Целта на овој метод е да се определи факторизација на $m \times n$ матрица A и истиот е даден со следната теорема.

Теорема 1. Нека е дадена произволна матрица A од ред $m \times n$ и нека $m \geq n$. Тогаш постојат ортогонални матрици U и V со димензии $m \times m$ и $n \times n$ соодветно, како и дијагонална матрица S од ред $m \times n$, таква што нејзините елементи различни од нула се $s_i > 0$, за $i = 1, \dots, n$, и за нив важи дека $A = USV^T$, [1].

Притоа, броевите s_1, s_2, \dots, s_n во ваквата декомпозиција се нарекуваат сингуларни вредности, додека пак колоните на матрицата U се викаат леви сингуларни вектори на A , а колоните на матрицата V се десни сингуларни вектори на A . Изгледот на добиените матрици при SVD е прикажан на Слика 1.



Слика 1. Добиени матрици по направената декомпозиција на сингуларни вредности ([1]).

Дополнително, за секоја матрица A , ваквата декомпозиција секогаш постои и сингуларните вредности се еднозначно определени. Во случај кога $m < n$, декомпозицијата се дефинира на матрицата A^T .

Цената којашто треба да ја „платиме“ е тоа што ќе имаме две множества на сингуларни вектори, вектори \mathbf{u} (вектор-колони на U) и вектори \mathbf{v} (вектор-колони на V). Векторите \mathbf{u} се сопствени вектори на AA^T , а векторите \mathbf{v} се сопствени вектори на $A^T A$. Бидејќи и двете матрици се симетрични, нивните сопствени вектори можат да се изберат така што ќе бидат ортонормални. Фактот дека $A(A^T A)$ е еднакво со $(AA^T)A$ води до извонредното својство за овие вектори \mathbf{u} и \mathbf{v} , претставено со равенката (1), што понатаму претставува основа во изведувањето на декомпозицијата на сингуларни вредности, [8].

$$A\mathbf{v}_1 = s_1\mathbf{u}_1 \quad A\mathbf{v}_2 = s_2\mathbf{u}_2 \quad \dots \quad A\mathbf{v}_k = s_k\mathbf{u}_k \quad (1)$$

На крај, ваквото разложување по сингуларни вредности, користејќи ги вектор-колони на U и V може да се претстави и на следниот начин:

$$A = USV^T = \sum_{i=1}^n s_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$$

Во продолжение ќе биде разгледана постапката на формирање на трите матрици U , S и V , како и временската и просторната сложеност на самиот метод.

2.1. ФОРМИРАЊЕ НА МАТРИЦАТА S

Ја конструираме матрицата S преку наоѓање на сопствените вредности на $n \times n$ симетричната матрица $A^T A$. Сите овие сопствени вредности се ненегативни реални броеви и ги подредуваме од најголемиот кон најмалиот и ги означуваме со

$$s_1^2 \geq s_2^2 \geq \dots \geq s_k^2 > s_{k+1} = \dots = s_n = 0.$$

Тоа би значело дека со s_k^2 е означена најмалата сопствена вредност на $A^T A$ различна од нула. Позитивните квадратни корени на сопствени-

те вредности на $A^T A$ ги даваат дијагоналните елементи на S и тие се наречени сингуларни вредности на A . Одовде,

$$S = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & s_n \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

каде што $s_i = 0$, кога $k < i \leq n$.

Сингуларни вредности на $m \times n$ матрица A се позитивните квадратни корени на сопствените вредности на $n \times n$ симетричната матрица $A^T A$ кои се различни од нула. Кога A е симетрична $n \times n$ матрица, сите s_i^2 се сопствени вредности на $A^2 = A^T A$ и овие вредности ги претставуваат квадратите на сопствените вредности на A . Па, затоа, во овој случај, сингуларните вредности се апсолутните вредности на сопствените вредности на A , [1, 3].

2.2. ФОРМИРАЊЕ НА МАТРИЦАТА V

Знаејќи дека $n \times n$ матрицата $A^T A$ е симетрична, таа со сигурност има факторизација $A^T A = V D V^T$, каде што D е дијагонална матрица чиешто дијагонални елементи се сопствените вредности на $A^T A$, а V е ортогонална матрица таква што нејзината i -та колона е сопствениот вектор со l_2 -норма еднаква на 1, кој одговара на сопствената вредност на i -тата дијагонална позиција на D . Специфичната дијагонална матрица зависи од редоследот на сопствените вредности долж дијагоналата. Па, го одбираме D , така што овие вредности се подредени во опаѓачки редослед. Колоните, означени со v_1, v_2, \dots, v_n , од $n \times n$ ортогоналната матрица V се ортонормални вектори кои соодветствуваат на дадените сопствени вредности. Повеќекратните сопствени вредности на $A^T A$ дозволуваат повеќе избори за соодветните сопствени вектори, па така, иако D е еднозначно определена, матрицата V може и да не биде. Но, тоа не е проблем, можеме да ја избереме која било матрица V според условите.

Бидејќи сопствените вредности на $A^T A$ се сите ненегативни, добиваме дека $D = S^2$, [1].

$$A^T A = (USV^T)^T (USV^T) = VS^T U^T USV^T = VS^2 V^T.$$

2.3. ФОРМИРАЊЕ НА МАТРИЦАТА U

Знаеме дека сопствените вредности различни од нула на $A^T A$ и оние на AA^T се еднакви. Дополнително, соодветните сопствени вектори на симетричните матрици $A^T A$ и AA^T формираат комплетни ортонормални подмножества на \mathbb{R}^n и \mathbb{R}^m , соодветно. Па затоа, ортонормалното множество од n сопствени вектори за AA^T ги формира колоните на V , а пак, ортонормалното множество од m сопствени вектори за AA^T ги формира колоните на U на истиот начин.

Иако изведувањето на SVD е јасно теоретски, сепак, во пракса не е паметно да се прави спектрална декомпозиција на матрицата AA^T бидејќи таа може да биде со огромни димензии $m \times m$, со што би зафала голем мемориски простор, а исто така и би не чинело значително време. Затоа и за наоѓање на матрицата U ќе ја искористиме $A^T A$, која што е со помали димензии. Во продолжение е опишан начинот за конструирање на матрицата U со кој се подобрува временската и просторната сложеност за која ќе зборуваме понатаму.

За да ја конструираме $m \times m$ матрицата U , најпрво ги разгледуваме вредностите $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_k > 0$ и соодветните колони во V дадени со векторите $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$. Дефинираме:

$$\mathbf{u}_i = \frac{1}{s_i} A \mathbf{v}_i, \quad \text{за } i = 1, 2, \dots, k.$$

Ги користиме овие вектори како први k колони од вкупно m колони на U . Бидејќи A е $m \times n$ матрица и секој од векторите \mathbf{v}_i е $n \times 1$, а векторите \mathbf{u}_i се $m \times 1$, како што е потребно. Дополнително, за секој $1 \leq i \leq k$ и $1 \leq j \leq k$, од фактот што векторите $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ се сопствени вектори на $A^T A$ кои формираат ортонормално множество следува дека

$$\mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_j = \left(\frac{1}{s_i} \mathbf{A} \mathbf{v}_i \right)^T \frac{1}{s_j} \mathbf{A} \mathbf{v}_j = \frac{1}{s_i s_j} \mathbf{v}_i^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{v}_j = \frac{1}{s_i s_j} \mathbf{v}_i^T s_j^2 \mathbf{v}_j = \frac{s_j}{s_i} \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j = \begin{cases} 0 & \text{ако } i \neq j \\ 1 & \text{ако } i = j \end{cases}$$

Па така, првите k колони на U формираат ортонормално множество вектори во \mathbb{R}^m . Меѓутоа, ни требаат дополнителни $m - k$ колони за U . За ова, прво е потребно да најдеме $m - k$ вектори такви што кога ќе се додадат на векторите од првите k колони ќе се добие линеарно независно множество вектори. Тогаш, ќе можеме да го примениме процесот на Грам-Шмит за да ги добиеме преостанатите колони, [1, 3].

Матрицата U нема да биде еднозначна освен ако $k = m$ и тоа само ако сопствените вредности на $A^T A$ се еднозначни. Оваа неединственост не е никаков проблем, бидејќи нам ни е потребна само една таква матрица U , којашто ќе биде соодветно избрана.

2.4. ДОКАЗ

За да потврдиме дека овој процес навистина ја дава посакуваната факторизација $A = USV^T$, прво ќе се навратиме на фактот дека транспонираната матрица на ортогонална матрица е исто така и инверзна на самата матрица. Затоа, наместо да докажеме дека $A = USV^T$, ние ќе го покажеме еквивалентното тврдење $AV = US$, [1].

Векторите $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ формираат база за \mathbb{R}^n , $\mathbf{A} \mathbf{v}_i = s_i \mathbf{u}_i$ за $i = 1, 2, \dots, k$ и $\mathbf{A} \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ за $i = k + 1, \dots, n$. Само првите k колони на U произведуваат ненулти вредности во производот US , па добиваме

$$\begin{aligned} AV &= A[\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \dots \quad \mathbf{v}_k \quad \mathbf{v}_{k+1} \quad \dots \quad \mathbf{v}_n] \\ &= [A\mathbf{v}_1 \quad A\mathbf{v}_2 \quad \dots \quad A\mathbf{v}_k \quad A\mathbf{v}_{k+1} \quad \dots \quad A\mathbf{v}_n] \\ &= [s_1 \mathbf{u}_1 \quad s_2 \mathbf{u}_2 \quad \dots \quad s_k \mathbf{u}_k \quad \mathbf{0} \quad \dots \quad \mathbf{0}] \\ &= [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \dots \quad \mathbf{u}_k \quad \mathbf{0} \quad \dots \quad \mathbf{0}] \begin{bmatrix} s_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_2 & \dots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & s_k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = US \end{aligned}$$

Со ова се завршува формирањето на SVD на матрицата A .

2.5. КРАТКО РЕЗИМЕ

Како заклучок, за да се определи SVD на $m \times n$ матрицата A , треба:

- Да се пронајдат сопствените вредности

$$s_1^2 \geq s_2^2 \geq \dots \geq s_k^2 > s_{k+1} = \dots = s_n = 0$$

за симетричната матрица $A^T A$ и да се постават позитивните квадратни корени на s_i^2 на позиција s_{ii} во $m \times n$ дијагоналната матрица S .

- Да се најде множество на ортонормални сопствени вектори $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ соодветни на сопствените вредности на $A^T A$ и да се конструира $n \times n$ матрицата V со овие вектори како нејзини колони.

- Да се најде множество на ортонормални сопствени вектори $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ соодветни на сопствените вредности на AA^T и да се конструира $m \times m$ матрицата U со овие вектори како нејзини колони.

3. АНАЛИЗА НА ВРЕМЕНСКАТА И ПРОСТОРНАТА СЛОЖЕНОСТ НА SVD

За анализа на временската сложеност на алгоритмот ќе го користиме бројот на операции со подвижна запирка (FLoating-point OPerations - FLOP) како мерка. Во компјутерските науки, аритметиката со подвижна запирка користи репрезентација на реалните броеви како нивна приближна вредност со што се постигнува баланс помеѓу опсегот и прецизноста. Еден број со подвижна запирка вообичаено се претставува со фиксен број на значајни цифри и потоа е скалиран со користење на експонент во некоја зададена база (основата за скалирање најчесто е 2, 10 или 16). Брзината на операциите со подвижна запирка вообичаено се мери како бројот на вакви извршени операции во секунда, накратко означено како FLOPS (FLOP per second) и е важна карактеристика на компјутерскиот систем, особено кога станува збор за апликации кои вклучуваат интензивни математички пресметки. На крајот, под терминот операција со подвижна запирка ја подразбираме секоја основна математичка операција како собирање, одземање, множење и делење која вклучува броеви претставени со подвижна запирка, [6].

Исто така, овде ќе ја воведеме и нотацијата „големо – O “ која се користи за проценка на бројот на операции потребни за решавање на даден проблем преку некоја дефинирана процедура или алгоритам. Формалната дефиниција гласи:

Дефиниција 1. Нека $f(x)$ и $g(x)$ се функции од множеството природни броеви \mathbb{N} или од множеството реални броеви \mathbb{R} во множеството реални броеви \mathbb{R} . Велиме дека $f(x)$ е $O(g(x))$ ако постојат константи C и k такви што $|f(x)| \leq C|g(x)|$, за секој $x > k$. Константите C и k уште се нарекуваат и *сведоци* на релацијата $f(x)$, [2].

Во компјутерските науки „големо – O “ нотацијата вообичаено се користи за класифицирање на алгоритмите според тоа како нивното време на извршување или побарување во мемориски простор се зголемува како што истовремено расте и големината на влезните податоци. На крај, важно е да се посочи дека оваа нотација се користи за да се претстави асимптотската горна граница на разгледуваната функција.

За матрици $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ и $B \in \mathbb{R}^{n \times l}$, временската сложеност на нивниот производ AB побарува mnl FLOP за производите и $ml(n-1)$ FLOP за зборовите. Оттука, за производот на две матрици потребни ни се $O(mnl + ml(n-1)) = O(2mnl - ml) = O(mnl)$ FLOP. Аналогно на оваа пресметка, ќе бидат изведени временската и просторната сложеност на SVD со претходно опишаниот поефикасен метод, како и споредба со изведувањето на SVD користејќи ја матрицата AA^T .

3.1. ВРЕМЕНСКА СЛОЖЕНОСТ НА SVD

1. За формирањето на матрицата $A^T A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ потребни се $O(mn^2)$ FLOP.

2. За изведувањето на декомпозицијата на $A^T A$ со помош на сопствените вредности (наоѓање на матрицата V) ни требаат $O(n^3)$ FLOP.

3. За пресметувањето на квадратен корен за секоја сопствена вредност на $A^T A$ добиваме $O(n)$ FLOP.

4. За формирањето на векторите $\mathbf{u}_i = \frac{1}{s_i} A\mathbf{v}_i$ потребни се $O(n(mn + m))$ FLOP, бидејќи за пресметување на производот $A\mathbf{v}_i$ имаме $O(mn)$ FLOP, додека, пак, за делењето со s_i се потребни $O(m)$ FLOP. Вкупно имаме n вакви равенки, па затоа имаме $O(n(mn + m))$ FLOP.

Вкупната временска сложеност за изведување на SVD е $O(2mn^2 + n^3 + n + mn)$. Бидејќи при практична примена на овој алгоритам $m > n$, сложеноста во таквиот случај би била $O(mn^2)$, а доколку $m = n$, таа би била $O(m^3) = O(n^3)$, [4].

Доколку во чекорот 4 ја пресметувавме матрицата AA^T би имале сложеност од $O(m^2n)$ со што лесно се воочува бенџитот од претходната постапка, ако се земе предвид дека во пракса најчесто $m > n$.

3.2. ПРОСТОРНА СЛОЖЕНОСТ НА SVD

Можеме да ја пресметаме просторната сложеност на овој алгоритам според бројот на елементите во матриците. За матрица A со димензии $m \times n$, веламе дека нејзината просторна сложеност е $O(mn)$.

1. За формирањето на матрицата $A^T A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ потребен е $O(n^2)$ мемориски простор.

2. За наоѓањето на сопствените вредности и вектори на $A^T A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ни треба $O(n^2 + n)$.

3. За пресметувањето на квадратните корени на секоја сопствена вредност на $A^T A$ потребно е $O(n)$.

Ова значи дека за чување на матрицата V ни е потребен $O(n^2)$ простор, додека за чување на n -те сингуларни вредности (матрицата S) имаме $O(n)$.

4. За формирањето на матрицата U (поточно секој од векторите $\mathbf{u}_i = \frac{1}{s_i} A\mathbf{v}_i$) потребен е мемориски простор од $O(m^2)$ бидејќи секоја вектор-колона \mathbf{u}_i има m елементи и имаме m вакви равенки. Вкупната просторна сложеност за SVD, земајќи предвид дека за чување на матрицата A ни треба $O(mn)$, би била $O(2n^2 + 2n + m^2 + mn)$. Бидејќи

најчесто при практична употреба на овој алгоритам $m \geq n$, просторната сложеност би била $O(m^2)$, [4].

4. ПРИМЕНА НА ДЕКОМПОЗИЦИЈАТА НА СИНГУЛАРНИ ВРЕДНОСТИ

Причината за важноста на оваа декомпозиција на матрица во многу практични примени лежи во тоа што дозволува да се најдат најважните карактеристики на $m \times n$ матрица, користејќи притоа матрици кои најчесто се со значително помали димензии. Бидејќи сингуларните вредности се излистани по дијагоналата на S во опаѓачки редослед, оставањето на само првите k колони и редици од S ја произведува најдобрата возможна апроксимација во овие димензии на матрицата A со матрица со ранг k , означена како A_k . Всушност, важи дека:

$$\min \|A - B\| = \|A - A_k\| = s_{k+1}^2$$

каде што $\text{rang}(B) = k$.

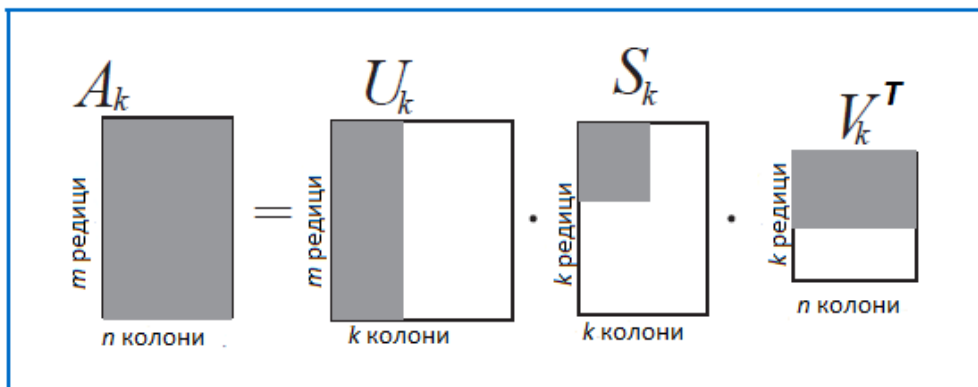
Па така, ја заменуваме матрицата S со $k \times k$ матрицата S_k којашто ги содржи само најзначајните сингуларни вредности. Овие ќе бидат со сигурност тие што се различни од нула, но исто така можеме да ги избришеме и сингуларните вредности коишто се релативно мали (блиски до нула). Понатаму ги определуваме соодветните $m \times k$ и $k \times n$ матрици U_k и V_k^T , во согласност со претходната процедура. Начинот на добивање на ваквата апроксимирана матрица A_k , со помош на првите k сингуларни вредности, формално може да се запише со следната равенка:

$$A_k = U_k S_k V_k^T = \sum_{i=1}^k s_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$$

Овој метод уште се нарекува и truncated (скратена) SVD – (t)SVD и истиот е илустративно покажан на Слика 2.

Потоа, новата матрица $A_k = U_k S_k V_k^T$ е сè уште со димензии $m \times n$ и ќе побарува $O(mn)$ простор за нејзина репрезентација. Но, во факторизираната форма, потребниот простор за чување на податоците е $O(mk)$ за U_k , $O(k)$ за S_k и $O(nk)$ за V_k^T или вкупно $O(k(m+n+1))$. Кога станува збор за матрицата S_k , за неа ги чуваме само k -те сингулар-

ни вредности по дијагоналата, додека останатите нули ги изоставаме бидејќи не ни се потребни и со тоа заштедуваме на меморија при складирање. Ваквите матрици како S_k уште се нарекуваат и ретки (sparse) матрици, па за да се зачува мемориски простор истата се враќа како еднодимензионална низа од сингуларни вредности наместо како комплетна дводимензионална матрица, [1, 8].



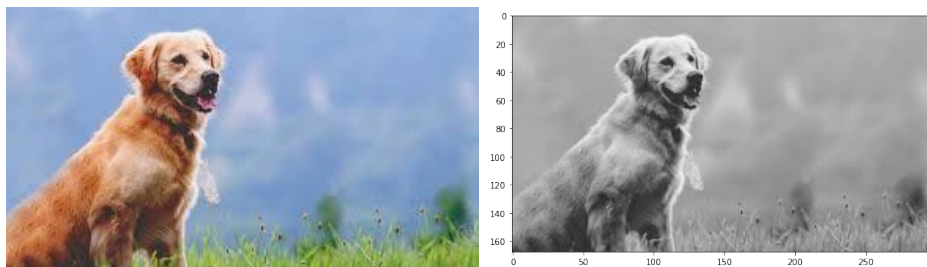
Слика 2. Илустративен приказ на добиените матрици, обоени со сиво, со користење на скратена SVD ([1]).

Да претпоставиме дека, на пример, $m = 2n$ и $k = n/3$. Тогаш, оригиналната матрица A содржи $mn = 2n^2$ податоци. Факторизацијата којашто ја произведува A_k содржи само $mk = 2n^2/3$ податоци за U_k , $n/3$ за S_k и $nk = n^2/3$ за V_k^T што вкупно претставува $(n/3)(3n + 1)$. Ова е редуција од речиси 50% од првобитниот потребен простор за да се смести матрицата A и резултира во одличен начин на компресирање на податоци.

Во продолжение ќе биде прикажан практичен пример на примена на декомпозицијата на сингуларни вредности при компресија на слики користејќи го програмскиот јазик Python и NumPy библиотеката која е фундаментална библиотека за пресметување за научни цели во Python. Покрај другите можности кои ги нуди оваа библиотека, таа исто така содржи имплементации на многу методи од линеарна алгебра, меѓу кои и (t)SVD. Компресијата на слики го користи фактот што само мал дел од сингуларните вредности добиени со SVD се големи, па на тој начин лесно може да се апроксимира оригиналната слика користејќи значително помалку меморија. Исто така, на овој начин може да се добијат

слики коишто човечкото око тешко може да ги разликува од оригиналот, [9, 10].

Во првиот пример прикажан на Слика 3, ќе разгледаме слика која е со димензии 300×168 пиксели. Најпрво ќе ја конвертираме во црно-бела слика со што понатаму може да ја гледаме како матрица чиешто броеви го претставуваат интензитетот на соодветниот пиксел и потоа ќе направиме нејзина декомпозиција на сингуларни вредности.



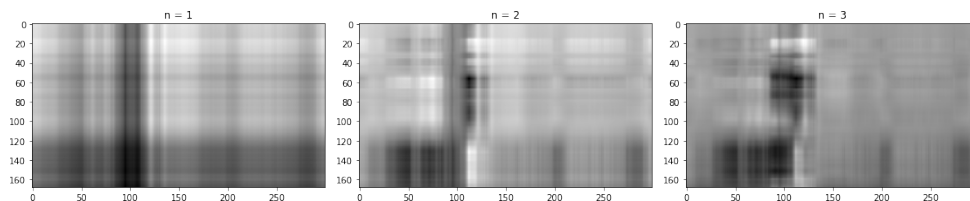
Слика 3. Оригиналната слика (лево) и нејзината црно-бела верзија (десно).

Пресметувањето на апроксимацијата користејќи ја првата колона на U и првата редица на V ја репродуцира најистакнатата карактеристика на сликата. Знаејќи дека првите неколку сингуларни вектори и сингуларни вредности објаснуваат најголем дел од варијансата на податоците во матрицата, со нив успешно би можеле да направиме реконструкција на главните елементи на сликата. Статистичката интерпретација на сингуларните вредности е во облик на тоа колкав дел од податоците во матрицата се објаснети од различните откриени компоненти. Сингуларните вредности произведени со користење на SVD се подредени од најголемата до најмалата и кога ќе се квадрираат се пропорционални на количеството варијанса објаснето од соодветниот сингуларен вектор (димензија во податоците).

Подолу, на Слика 4, се прикажани добиените компресирани слики користејќи ги најголемите една, две и три сингуларни вредности, соодветно. Секако дека само со две или три најзначајни карактеристики не сме ни приближно блиску до нашата оригинална слика.

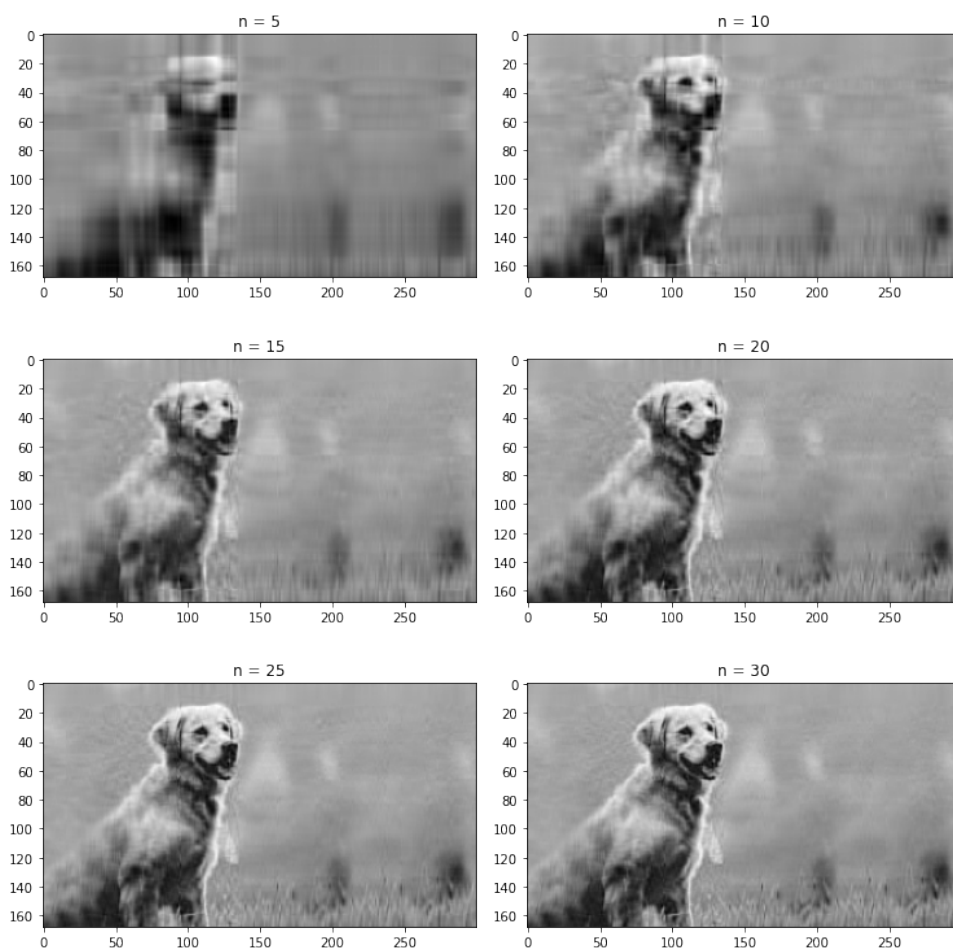
Затоа понатаму ќе ја реконструираме сликата користејќи различен број сингуларни вредности и притоа ќе уочиме како таа сè повеќе наликува на оригиналната со зголемување на бројот на искористени сингуларни вектори како што е прикажано на Слика 5.

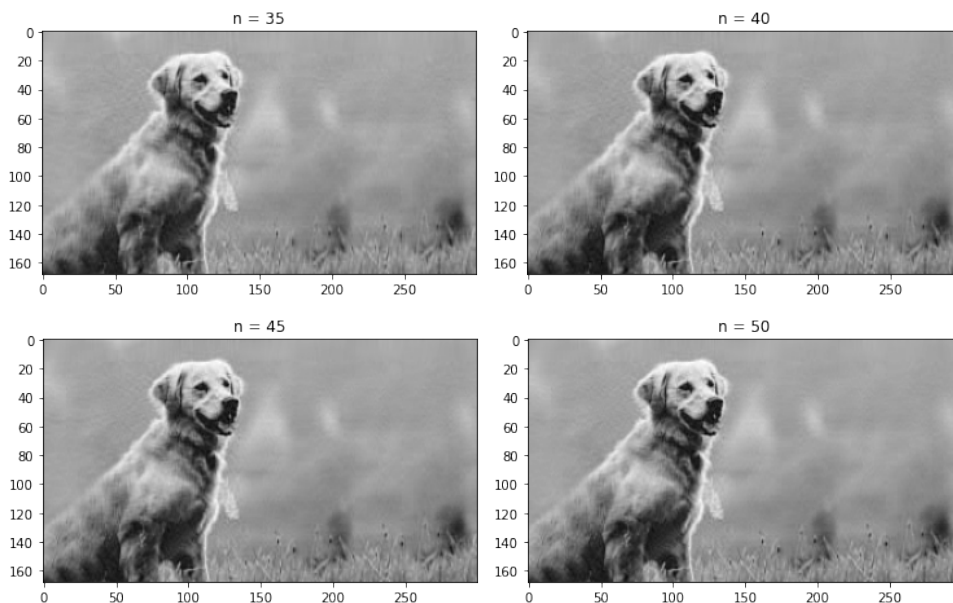
Декомпозиција на матрица на сингуларни вредности...



Слика 4. Компресирани слики со користење на првите една, две и три сингуларни вредности.

Првите 40 сингуларни вредности произведуваат слика којашто е многу слична на оригиналната и понатамошните слики реконструирани со повеќе сингуларни вредности незначително се подобруваат.





Слика 5. Компресирани слики со користење на различен број сингуларни вредности за црно-белата слика.

Доколку сметаме дека сме задоволни со квалитетот на сликата (чии димензии се 300×168 пиксели) добиена со првите 40 сингуларни вредности, тогаш потребниот мемориски простор за нејзино зачувување би бил $\frac{40 \cdot 168 + 40 + 40 \cdot 300}{168 \cdot 300} \approx 37.2\%$ од потребната меморија за оригиналната црно-бела слика што претставува навистина добра заштеда. Во општ случај, ваквиот коефициент на компресија [5, 7] би се пресметал како:

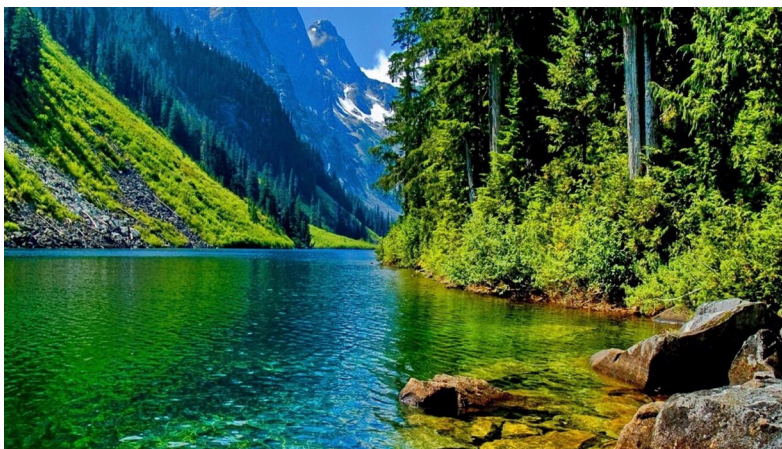
$$\gamma = \frac{N_k}{N} = \frac{k(m+n+1)}{mn} \cdot 100,$$

каде што со N_k е означен потребниот мемориски капацитет за зачувување на апроксимираната слика (односно матрицата A_k), а со N , пак, меморискиот простор кој го зафаќа оригиналната слика (поточно матрицата A).

Ќе разгледаме уште еден пример на компресија на слика дадена на Слика 6, но овој пат со поголеми димензии (3840×2160) и без да ја трансформираме во црно-бела боја, со што ќе направиме споредба на применливоста на SVD во поглед на добиениот квалитет и брзина во различни ситуации.

Декомпозиција на матрица на сингуларни вредности...

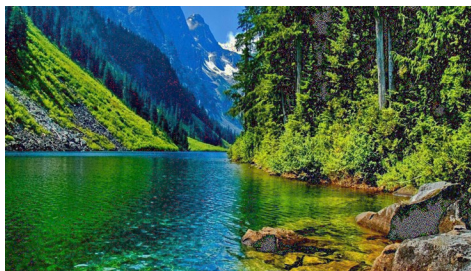
Како и во претходниот пример, откако ќе ја вчитаме сликата, ја трансформираме во NumPy низа (матрица) од пиксели. Потоа ги селектираме црвениот, зелениот и синиот канал на бои од сликата. Откако ќе ги раздвоиме трите бои од RGB просторот во посебни матрици, ќе извршиме компресија со помош на SVD на црвениот, зелениот и синиот канал на бои посебно, [10].



Слика 6. Оригиналната слика.

Откако ќе ги помножиме добиените матрици U , S и V ги добиваме компресираните вредности за секоја боја посебно и, на крај, ги спојуваме трите канали на бои заедно за да ја прикажеме новодобиената слика.

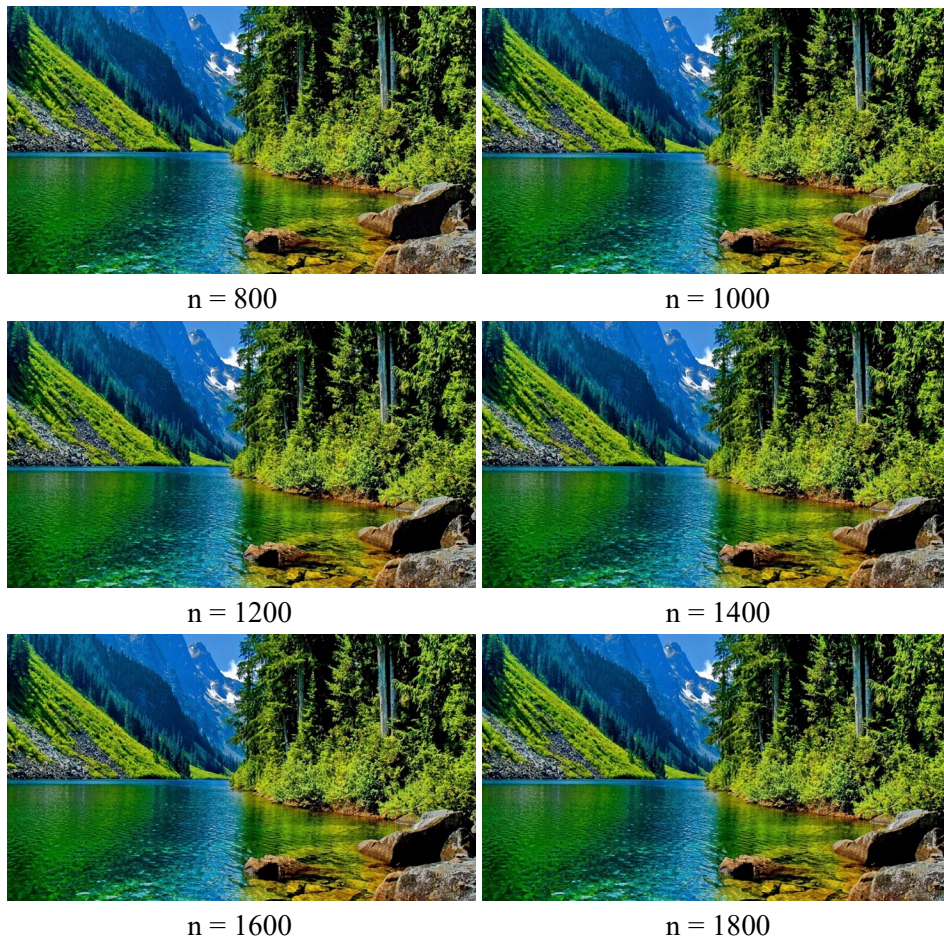
Во случајов, направивме осум компресирани слики, користејќи ги првите 400, 600, 800, 1000, 1200, 1400, 1600 и 1800 сингуларни вредности. На првите слики добиени со користење на првите 400 и 600 сингуларни вектори соодветно се забележува одреден шум на некои делови, но последните слики добиени со поставен лимит од над 1200 вредности се многу слични со оригиналната и се со навистина задоволителен квалитет.



$n = 400$



$n = 600$



Слика 7. Компресирани слики со користење на различен број сингуларни вредности за сликата во боја.

Секако дека во споредба со претходната слика која беше со далеку помали димензии и црно-бела, алгоритмот се извршуваше значително побавно на сликата со поголеми димензии, но крајните резултати покажуваат дека и во двата случаи можеме да извршиме огромно ниво на компресија со помош на (t)SVD и притоа да добиеме одличен квалитет.

5. ЗАКЛУЧОК

Во овој труд е претставена практичната примена на декомпозицијата на сингуларни вредности при компресија на дигитални слики, односно намалување на меморискиот капацитет којшто е потребен за

нивно чување. Секако, треба да сме свесни дека SVD претставува компромис помеѓу посакуваниот степен на компресија кој сакаме да го постигнеме и задржувањето на прифатлив квалитет на сликата, која нема да отстапува многу од оригиналот. Исто така, се соочивме со предизвици при преминот од теорија во пракса, при што ги искористивме знаењата од линеарна алгебра за да ја намалиме временската сложеност на овој алгоритам. На крајот, беше покажано дека со мала модификација на постапката, истиот метод може да се употреби за компресија и на црно-бели и на слики во боја.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] R. L. Burden, J. D. Faires, *Numerical Analysis 9th ed.*, Brooks/Cole, Cengage Learning, 2010.
- [2] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, C. Stein, *Introduction to Algorithms 3rd ed.*, The MIT Press, 2009.
- [3] D. C. Lay, *Linear Algebra and its applications 4th ed.*, Addison-Wesley, 2012.
- [4] X. Li, S. Wang, Y. Cai, *Tutorial: Complexity analysis of Singular Value Decomposition and its variants*, arXiv 2019, arXiv:1906.12085.
- [5] Ф. Николовски, *Компресирање дигитални слики со примена на SVD разложување на матрици*, Научно-популарни трудови од Првиот семинар „Математика и примени“, Математички омнибус 1 (2017), 115 – 123.
- [6] D. A. Patterson, J. L. Hennessy, *Computer Organization and Design, The Hardware/Software Interface 5th ed.*, The Morgan Kaufmann series in computer architecture and design, Elsevier, 2014.
- [7] R. A. Sadek, *SVD Based Image Processing Applications: State of The Art, Contributions and Research Challenges*, (IJACSA) International Journal of Advanced Computer Science and Applications, Vol. 3, No. 7 (2012), 26 – 34.

- [8] G. Strang, *Introduction to Linear Algebra 4th ed.*, Wellesley-Cambridge Press, 2009.
- [9] *Introduction to Singular Value Decomposition using Python/Numpy examples and drawings, Deep Learning Book Series · 2.8 Singular Value Decomposition*, <https://hadrienj.github.io/posts/Deep-Learning-Book-Series-2.8-Singular-Value-Decomposition/>
- [10] *StackAbuse, Dimensionality Reduction in Python with Scikit-Learn*, <https://stackabuse.com/dimensionality-reduction-in-python-with-scikit-learn/>

¹ Универзитет Св. Кирил и Методиј, Скопје
Факултет за информатички науки и компјутерско инженерство,
ул. „Руѓер Бошковиќ“ 16, 1000 Скопје, Р. Северна Македонија
e-mail: filip.trajkovski.1@students.finki.ukim.mk

Примен: 31.3.2021

Поправен: 15.6.2021

Одобен: 1.9.2021

Објавен на интернет: 6.9.2021

ШТО Е ЗАЕДНИЧКО ЗА МЕШАЊЕ ЧАЈ ВО ШОЛЈА, БОЕЊЕ ТЕМИЊА ВО ТРИАГОЛНИК И ФЕР ПОДЕЛБА НА ТРОШОЦИ ЗА СТАНАРИНА?

Ангела Здравковска ¹

1. МЕШАЊЕ ЧАЈ ВО ШОЛЈА. ТЕОРЕМА НА БРАУЕР

Колку добро може да измешаме чај во една шолја? Дали со така наречено идеално мешање само во круг и без протресување на шолјата може да ја измешаме течноста толку добро, што по нејзиното сталожување сите молекули ќе бидат разместени во положба различна од почетната? Одговорот на ова прашање е негативен. Ако честичките чај во чашата ги сметаме за точки, тогаш (со занемарлива грешка) по секое мешање барем една молекула ќе се врати во почетната положба од која што почнала да се движи. Овој заклучок му се припишува на холандскиот математичар Брауер (L. E. J. Brouwer). Тој ја формулирал и докажал познатата *Теорема на Брауер за неподвижна точка*, од којашто директно следува заклучокот.

За една точка $x_0 \in X$ се вели дека е *неподвижна точка* за функција $f : X \rightarrow X$ ако таа се пресликува во самата себе, т.е. $f(x_0) = x_0$.

Иако има повеќе формулации на теоремата, таа често се среќава во следниот облик:

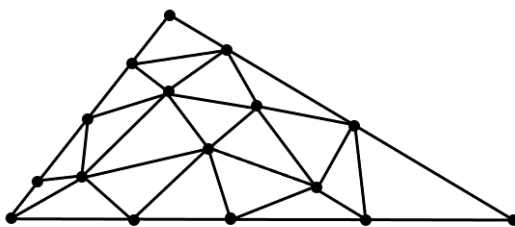
Теорема 1. ([3]). *Секоја непрекината трансформација $f : \mathbb{D}_n \rightarrow \mathbb{D}_n$, каде што $\mathbb{D}_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$, има неподвижна точка $x_0 \in \mathbb{D}_n$.*

Важно е да се напомене дека својството на еден тополошки простор секоја негова непрекината трансформација да има неподвижна точка е тополошки инваријантно својство. Со други зборови, сите тополошки простори хомеоморфни со таквиот простор го имаат истото својство. Од тој аспект, за просторот кој го зафаќа течноста (чајот) во шолјата важи теоремата на Брауер (просторот е хомеоморфен со \mathbb{D}_3). Тоа ни го дава одговорот на почетното прашање, [3].

2. ШПЕРНЕРОВО БОЕЊЕ. ШПЕРНЕРОВА ЛЕМА

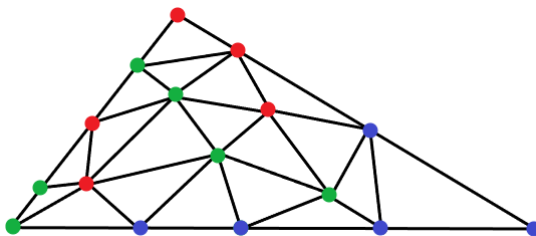
Теоремата на Брауер заради едноставноста, и покрај тополошката природа, наоѓа примена во многу различни, па дури и неочекувани области, како што се економијата и теоријата на игри. Дел од заслугата за тоа имаат разните дополнувања на оваа теорема, како и тврдењата еквивалентни на неа. Интересен еквивалент на теоремата на Брауер од аспект на комбинаториката е Шпернеровата лема. Со оваа лема всушност се дава можеби и наједноставниот доказ на теоремата на Брауер.

Најпознат е дводимензионалниот случај на Шпернеровата лема од којшто следува доказот на теоремата на Брауер за затворената топка \mathbb{D}_2 . Основната идеја во овој случај е таканареченото Шпернерово боење на триаголник. Имено, нека е даден произволен триаголник. Една триангулација на триаголникот е негова поделба на помали триаголници како што е прикажано на Сликата 1.



Слика 1. Триангулација на триаголник.

Нека темињата на големиот триаголник се обоени со една од три различни бои, на пример, со зелена, црвена и сина боја. Нека темињата на помалите триаголници кои лежат на една страна на големиот триаголник се обоени со една од боите на крајните темиња на таа страна, и нека темињата во внатрешноста на триаголникот се произволно обоени со една од трите почетни бои.



Слика 2. Едно Шпернерово боење на триангулацијата од Слика 1.

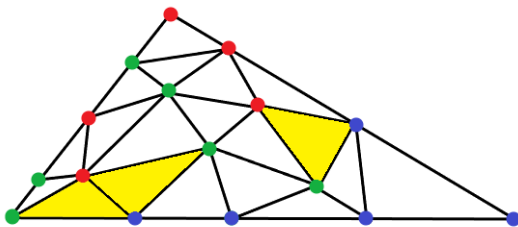
Што е заедничко за мешање чај во шолја, бојење темиња во триаголник и ...

Ваквото бојење на темињата се нарекува Шпернерово бојење. На Слика 2 е прикажано едно Шпернерово бојење на триангулацијата од Слика 1. Ваквото бојење искористиме во следната Лема којашто ја формулирал германскиот математичар Емануел Шпернер (Emanuel Sperner, 1905 – 1980) и затоа го носи името Шпернерова лема.

Лема 1. *Во секоја триангулација на еден триаголник и при секое Шпернерово бојење на триангулацијата, постои барем еден од помалите триаголници чии темиња се обоени со трите различни почетни бои.*

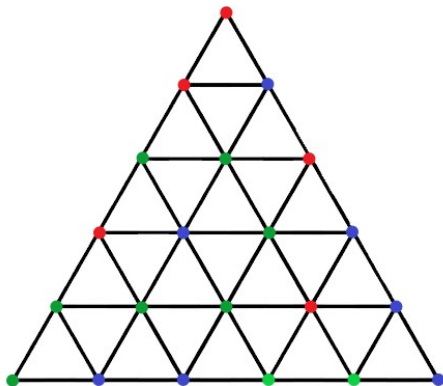
Ваквиот триаголник се вика *комплетно обоен триаголник*.

Во Шпернеровото бојење од Сликата 2 може да се забележат три комплетно обоени триаголници (Слика 3). Всушност, секогаш постои непарен број такви триаголници, но во овој дел е докажан случајот за постоење на барем еден таков триаголник.



Слика 3. Комплетно обоени триаголници.

Доказ. За полесна визуализација, разгледуваме Шпернерово бојење на рамностран триаголник со триангулација на n^2 рамнострани триаголници (како на Сликата 4).



Слика 4. Триангулација на рамностран триаголник на 25 триаголници и едно нејзино Шпернерово бојење.

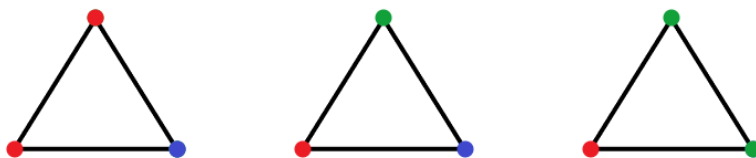
Големиот триаголник може да го разгледуваме како куќа, помалите триаголници како соби во куќата и без губење од општоста, страните на помалите триаголници со една црвена и една зелена крајна точка како врати на собите. Вратите кои се наоѓаат на страната на големиот триаголник со зелено и црвено крајно теме се надворешни врати. Лемата е докажана ако најдеме комплетно обоена соба (комплетно обоен триаголник), [3], [1].

Може да се забележи дека бројот на надворешни врати секогаш е непарен. Навистина, започнувајќи од крајното зелено (односно црвено) теме на страната од големиот триаголник, секоја промена на боја на теме означува една надворешна врата. Последното теме е црвено (односно зелено), што значи дека се случил непарен број промени на бојата на темињата, т.е. има непарен број надворешни врати, [1].



Слика 5. Страна на почетниот триаголник од некое Шпернерово боење.

Уште да забележиме дека една соба може да има 0, 1 или 2 врати, но не е можно да има три врати (слика 6).



Слика 6. Од лево кон десно: соба без врати, соба со 1 врата, соба со 2 врати.

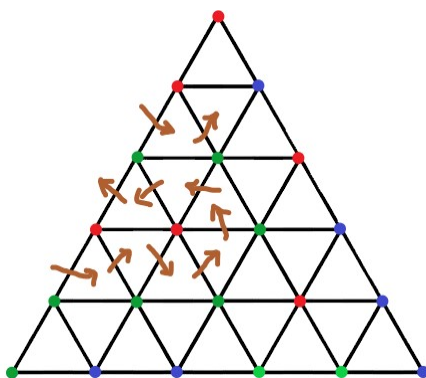
Сега, да направиме прошетка низ куќата, влегувајќи од надворешна врата и движејќи се низ собите, користејќи ја секоја следна врата по еднаш (за да влеземе или излеземе од една соба). Бидејќи не може да влеземе во соба без врати, можни се следниве два случаја:

1. Прошетката се состои само од посета на соби со две врати (и евентуално излегување од куќата низ друга надворешна врата);
2. Во прошетката се посетува соба со една врата (комплетно обоена соба) и во овој случај не можеме да излеземе од куќата.

Секоја прошетка е еднозначно определена, па затоа на секоја прошетка при која има излез од куќата ѝ одговараат точно две надворешни врати. Но, има непарен број надворешни врати па значи, постои прошетка при

Што е заедничко за мешање чај во шолја, боење темиња во триаголник и ...

која нема излез од куќата, т.е. постои комплетно обоена соба. На Сликата 7 е прикажана една примена на оваа постапка за наоѓање на комплетно обоен триаголник. На страната од големиот триаголник со црвено и зелено крајно теме има три (надворешни) врати, од кои две се крајни врати на иста прошетка низ куќата, а третата води до комплетно обоена соба.



Слика 7. Наоѓање на комплетно обоен триаголник со прошетка.

Шпернеровата лема има обопштување во n -димензии за n -симплекси и идејата на доказот е иста како во дводимензионалниот случај. Притоа, 0-симплекс е точка, 1-симплекс е отсечка, 2-симплекс е триаголник итн., n -симплекс е обопштување на тетраедар во n димензии.

3. ФЕР ПОДЕЛБА НА ТРОШОЦИ ЗА СТАНАРИНА СО ШПЕРНЕРОВАТА ЛЕМА

Шпернеровата лема се користи за наоѓање на неподвижни точки или на нули на непрекинатата функција, но и за правење фер поделби каква што е поделбата на трошоци за станарина помеѓу неколку пријатели. Конкретно, проблемот на поделба на трошоци за $(n + 1)$ -пријатели може да се реши со помош на n -димензионалниот случај на Шпернеровата лема.

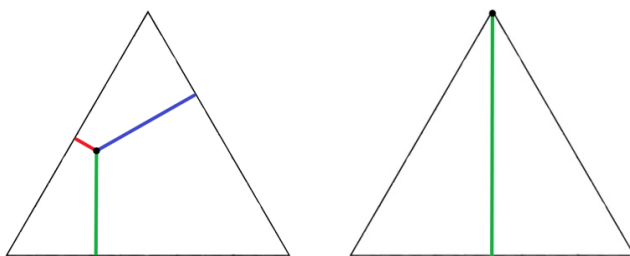
Да претпоставиме дека тројца пријатели: Ангел, Бојан и Виктор се вселуваат заедно во стан со три соби (црвена, зелена и сина соба) и дека месечната станарина која треба да ја плаќаат за станот изнесува 300€. Притоа, собите се разликуваат меѓу себе (на пример: по големина, поглед од собата, достапност на Wi-Fi мрежа итн.). Пријателите сакаат да ги поделат месечните трошоци за секоја соба така што секој да се

согласува со сумата којашто ја плаќа за собата која ја избрал и со сумите кои другите двајца ги плаќаат. Дали е возможно да се направи таква фер поделба ако е познато дека:

- (1) за која било поделба на станарината, секој пријател се согласува да земе некоја од собите,
- (2) доколку му е понудено, секој од пријателите би избрал бесплатна соба,
- (3) ако еден пријател е задоволен со секоја сума од конвергентна низа на понудени суми за собата која ја избрал, тогаш е задоволен и со сумата кон која конвергира таа низа?

При вака поставените услови, одговорот на поставеното прашање е потврден и тоа може да се покаже со помош на Шпернеровата лема за триаголник која ја докажавме, [2]. Всушност, во реалниот свет не би имало потреба од идеална фер поделба, бидејќи пријателите во дадената ситуација често може да се договорат за некои приближни цени до идеалните за собите кои ќе им одговараат на сите. Во продолжение е дадена постапката со која пријателите практично може да пресметаат таква приближна фер поделба, [4].

При оваа постапка од полза е фактот дека збирот на растојанијата на точка во рамностран триаголник до страните на триаголникот е константен. Тој збир е еднаков на висината во рамностраниот триаголник (Слика 8). Овој резултат е познат како *Теорема на Вивијани*.

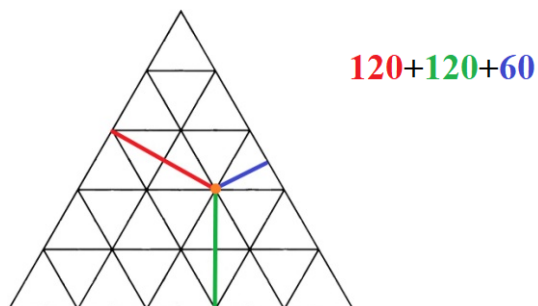


Слика 8. Збирот на црвеното, зеленото и синото растојание е константен.

Нека, сега, земеме еден рамностран триаголник и негова триангулација на 25 рамностран триаголници како на сликата 9... Тогаш висината на големиот триаголник е еднаква на 5 висини од малите триаголници, т.е 5 единици, како на Сликата 9. Трите растојанија од произволно теме од триангулацијата до трите страни на големиот триаголник ги

Што е заедничко за мешање чај во шолја, боење темиња во триаголник и ...

боиме на следниот начин: растојанието кон страната лево од темето на врвот го боиме со црвена боја, растојанието кон страната спроти темето на врвот го боиме со зелена боја и преостанатото растојание го боиме со сина боја. Во избраната точка на Слика 9, црвеното растојание е 2 единици, зеленото е 2 единици и синото е 1 единица, па збирот на растојанијата е 5 единици, па значи важи теоремата на Вивијани. Всушност, таа ќе важи во секое теме од триангулацијата и, уште повеќе, може да се забележи дека изборот на произволно теме од триангулацијата одговара на различно разбивање на бројот 5 како збир на три собирочи коишто се разликуваат меѓу себе (во смисла на тоа дека е важен редоследот на собироците, бидејќи имаме три различни растојанија – црвено, зелено и сино). Темињата од триангулацијата ги исцрпуваат сите такви претставувања на бројот 5, па ако земеме секоја единица да ни одговара на 60€, тогаш во секое теме ќе добиеме разбивање на сумата од 300€ на три собирока во истата смисла. На Сликата 9 имаме: $2 \cdot 60 + 2 \cdot 60 + 1 \cdot 60 = 300$.

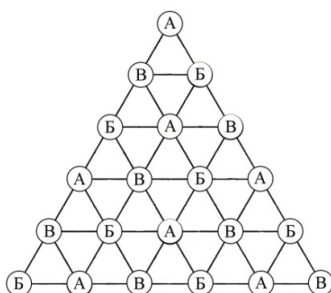


Слика 9. Претставување на бројот 300 како збир на три собироци во едно теме од триангулацијата.

Сега, нека трите растојанија одговараат на црвената, зелената и сината соба, соодветно, според бојата. Ги означуваме темињата на секој триаголник од триангулацијата со А, Б, В соодветно за Ангел, Бојан и Виктор, така што темињата во секој мал триаголник се различно означени, како на Сликата 10.

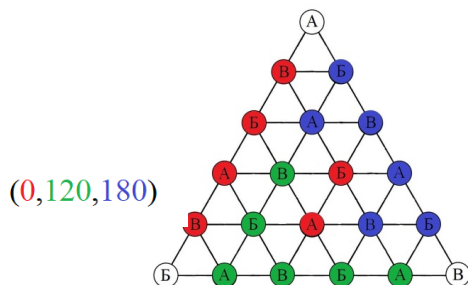
Пријателот чија почетна буква е во некое теме одговара на прашањето: „Која соба би ја одбрал доколку распределбата на трошоците е понуденото разбивање на сумата од 300€ во тоа теме?“ По претпоставка, за секоја поделба на трошоците на пријателот му одговара некоја

соба, па темето го боиме со соодветната боја на собата која тој ја избира.



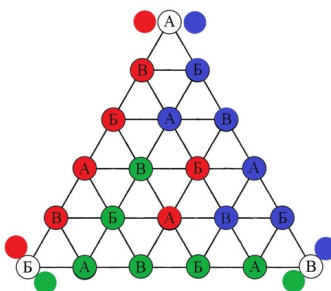
Слика 10. Означување на темињата од триангулацијата.

Да забележиме дека, заради претпоставката (2), за избор за бесплатна соба темињата на секоја страна од големиот триаголник ќе бидат обоени во иста боја (на пример, црвена на страната на која црвената соба е бесплатна).



Слика 11. Едно Шпернерово боење според изборот на собите. Ангел ја избира црвената соба за понудената поделба.

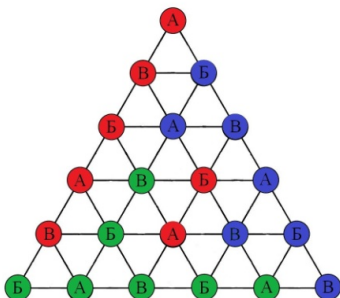
Вака може да се обои секое теме од триангулацијата, освен трите темиња на големиот триаголник во кои секој пријател може да избере една од две бесплатни соби.



Слика 12. Можности за боење на темињата на големиот триаголник од Сликата 11.

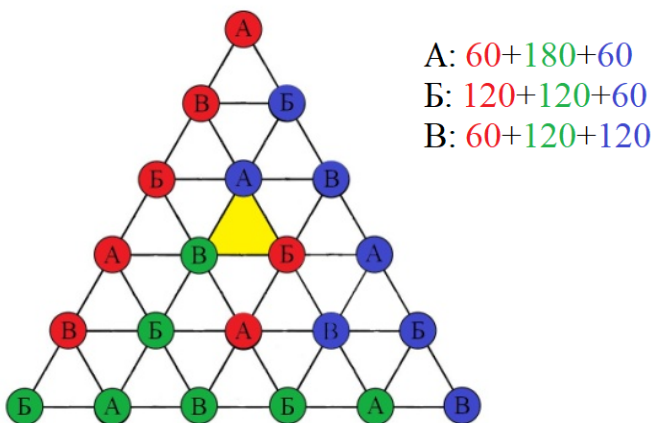
Што е заедничко за мешање чај во шолја, боење темиња во триаголник и ...

За да добиеме Шпернерово боење тројцата пријатели треба да се согласат за различни соби во темињата на големиот триаголник. Да претпоставиме дека тројцата пријатели успеале да направат таков избор и нека изборот е направен како на Сликата 13.



Слика 13. Едно Шпернерово боење на триаголникот од Сликата 11.

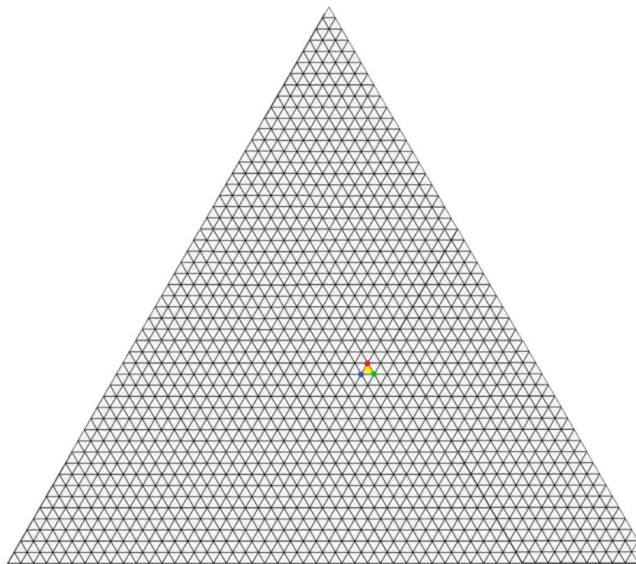
Според Шпернеровата лема, постои комплетно обоен триаголник (Слика 14), а за проблемот кој се разгледува тоа значи дека постои некоја приближна фер поделба со која сите тројца пријатели се согласуваат, [4]. Притоа, тие може да изберат која било од понудените поделби во трите темиња на триаголникот. За Шпернеровото боење дадено на Сликата 13 се добива:



Слика 14. Понудени поделби за Шпернеровото боење на Слика 13.

Оваа приближна фер поделба е релативно лоша бидејќи понудените поделби многу се разликуваат меѓу себе, а тоа се должи на грубата триангулација на триаголникот во која една единица изнесува дури 60€, па затоа и разбивањата на бројот 300 во секое теме се релативно груби.

Значи, за да има помали разлики помеѓу разбивањата е поволно да направиме што е можно пофина триангулација на големиот триаголник, т.е. да го поделиме на што е можно повеќе триаголници. А тоа секогаш може да се направи со помош на претходната триангулација. На пример, нека во претходната триангулација секој мал триаголник го разделиме на 10^2 складни рамнострани триаголници и за единица должина ја земеме висината на тие складни триаголници, т.е. висината на триаголниците со најмала страна во новата триангулација. Тогаш висината на големиот триаголник ќе биде долга 50 единици. Може да земеме една единица да одговара на 6€. На Слика 15 е прикажана поделба која во новата триангулација би одговарала на означениот триаголник, ако тој е комплетно обоен.



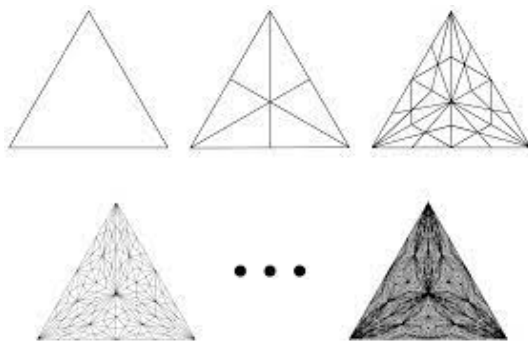
Слика 15. Понудени поделби на трошоците кои одговараат на означената приближна фер поделба (жолт триаголник).

Вака понудените поделби на трошоците се пофер од претходните и поприфатливи во реална ситуација. Пријателите може да направат уште пофина триангулација и да добијат пореална приближна фер поделба. Во практика, проблем при оваа постапка претставува означувањето и боењето на темињата. Во првата триангулација обоевме 25 темиња, додека во втората треба да се обојат дури $25 \cdot 10^2$ што е значително посложено.

Што е заедничко за мешање чај во шолја, боење темиња во триаголник и ...

Постои полесен начин да се обојат темињата – со помош на постапката која ја изложивме во доказот на Шпернеровата лема. Имено, може да се забележи дека во Шпернеровото боење од проблемот за фер поделба има точно една надворешна врата на секоја од страните на големиот триаголник (види Слика 13), па секоја од нив сигурно води до комплетно обоен триаголник. Затоа, место боење на сите триаголници од триангулацијата може прво да се означат и обојат темињата на големиот триаголник и темињата во нивна близина и тргнувајќи од секоја надворешна врата да се означуваат и бојат темињата на триаголниците кои имаат таква врата, [2].

Користејќи го ова, изложениот метод за наоѓање на фер поделба на трошоците лесно се имплементира и со помош на линеарното програмирање. Може да се добие приближна фер поделба во која цените за секоја соба при трите понудени поделби ќе се разликуваат меѓу себе за занемарливо мал дел од вкупната сума, т.е. број помал од некој однапред зададен број $\epsilon > 0$. Притоа, место триангулацијата која ја користевме досега се користи т.н. барицентрична поделба која полесно се обопштува за n -симплекси. На Слика 16 се дадени последователни барицентрични поделби на рамностран триаголник. Да забележиме дека барицентар на една отсечка е нејзината средишна точка, барицентар на триаголник е неговото тежиште, барицентар на тетраедар е пресекот на отсечките кои поврзуваат едно теме со тежиштето на спротивната страна, итн. Уште, од секоја барицентрична поделба се добива пофина триангулација едноставно со правење на барицентрична поделба на најмалите симплекси.



Слика 16. Барицентрични поделби на рамностран триаголник.

За решавање на проблемот кој го разгледавме со помош на линеарно програмирање, може да почнеме со барицентрична поделба на рамностраниот триаголник со темиња $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ и $(0,0,1)$, правејќи пофине поделби сè додека не се добие триангулација во која секој триаголник има страна со должина помала од ε . Притоа, означувањето на темињата се прави на следниот начин. При правење на m -тата барицентрична поделба, сите темиња од $(m-1)$ -вата поделба се означуваат со иста буква (т.е. со истиот пријател), на пример A . Секое ново теме кое се добива при m -тата поделба е барицентар на помал триаголник или пак на некоја страна на помал триаголник од m -тата барицентрична поделба, т.е. барицентар на 2-симплекс или барицентар на 1-симплекс. Барицентрите на 2-симплексите ги означуваме со буква различна од A , на пример B , и барицентрите на 1-симплексите ги означуваме со преостанатата буква, во случајот, B . На овој начин во новата триангулација нема две соседни темиња со иста ознака. Означувањето се обопштува аналогно за n -симплекси.

Сега, на означениот триаголник може да се примени полесниот метод за боење на темиња со надворешни врати за побрзо да се дојде до комплетно обоен триаголник. Понудените поделби се разликуваат за број помал од $\varepsilon > 0$.

Останува уште да се образложи зошто при почетните поставени услови постои идеална фер поделба. Со продолжување на постапката на сè пофине и пофине триангулирање на почетниот триаголник, добиваме низа од триангулации и ако од секоја триангулација избереме еден комплетно обоен триаголник, добиваме низа од комплетно обоени триаголници.

Од компактоста на триаголникот и од тоа што низата е опаѓачка во однос на плоштината на триаголниците следи дека оваа низа содржи конвергентна подниза која конвергира кон точка во големиот триаголник. Со други зборови, предложените фер поделби конвергираат кон фер поделба која е таква што трите понудени поделби се совпаѓаат, па тоа е всушност идеалната поделба за тројцата пријатели. Дека секој пријател може да избере различна соба од идеалната поделба следи од тоа што пријателите избираат бесконечно многу пати од конечен број соби. На пример, во конвергентната подниза Виктор ја избрал зелената

Што е заедничко за мешање чај во шолја, боење темиња во триаголник и ...

соба бесконечно многу пати, т.е. таа му одговара за бесконечно многу суми понудени за зелената соба, па по претпоставка ќе му одговара и за сумата на зелената соба од идеалната поделба на трошоците, [2].

ЗАКЛУЧОК

Во текот на денот извршуваме повеќе едноставни физички дејства како мешање чај или кафе во шолја. Знаењето од физиката му помага на човекот да ги разбере тие дејства од механички и динамички аспект, но како што забележавме, причината за овој „речиси“ феномен (бидејќи не може да се изврши идеално мешање) е всушност едноставен резултат од теориската математика – теоремата на Брауер. Оваа теорема пак, се поврзува со поапстрактни концепти во многу други гранки, како наоѓањето на фиксни точки во економијата, со наоѓањето на Нешов еквилибриум во теоријата на игри, па и со Шпернеровата лема во комбинаториката. А токму комбинаториката е позната како алатка за изнаоѓање интересни алгоритми за решавање на разни проблеми од секојдневниот живот на човекот. Проблемот за фер поделба на станарина е еден таков проблем. Во овој текст ја прикажавме врската меѓу физичкиот свет, некои резултати од теориската математика кои се добиени независно од процесите во тој свет и еден проблем на човекот како дел од општеството кое е негово разумно дело.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] S. Ruangwises, *Sperner's lemma and fair division problems*, MIT Undergraduate Seminar In Discrete Mathematics, 2015, https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-304-undergraduate-seminar-in-discrete-mathematics-spring-2015/projects/MIT18_304S15_project1.pdf
- [2] F. E. Su, *Rental Harmony: Sperner's lemma in fair division problems*, The American Mathematical Monthly, 106 (1999), 930– 942 <https://math.hmc.edu/su/wp-content/uploads/sites/10/2019/06/Rental-harmony.pdf>
- [3] A. Wright, *Sperner's lemma and Brouwer's fixed point theorem*, <http://www-personal.umich.edu/~alexmw/BFPT.pdf>

- [4] Mathologer | *NYT: Sperner's lemma defeats the rental harmony problem*,
10.02.2017,
<https://www.youtube.com/watch?v=7s-YM-kcKME>

¹ Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје
Природно-математички факултет,
ул. Архимедова 3, 1000 Скопје, Р.Северна Македонија
e-mail: azdravkovska8@gmail.com

Примен: 31.3.2021

Поправен: 26.5.2021

Одобен: 7.9.2021

Објавен на интернет: 24.9.2021

ПАНДЕМИСКИ ИГРИ И СТРАТЕГИИ

*Невена Серафимова*¹

Светот е исправен пред предизвиците на првата сериозна пандемија во вистински глобално поврзан свет. Најдени во една состојба на неизвесност, со многу непознати и neodговорени прашања, поединци, групи и глобални субјекти се обидуваат да ги најдат потребните одговори и да ги применат неопходните мерки. Не е тешко да разбереме дека преземените дејства подразбираат комплексна организација и координација на неколку нивоа. Државите, областите и регионите се налик на сврзани садови и ако некој од нив ја загуби контролата над ситуацијата, опасноста ќе се пренесе на други места. Така, богатите и развиени земји сфаќаат дека индивидуалните напори не се доволни и дека една навидум стабилна состојба може бргу да се влоши ако се појават сериозни епидемии во соседството, во неразвиени земји или области, или пак во случај на интензивна сообраќајна размена со ризични подрачја. Ова подразбира дека е потребна соработка (кооперативност) и не само координација за решавање на настанатите проблеми.

Среде една, наизглед хаотична ситуација, и науката се обидува да помогне и да одговори на дел од прашањата. Но тоа не е воопшто лесно, земајќи предвид дека сериозните епидемии се ретки настани и едноставно нема доволно податоци од кои ќе се извлечат статистички значајни заклучоци. Голем број од почетните прогнози околу времетраењето и обемот на епидемијата во кои беа применети некои од познатите епидемиолошки модели, се покажаа како неточни. Оттука, се чини, најдобриот увид во моментот може да биде чисто теоретскиот, дополнително поткрепен со постоечки експериментални резултати.

Согледувајќи ја природата на специфичните епидемски појави со кои сме соочени, ќе дојдеме до заклучокот дека теоријата на игри може да биде ефикасен пристап за нивно моделирање. Таа има веќе богата историја на примена во социјалните науки, каде служи како еден вид рамка за опишување на однесувањето на поединците. Кога станува збор за пренесување на инфективни болести, овде ги среќаваме таканаречени „игри на вакцинирање“ и „епидемските игри на социјално дистанцирање“. За

учесниците во ваквите игри главно се смета дека имаат совршена информација за болеста и за ефикасноста на превентивните мерки. Потоа, се претпоставува дека тие ги користат овие информации за максимизирање на сопствената добивка, споредувајќи ги притоа очекуваните трошоци предизвикани од инфекцијата со очекуваните трошоци од преземените превентивни акции.

Постоечката литература која се однесува на употребата на теоријата на игри за моделирање на однесувањето во време на епидемија, може да се класифицира според неколку критериуми: според моделот на популација кој може да биде класичен (во облик на множество) или поврзан (мрежен), според зачестеноста на играта (не се повторува или се повторува) и на крајот, според начинот на усвојување на стратегиите (самостојно учење или имитација). Изборот на модел може да зависи од многу фактори како што се: големината на популацијата, интензитетот на внатрешните интеракции, нивото на постигнатиот имунитетот, достапните мерки за надминување. Додека во раните истражувања повеќе е застапен класичниот модел на индивидуално учење во игри, во последниве години се забележува значителен пораст на мрежните модели на игри на имитација, [3]. Моделите на игри за кои подолу ќе зборуваме спаѓаат во категоријата на класични популациски модели кај кои, со оглед на тенденцијата за повторување, може дополнително да биде вграден и елемент на учење.

1. РЕАФИРМИРАЊЕ НА СОЦИЈАЛНИТЕ ДИЛЕМИ

На 6 септември 2018 година, пилотот на авионот кој летал од Дубаи до Њу Јорк, со вкупно 520 патници, до контролата на летање на аеродромот Кенеди во Њу Јорк пријавил дека повеќе лица се жалат на симптоми кои се поврзани со грип: силна кашлица, главоболка, болка во грлото, грозница. Веднаш по слетувањето авионот е ставен во карантин и е извршена контрола на околу 100 патници, од кои десетмина, меѓу кои седум членови на посадата, се хоспитализирани. Причината за ова е јасна: меѓународниот превоз може да доведе до брзо ширење на опасни заразни болести во разни краеве на светот. Но сепак, приземјувањето на авионите, или дури и целосно ограничување на движењето не секогаш е најдобрата стратегија во вакви ситуации, а причината за тоа не се само економските

импликации кои со тоа ќе бидат предизикани. Кога е во прашање здравјето, она што е најдобро за некој поединец може да не биде најдобро за широката популација, и обратно. Ако при одлучувањето не бидат опфатени сите аспекти, одлуките кои ги носат авторитетите во време на епидемија (или пандемија) може не само да не ги дадат очекуваните резултати, туку и да бидат извор на нови проблеми.

Решавањето вакви и слични дилеми, во кои крајниот исход зависи од тоа како сите припадници на некоја група или популација се однесуваат, може да биде помогнато од теоријата на игри. Имено, проблемот настанува поради тоа што одделен играч не може да ја утврди својата оптимална стратегија, без да знае како ќе се однесуваат останатите во групата. Типичниот одговор кој го дава теоријата на игри е познат како *Нешов еквилибриум* и претставува состојба во која секој го остварува својот оптимум, сè додека ниту еден од другите учесници во играта не отстапува од својата стратегија. Речиси и да не постои интеракција која не може да биде опишана како теоретска игра: таков е случајот и со интеракцијата меѓу инфективните агенси и популациите.

Појавата и ширењето на SARS-CoV-2 предизвика, како никогаш претходно во историјата, глобални политички акции на ограничување на движењето, наметнување на карантин, самоизолација, социјална дистанца и мерки за самозаштита. И покрај тоа што не е едноставно да се направи емпириска оценка на учинокот на овие мерки, извесно е дека тој учинок е директно поврзан со социо-економската цена на преземените акции, по вид и по обем. Ова ја отвора вратата за моделирање на дејството и придружните ефекти од ширењето на оваа, или некоја друга пандемија, во облик на теоретска игра. Конкретно, игрите кои најдобро ги отсликуваат социјалните интеракции се најчесто таканаречените *социјални дилеми*.

Социјалната дилема произлегува од конфликтот меѓу личната и колективната рационалност, при што групата има заедничка цел (исход) а секој нејзин припадник треба да одлучи дали да го даде својот придонес. Во реалноста, социјалните дилеми се екстремно вообичаени ситуации со коишто постојано се среќаваме. Како модел на интеракција, може да се препознаат според следниве карактеристики:

- Иако за сите е подобро ако сите соработуваат (придонесуваат), за секој поединец е секогаш подобро да не соработува;
- Личниот придонес нема да влијае на конечниот исход.

Основниот проблем кај социјалните дилеми е во тоа што тензијата која се јавува помеѓу она што е краткорочно добро за поединецот (еднократна игра) и долгорочните интереси на групата (повторена игра), може да дојде до израз дури во подоцнежните фази, кога негативното влијание веќе зело замав. Ваквата тензија ја потхранува неповолната позиција на личниот влог, во однос на добивките за групата. Како илустрација, да претпоставиме дека некој одлучил да вложи одредена сума за исплата на националниот долг. Јасно, таа сума може да значи многу за поединецот, но да е незначителна за државата. Значи, не се работи само за некоја претпоставена себичност, туку за фактот што останатите припадници на заедницата добиваат малку од некој поединечен придонес, во споредба со истовремената загуба која ќе ја претрпи оној кој придонесува. Во вакви околности, индивидуалната одлука за *бесплатно возење* т.е. непридонесување но истовремено користење на добивките од она што го прават останатите, се чини рационална.

Од аспект на теоријата на игри, социјалната дилема подразбира општествен модел на интеракција во кој некооперативната добивка на поединецот ја надминува кооперативната добивка во заедницата. Но истовремено, ако поголемиот дел од заедницата не соработува, сите завршуваат со послаб резултат. Предизвикот кој произлегува од различните ситуации кои се познати како социјални дилеми, најчесто е искажан преку некоја од игрите со позитивна сума. Овие игри се специфични по тоа што имаат *вин-вин* исход, каде што ниту една од страните не добива повеќе на сметка на другата. Оттука, рационалниот играч може да игра во своја корист, но и во корист на противникот, избирајќи опција од која и другиот играч ќе профитира. Решенијата со позитивна сума се поверојатни во ситуации кои се под влијание на повеќе различни интереси, [8].

Во стратегиската интеракција со SARS-CoV-2 (или кој било друг пренослив агенс чие што ширење треба да се ограничи), играчи се вирусот од една и популациите од друга страна. Креаторите на политики ги утврдуваат правилата на игра со кои треба да се регулира интензитетот на интеракција. Добивката за вирусот е јасна: тој се обидува да зарази

колку што е можно повеќе единки. Добивката за популациите е посложена, со оглед на тоа дека содржи и здравствени и економски компоненти. Во рамки на комплексните општествени односи, индивидуалното однесување е раководено од личните преференции, кои пак зависат од различни типови на ризици. Иако севкупната реална слика е навистина тешко да се опише во рамки на теоријата, накратко, ќе сметаме дека ширењето на епидемиите е поврзано со индивидуалните економски трошоци предизвикани од мерките на јавното здравје, во комбинација со реалниот ризик од инфекција.

Со оглед на тоа дека доаѓа до повеќекратни интеракции во одреден временски интервал, играта меѓу еден вирус и популацијата може да ја сметаме за *повторена*, т.е. игра која се случува повеќе пати при што правилата, играчите, стратегиите и добивките остануваат исти. Во вакви случаи, се создаваат нови можности за интеракција меѓу учесниците и за прилагодување на нивниот избор на стратегии, бидејќи тие имаат прилика да учат од она што претходно се случувало но и да испраќаат одредени пораки преку изборот на стратегии. Она што притоа е од интерес е состојбата на еквилибриум (т.е. теоретски поткрепениот рационален исход), како и добивките на играчите во една таква ситуација. Што се однесува до стратегиите што се на располагање, тие може да се опишат преку два типа на активности: мерки за контрола на состојбата и мерки за надминување.

Стратегии за контрола. Ограничувањето на меѓусебните директни контакти може да ја намали брзината на ширење на одреден вирус во дадена популација. Дел од акциите кои притоа може се преземат, како што се личните заштитни мерки (покривање на устата и носот, личната хигиена и здрави навики, одржување на минимално меѓусебно растојание) имаат мал економски трошок за поединецот и можат лесно да се применат. Но, тоа не е случај со друг тип на акции кои по правило се институционално наметнати. Строгите наредби за останување во домовите и затворање на одредени бизниси предизвикуваат сериозни економски штети, пораст на невработеноста и намалени примања. Во вакви околности, недостатокот на социјална поддршка од страна на државата со која би се ублажил економскиот удар, може да предизвика натамошно ширење на епидемијата во загрозените групи. Во општества во кои

пристапот до социјална помош е ограничен, граѓаните се принудени да балансираат помеѓу наредбите за останување дома и финансиската штета која поради тоа ја претрпуваат, што директно влијае на ефективноста на оваа мерка.

Врската помеѓу мерката на ограничено движење и нејзината социјална поткрепа, изразена преку веројатноста за согласност со целосното затворање, е еден од повеќето елементи кои се користат во моделирањето на ефектите од политиките поврзани со пандемијата предизвикана од SARS-CoV-2. Така, на пример, ефектот од целосно затворање може да се моделира со фактор на несогласување, кој ја рефлектира замореноста од долготрајно останување дома и тенденцијата за излегување, со што се зголемува ширењето на инфекцијата. Но, ефектот на затворање може да произлезе и од лични одлуки за самоизолација. Притоа, врз личните одлуки може да влијае она што се случува во остатокот од популацијата, па оттука имитационата динамика од еволутивната теорија на игри може да послужи како соодветен модел за опишување на процесот на одлучување т.е. изборот на стратегии.

Стратегии за надминување. Надминувањето на опасноста од некој инфективен агенс може да се постигне преку негово исчезнување или (поверојатно), преку обезбедување на ефикасен одговор на неговите напади. Јасно, дел од мерките за надминување ги сочинуваат достапните третмани за оние кои ќе развијат симптоми на болест. Сепак, за нови инфекции ефикасните третмани може да се непознати, или пак недостапни за пошироката популација како резултат на ограниченост на количините или на (не)подготвеноста на државите навремено да ги обезбедат. Оттука, земајќи предвид дека спонтаното исчезнување на вирусите е временски непредвидливо, како и некои други докрај неразјаснети особености поврзани со нивната природа и однесување, еден од начините за брзо постигнување на колективен имунитет на популациите (т.н. имунитет на стадо) е достапноста на ефикасна вакцина.

Дилемата околу вакцините произлегува од конфликтот кој постои помеѓу здравствениот бенефит (заштита од болест) и негативните импликации (несакани ефекти, финансиски трошок, страв од инјекции). Значи, секој што размислува дали да се вакцинира или не, треба да ги соочи и измери фактите на двете страни и да донесе некаква одлука.

Грипот, на пример, може да биде смртоносен, така што финансискиот издатоk поврзан со вакцината е мал во споредба со цената на животот и ова најчесто нема да биде пречка во одлуката кај оние кои што сметаат дека се загроени. Но од друга страна, ако речиси сите останати во популацијата се вакцинираат, шансите дека поединецот и неговото семејство ќе дојдат во контакт со инфекцијата се речиси нула и со тоа, поттикот за вакцинирање (и изложување на трошоци од различна природа) исчезнува. Во таква ситуација, невакцинирањето е подобра одлука. Проблемот со ова размислување е во тоа што, ако секој размислува на ваков начин, тогаш никој нема да се заштити. Ова може да доведе до избувнување на заразата и семејството од претходно, но и целата популација, повторно ќе бидат изложени на ризик. Теоријата на игри објаснува дека во вакви ситуации, најдобрата стратегија на поединецот може да биде во конфликт со оптималната стратегија на целата група. Како последица, ширењето на инфекцијата понатаму ќе биде определено од сфаќањата за ризикот поединците, од една страна и однесувањето на групата како целина, од другата страна.

Како резултат од акциите (стратегии) кои ќе бидат преземени, може да се набљудува доминација на одредено однесување во дадена популација. Во оваа смисла, да учиме дека под однесување ги подразбираме последиците од личниот доброволен избор т.е. исклучуваме мерки како затворање на училишта или задолжителна вакцинација, но може да вклучиме организирани мерки како подигнување на свеста или едукативни кампањи за превенција. Индивидуалното однесување е изразено преку одлуката да се преземе (или не) некоја од мерките за контрола (на пример, социјално дистанцирање) или надминување (вакцинирање, стекнување колективен имунитет).

2. ТРАГЕДИЈА НА СЛИЧНИТЕ

Една од класичните ситуации во теоријата на игри е поврзана со користење на заеднички ресурс од страна на неколку играчи, при што достапноста на тој ресурс во иднина ќе зависи од севкупниот однос на играчите кон него. Така на пример, дали ќе има доволно храна или лекови во продавниците зависи не само од нашето, туку и од однесувањето на поголем дел од купувачите. Но, ако луѓето се однесуваат панично и

ги исцрпуваат постоечките залихи, тогаш социјалната одговорност на некој поединец е од мало значење.

Според социјалната психологија, постојат два главни мотива за себично однесување: алчност и страв. Кога дејствува од позиција на алчност, поединецот е незаинтересиран за потребите на другите и зема сè што смета дека е од корист. Стравот, од друга страна, е покомплициран, бидејќи кога се во состојба на страв, поединци можеби сакаат да се однесуваат социјално одговорно, но се плашат дека останатите нема да се однесуваат на истиот начин. Така, ако одлучат да се воздржат од купување додека останатите ги празнат полиците, ќе завршат со најлошиот можен исход (т.н. *добивка на наивниот*). Верувањето дека другите дејствуваат себично, честопати може да ги влоши ваквите склоности кај другите.

Истражувањата сугерираат на неколку пристапи со кои може да се охрабри општествено одговорно однесување, што во случајов би значело намалување на акумулацијата на ресурси за лична употреба. Еден од методите може да биде нагласување на чувствата на сродство помеѓу купувачите. Согледувањето на другите како слични на нас обично ја зголемува соработката. Друг метод е потиснување на идејата за панично купување. На пример, помалку написи во весниците во кои се истакнати голи полици ќе ја намали загриженоста околу завршувањето со „добивка на наивниот“. И додека активностите на трупање на залихи може да доведат до уште поголемо трупање, спротивното е исто така точно: делата на дарежливост можат да ги зголемат социјално совесните тенденции и да промовираат соработка.

Трагедија на сличните е познат концепт од економијата (Гарет Хардин, Адам Смит), кој се однесува на ситуација во која поединците исцрпуваат некој заеднички ресурс, доведувајќи со тоа до прекумерно производство и можен целосен недостаток. Кога ги набљудуваме во нивната верзија со повеќе од два играчи, *Затвореничката дилема* и *Играта на гласање* може да се анализираат како посебни случаи на *Трагедијата на слични*. Во *Затвореничката дилема*, на пример, теоретското решение има силна рационална поткрепа бидејќи произлегува како еквилибриум на строго доминантни стратегии (т.е. стратегии кои секогаш даваат подобра добивка од онаа којашто ја обезбедуваат останатите

расположливи стратегии), но е истовремено строго субоптимално (т.е. постои подобар исход за сите). Како резултат на ова, добивката на секој играч во еквилибриумскиот стратегиски профил е пониска од добивката во низа други профили, како што е на пример профилот во кој сите соработуваат, но исто така и во некои мешани стратегиски профили во повторената игра. Значи, постојат начини на игра кај кои добивките се строго преферирани од сите, во однос на добивките во еквилибриум. Ова нè доведува до основната поента на *Затвореничката дилема*, а тоа е дека индивидуалната рационалност води кон колективна рационалност и во случај на постоење на некој единствен контролен механизам, изборот на стратегии би се разликувал од еквилибриумскиот. На некој начин, доаѓаме до одредено обопштување на метафората опишана со *Затвореничката дилема*, на слична ситуација со поголем број играчи.

Во *Трагедиите на слични*, секоја личност може да избере или да придонесе или да се вози бесплатно. Оној кој придонесува има трошок c за придонес, што може да биде времето кое го поминува во преземање на некоја акција (на пример, да појде на лекар), доживување на одредена непријатност (социјална дистанца, вакцинирање) или некој финансиски издаток (за средства за заштита или друго). Од друга страна, лицето кое се вози бесплатно, не сноси такви трошоци. Интервенциите како вакцинирање, социјална дистанца или изолација, создаваат позитивни надворешни ефекти, т.е. придобивки за оние кои не учествуваат во таа интервенција, бидејќи дејствата на останатите во заедницата го прекинуваат пренесувањето на инфекцијата. На ваков начин се создава расчекор меѓу оптималните лични стратегии со кои се максимизира личниот интерес, и стратегиите кои се корисни за групата бидејќи со нивната примена се минимизира севкупниот здравствен товар врз популацијата.

Да претпоставиме дека одредена не-ривалска, не-исклучувачка добивка се однесува на сите поединци во играта, кога (некои) луѓе придонесуваат за колективното добро. Големината на добивката $V(m)$ за секој поединец зависи од вкупниот број на „соработници“ m . Претпоставуваме дека $V(m)$ е растечка и (слабо) конкавна функција во однос на бројот на соработници, што всушност значи дека ќе постигне одредени максимални вредности за некое m .

Бидејќи добивката е не-ривалска (што значи, вкупниот износ на достапната корист е поделен на сите поединци) и неисклучувачка (никој не може да биде спречен да ужива во неа), добивката $U(a)$ за секое лице што презема акција a ќе биде:

$$U(a) = \begin{cases} B(m) - c & \text{ако } a \text{ е „придонесувам“} \\ B(m-1) & \text{ако } a \text{ е „слободно возење“} \end{cases}$$

Ако зголемувањето на вкупната добивка (со оглед на тоа што придонесуваат и $m-1$ останати) кое е генерирано од придонесот на поединецот е помало од неговиот придонес c , тогаш за него е индивидуално „оптимално“ да се вози бесплатно. Еквилибриумот се постигнува за најмалото \tilde{m} така што важи:

$$\frac{dB(\tilde{m}+1)}{dm} < c.$$

Да забележиме дека слободното возење не е нужно доминантна стратегија (т.е. стратегија која секогаш носи поголема добивка во споредба со останатите стратегии). Попрво, нивото на придонеси во Нешов еквилибриум зависи од функцијата на добивка (бенефит) $B(m)$. Ако, на пример, првиот играч даде доволно голем придонес:

$$\frac{dB(0)}{dm} > c,$$

тогаш ќе постои некооперативен (т.е. Нешов) еквилибриум во кој барем неколку други играчи ќе придонесуваат.

Ефикасното ниво на придонес, т.е. социјалниот оптимум, е најмалиот број m^* таков што важи:

$$\frac{dB(m^*+1)}{dm} < \frac{c}{n}.$$

Трошокот од десната страна е поделен со n , бидејќи бенефитот е поделен помеѓу n учесници. Ако $B(m)$ е конкавна функција, тогаш $m^* > \tilde{m}$, што е суштината на проблемот на колективна акција: премалку луѓе придонесуваат, или премногу луѓе прекумерно го трошат заедничкиот ресурс.

Суштината на проблемот, од економско-правен аспект, некои го гледаат во недоволно или лошо заштитени сопственички права. Други пак сметаат дека ваквото гледиште е премногу песимистично и дека воведувањето на формални сопственички права може да донесе повеќе негативни од позитивни ефекти. Ова е потврдено и со голем број примери на успешно управување од страна на заедницата, како и низ лабораториски експерименти во кои учесниците покажуваат „условна соработка“ преку личен значаен придонес, заедно со организирање мониторинг и воведување на санкции за прекршувачите, [4]. Аналогно во однос на прашањата поврзани со заштитата на јавното здравје, до израз доаѓа тензијата помеѓу личните права, од една и интересите на групи и заедници, од другата страна.

3. ИГРАТА НА НАЈСЛАБА АЛКА

Во литературата, пандемиите често пати се поврзуваат со *играта на најслаба алка*, која овозможува опис на специфични проблеми поврзани со јавните добра, [5]: оној што најмалку придонесува го одредува вкупниот резултат за сите. На пример, во [1] се разгледани стратегии за искоренување на сипаници и други заразни болести, при што е земена статична игра (еднократна интеракција) со чисти стратегии и симетрични играчи (сите земји имаат исти стратегии и функции на добивка). Секоја земја избира ниво на вакцинација, со знаење дека постои критично ниво над кое во нејзините граници, болеста ќе биде елиминирана. Но, во оваа игра може подеднакво да бидат користени и стратегии за контрола, земајќи ги предвид, на пример, достапноста и сигурноста на ефикасни вакцини.

Нека функцијата на добивка на играчот $i \in N$ е дадена со $\Pi_i(Q, q_i) = B_i(Q) - C_i(q_i)$, каде што $Q = \min_{i \in N} \{q_i\}$ го означува нивото на обезбедено јавно добро, еднакво на минималното ниво на обезбедување над множеството од сите играчи и q_i го означува индивидуалното ниво на обезбедување (учинок, придонес) на играчот i . Во нашиот контекст, јавното добро е интензитетот и квалитетот на контролата на вирусот. Бенефитите $B_i(Q)$ зависат од најмалиот придонес, а трошоците $C_i(q_i)$

зависат од индивидуалниот придонес на i . Општо теоретски, се смета дека бенефитите (добивките од играта) се конкавни, а трошоците стриктно конвексни функции, така што функцијата на добивка да е стриктно конкавна, со единствен внатрешен максимум од аспект на играчот i . Овој максимум, кој го означуваме со $q_i^A = \max \Pi_i(Q, q_i)$, $i \in N$, може да го набљудуваме како оптимално ниво на обезбедување во состојба на *автархија* (неограничено централизирано владеење) т.е. изедначување на максималната добивка со минималниот трошок, $B_i'(q_i^A) = C_i'(q_i^A)$. Општо земено, ако функциите на добивка и на трошок се различни за различни држави, нивоата на обезбедување на автархијата најверојатно ќе бидат различни. Оттука, државите може да ги подредиме согласно нивното ниво на автархија:

$$q_{\min}^A = q_1^A \leq q_2^A \leq \dots \leq q_n^A.$$

Ќе го дефинираме концептот на решение на играта на најслаба алка, повторно како Нешов еквилибриум: стратегиски профил во кој ниту еден од играчите не е еднострано поттикнат да ја промени сопствената стратегија, бидејќи со тоа би имал стриктно помала добивка.

Да го означиме со $Q_{-i, \min}$ минималното ниво на обезбедување за сите играчи освен i . Тогаш, оптималниот одговор на i е да одговори на $Q_{-i, \min}$ сè додека е исполнето $Q_{-i, \min} \leq q_i^A$. Со оглед на тоа дека добивките се конкавни, секое ниво на обезбедување под $Q_{-i, \min}$ ќе имплицира пониска $Q_{-i, \min}$ добивка за i . Истото важи за било кое ниво на обезбедување над $Q_{-i, \min}$ бидејќи тоа ќе содржи само дополнителни трошоци, но без дополнителен бенефит за i . Од друга страна, за секое ниво $Q_{-i, \min}$ над нивото на автархија ($Q_{-i, \min} > q_i^A$), i ќе се држи до q_i^A бидејќи не може да биде приморан да придонесе повеќе од тоа. Значи, играчот i одговара на сите нивоа на обезбедување до нивото q_i^A . Според тоа, сите нивоа на обезбедување за кои $q_i = q_j$ за сите $i, j \in N$ од нула па до q_{\min}^A , се Нешов еквилибриум. Имајќи ја предвид конкавноста на функциите на добивка, Парето-оптимален Нешов еквилибриум (каде никој не може да

добие стриктно повеќе со промена на стратегијата, без притоа да ги загрози добивките на останатите), ќе се добие кога сите играчи ќе се изедначат со q_{\min}^A . Имено, $q_{\min}^A = q^* = q_i^* = q_j^*$, за сите $i, j \in N$, $i \neq j$.

Во случај на симетрична игра, каде сите играчи ги имаат истите функции на бенефит и трошоци, важи $q_i^A = q_j^A$ за сите $i, j \in N$, $i \neq j$. Во овој посебен случај, Парето-оптималниот Нешов еквилибриум е идентичен со социјалниот оптимум. Оттука, во отсуство на било какви идни компликации, за постигнување на оваа еквилибриумска состојба нема потреба од соработка, туку е потребна само координација. Со оглед на тоа дека во ситуации на пандемија интересите на инволвираните страни се совпаѓаат, ова би требало да е лесно. Но она што е на пример интересно, е дека експерименталните докази не го поткрепуваат овој заклучок, [2].

Кога сакаме да опишеме некоја реална ситуација, сепак, потребно е да вклучиме претпоставка за асиметрија и тогаш координацијата нема да биде доволна. Имено, ако играчите ги посматраат бенефитите на различен начин и се соочуваат со различни трошоци, тогаш и нивните нивоа на автархија ќе бидат различни. Со други зборови, тие ќе имаат различни преференци во однос на оптималното ниво на обезбедување и тогаш, дури и ако оптимистички претпоставиме дека сите ќе се усогласат околу Парето-оптималниот Нешов еквилибриум, ова нема повеќе да биде социјалниот оптимум. Може да се покаже дека социјално-оптималното ниво на обезбедување се наоѓа помеѓу минималното и максималното ниво на автархично обезбедување, земени над сите играчи и оваа разлика може да е многу голема. Според тоа, потребна е соработка, а не само координација за да се надминат, или барем да се ублажат загубите на глобалната благосостојба кои се создадени од некооперативното однесување на играчите.

4. ЕКСПЕРИМЕНТИ И РЕЗУЛТАТИ

Дилемите кои се наметнати од играта на најслаба алка се испитувани низ неколку експерименти, во кои најчесто се користат претпоставки за поедноставување на функција на добивка (линеарност) и нивото на обезбедување (дискретност). Во Табела 1 се прикажани резултатите од

експериментот опишан во [9], во кој се разгледуваат седум нивоа на обезбедување, т.е. преземени мерки за зголемена безбедност и се соодветно дадени добивките на еден играч (во нашиов случај, држава или регион), согласно нивото на обезбедување кое го избрал (одговара на редиците во табелата) и минималното избрано ниво меѓу сите играчи (дадени во соодветна колона).

Стратегија претставува изборот на *ниво на придонес*, односно во случајов, избор на број. Во нашиот контекст на пандемии, ова имплицира сумирање на различните степени на интензитет и квалитет на контрола на вирусот, во множество од дискретни акции. На пример, ако играчот избере најголем број 7 (прва редица) и притоа сите играчи изберат 7 (прва колона), тој ќе заработи 130. Меѓутоа, ако е најмалиот избран број од другите е 6 (втора колона), тој ќе заработи само 110. Повторно во нашиот контекст, дури и ако земјата i одбере максимално можно ниво на контрола на вирусот, ако другите земји не ја следат истата стратегија, постои ризик инфекцијата на крајот да влијае на i , и ова влијание ќе биде поголемо колку што е помал најмалиот број избран од страна на другите земји.

Избран број	Најмалиот број избран од останатите						
	7	6	5	4	3	2	1
7	130	110	90	70	50	30	10
6		120	100	80	60	40	20
5			110	90	70	50	30
4				100	80	60	40
3					90	70	50
2						80	60
1							70

Табела 1. Стратегии и добивки во играта на најслаба алка, [9].

Целокупниот Нешов еквилибриум лежи на дијагоналата во Табела 1, а Парето-оптималниот Нешов еквилибриум е сите играчи да изберат 7. Во дадена редица, сите записи десно од дијагоналниот влез подразбираат помала добивка на i , бидејќи другите играчи избираат помал број.

Колку е поголема разликата помеѓу сопствениот број и минималниот број на сите останати, толку поголема ќе биде загубата. Според тоа, ризикот од загуба на i ќе се зголемува со бројот кој ќе го избере и притоа, единствена добивка која може да ја обезбеди е 70, во случај да го избере најниското ниво на придонес 1.

Направени се и дополнителни експерименти за добивките од Табела 1, при што е анализиран не само минималниот број како што е опишано погоре, туку и просечната вредност на избраните нивоа, што може да се смета како претставување на просечниот степен на координација. Резултатите од овие експерименти ги потврдиле претходните анализи, а дел од заклучоците во врска со стратегиите и однесувањето во услови на глобална опасност од ширење на инфективни болести, се следните, [2]:

– Во повторената игра на најслаба алка, просечниот и минималниот број опаѓаат со бројот на играни рунди.

– Со повторување на играта, просечните броеви се приближуваат до вредности под 2, а минималните броеви брзо се приближуваат до вредностите близу 1.

Што се однесува до координацијата на Парето супериорни исходи, таа не е лесна и едноставна како што предвидува теоријата, која поаѓа од претпоставката дека играчите не грешат. Кога се работи за справување со опасноста од глобално ширење на пандемии, неколку експериментални студии покажале дека ефектите од ова можат да бидат ублажени од активности како, на пример, изолација од соседните држави, воведување на финансиски стимулации, намалување на трошоците за вложениот напор или користење на совети од играчи кои играле во претходните рунди. Во однос на нивната важност за кризата со SARS-CoV-2, исклучувањето на соседите е веројатно најрелевантната стратегија. Имено, утврдено е дека кога на играчите им е дадена можност да ги исклучат оние кои се најслаба алка од групата со која го делат јавното добро, може да се постигне првиот најдобар исход, [7]. Многу земји, вклучувајќи ја и Европската унија како меѓународен субјект, го ограничија или го суспендираа патувањето од други земји. Сепак, се поставува прашањето колку ќе биде ефективна таквата стратегија на долг рок, во нашиот глобално поврзан свет. Натаму, советите од играчи кои претходно ја играле играта може да имаат улога на почетокот на пандемијата, бидејќи

регионите кои биле погодени подоцна може да учат од искуството на регионите каде претходно се појавил вирусот. Во актуелната ситуација, овој елемент беше делумно суспендиран од недостатокот на меѓународна координација и соработка, бидејќи многу земји ги затворија своите граници и воведоа ограничување на извозот на здравствената опрема и заштитни средства. Во однос на воведувањето на финансиски стимулации или намалување на трошоците за вложениот напор, ова се чини остварливо само во рамки на некој вид на институционализирана меѓународна соработка. Но, за да може да се спроведува стабилно и одржливо во текот на времето, привремената и ад хок соработка нема да е доволна, туку потребен е ангажман на соодветни меѓународни институции.

Со цел да се објасни неуспехот во координацијата кај симетричните добивки во експериментите, може да се разгледа *еквилибриум на квантален одговор* (QRE) што е всушност Нешов еквилибриум во мешани стратегии засновани на функцијата за веројатен избор [6]. Идејата е дека одлуките се случајни (стохастички), сите акции имаат позитивна веројатност и притоа веројатноста за избор на неоптимални акции е обратно пропорционална на можната загуба. Оттука, играчите претпоставуваат дека и тие и останатите може да направат грешки, кои можат да бидат незначително мали но со ненулта веројатност, додека веројатноста за „скапи“ грешки е помала од онаа за „евтини“ грешки. Чувствителноста на играчите на грешки се мери со таканаречен „параметар на грешка“ λ : поголемите вредности на λ имплицираат поголема чувствителност на грешки и ги прават не-оптималните избори помалку веројатни. Кога $\lambda = 0$, изборот се прави целосно случајно, а за $\lambda \rightarrow \infty$ изборот е совршено рационален.

Главната идеја зад QRE е да се заменат прекумерно прецизните функции за најдобар одговор од Нешовиот еквилибриум, со „измазнети“ најдобри одговори кои се непрекинати и растечки во однос на очекуваните добивки. Со други зборови, QRE воведува *подобра* наместо најдобра реакција (одговор) од страна на играчите: тие имаат поголема веројатност да изберат стратегии со повисоки очекувани добивки, но не секогаш ја избираат стратегијата со највисока очекувана добивка. Покрај тоа, играчите сфаќаат дека и другите го прават истото, односно очекуваат непредвидливост (шум) во нивното однесување. На ваков начин, се

дозволува секоја стратегија да биде играна и со тоа, можни се сите (дури и нерационални) исходи.

5. НЕКОИ ТЕОРЕТСКИ РЕШЕНИЈА: ДОГОВОРИ, КОАЛИЦИИ

Проблемите кои се производ на играта на најслаба алка може да се надминат преку склучување на договори и нивно почитување. Да претпоставиме дека играчите имаат можност да се приклучат на одреден договор и дека се асиметрични (бидејќи во спротивно, договорите се непотребни во свет без грешки). Во првата фаза, тие одлучуваат дали да се приклучат на договорот или да останат надвор од него. Ова доведува до коалициска структура $C = \{S, k, \dots, m\}$ во која постои коалиција S од некое подмножество од сите играчи и дополнително, некои самостојни играчи, во случај кога S не е големата коалиција (составена од сите играчи). Во втората фаза играчите ги избираат своите нивоа на придонес.

Се претпоставува дека коалицијата дејствува како еден играч па оттука, обезбедувањето ќе следи од максимизирањето на агрегираната добивка над сите членови на коалицијата, што води до условот од прв ред:

$$\sum_{i \in S} B_i'(q_S^A) = \sum_{i \in S} C_i'(q_S^A).$$

Нивоата на оние кои не се членови на коалицијата се исти како и без договорот. Како и претходно, сите нивоа на обезбедување т.ш. $q_S = q_k = \dots = q_m$, од нула до најниското ниво на автархија $q_{\min}^A = \min\{q_S^A, q_k^A, \dots, q_m^A\}$, се Нешови еквилибриуми, при што Парето-оптималниот еквилибриум се добива кога коалицијата S се формира согласно $q_{\min}^A = q^*(S) = q_S^* = q_k^* = \dots = q_m^*$.

Да претпоставиме дека сите играчи, вклучително и S , можат да се координираат на овој Парето-оптимален Нешов еквилибриум. Соодветните добивки ќе бидат $\Pi_1(q^*(S)), \Pi_2(q^*(S)), \dots, \Pi_n(q^*(S))$. Коалицијата S ќе биде стабилна ако истовремено важи:

$$\begin{aligned} \Pi_i(q^*(S)) &\geq \Pi_i(q^*(S) \setminus \{i\}), \quad \forall i \in S, \text{ внатрешна стабилност и} \\ \Pi_j(q^*(S)) &\geq \Pi_j(q^*(S) \setminus \{i\}), \quad \forall j \notin S, \text{ надворешна стабилност.} \end{aligned}$$

Ова значи дека ниту еден учесник во договорот нема да биде поттикнат да ја напушти коалицијата S (внатрешна стабилност), и ниту еден член нема да биде поттикнат да се приклучи кон S (надворешна стабилност). Јасно, коалицијата S ќе има смисла ако го вклучува членот со најмало ниво на обезбедување во автархија, кое погоре го означивме со q_1^A . (Да се присетиме дека овој играч може да стави вето на било кое ниво на обезбедување над q_1^A). Ова го нарекуваме *ефективна коалиција*. Нивото на обезбедување на една ваква ефективна коалиција $q^*(S)$ ќе биде или нејзиното ниво q_S^A , или најмалото ниво меѓу „аутсајдерите“ q_k^A што, во секој случај, имплицира дека еквилибриумското ниво е над нивото на првиот играч т.е. $q_1^A < q^*(S)$. Оттука, добивката на првиот играч во коалицијата S е подобра од онаа која би се добила ако тој не учествува, кога неговото ниво ќе го определи еквилибриумот, $q^* = q_1^A$. Бидејќи коалиција која не е профитабилна за сите играчи не е внатрешно стабилна, ниту една коалиција нема да биде стабилна во отсуство на трансфери на личната добивка.

Теоретската анализа во [2] сугерира дека соработката помеѓу симетричните (идентични) земји е ирелевантна за играта со најслаба алка. Во контекст SARS-COV-2, ова би значело дека регионалната соработка, како на пример соработката во рамките на ЕУ, не е особено важна, иако одредени експериментални испитувања сугерираат дека дури и меѓу симетричните играчи, кооперативноста на институциите може значително да влијае на исходот. Некои од заклучоците во врска со важни прашања поврзани со коалициониот модел, се следни.

1. Постои ефективна стабилна коалиција, иако на општо ниво не е можно точно да се предвиди која коалиција ќе биде стабилна. Интуитивно, секоја коалиција со два играчи, вклучително и земјата со најмало ниво на обезбедување на автархија, е внатрешно стабилна. Вишокот е секогаш строго позитивен и отстапувањето ќе доведе до почетна ситуација во која и на двете земји им е полошо. Таквата коалиција може и да не е надворешно стабилна. Меѓутоа, ако не е, тогаш некоја поголема коалиција на крајот ќе биде и внатрешно и надворешно стабилна. Оттука,

заклучокот е дека соработката во борбата против глобални пандемски опасности е генерално изводлива.

2. Кога распределбата на автархиските нивоа на обезбедување во коалицијата S е позитивно искосена, таа ја фаворизира стабилноста. Ова значи дека распределбите со многу играчи чие ниво на автархија е близу до просекот во S , при што еден или двајца играчи се со вредност далеку над овој просек, се погодни за стабилноста. Играчите кои се далеку над просекот им „плаќаат“ нето трансфери на останатите за да останат во групата. Така, силните асиметрии не се пречка, туку предност за стабилноста. Во однос на глобалната анти-пандемска борба, се чини дека ова ја фаворизира соработката во класичен геополитички контекст север – југ каде постои голема асиметрија помеѓу двете групи, со многу поголем број земји на југот.

3. Големата коалиција која ги вклучува сите играчи, исто така може да биде стабилна и тоа може да биде постигнато од само еден надворешен фактор. Интуицијата за ова е слична како и претходно: вишокот е позитивен и во ваква исклучително искосена распределба, ако еден играч го напушти договорот тогаш сите играчи се враќаат во ситуација без никаков договор. Оттука, имплицитната казна ќе биде доволно силна. Со оглед на тоа што поради утврдената шема на трансфери сите играчи добиваат „фер“ дел од вишокот, ниту една земја нема поттик да ја напушти големата коалиција. Повторно, екстремната асиметрија е погодна за стабилноста. Значи, дури и глобален меѓудржавен договор би можел да биде потенцијално стабилен.

4. Во однос на поврзаноста на стабилноста со добивките од соработката, општо земено, оние распределби кои ја фаворизираат стабилноста подразбираат ниски кооперативни добивки, и обратно. Во нашиот контекст, и покрај тоа што добивките од соработката на глобално ниво не изгледаат огромни, добивките на ниво на одделни земји во развој може сè уште да бидат големи и да спасат многу животи. Особено, во контекст на играта со најслаба алка, теоретските резултати не им даваат предност на помалите во однос на поголемите договори, попрво обратното може да биде точно. Оттука, наместо да се бараат изговори за развивање само на локална или регионална соработка, работењето на глобална соработка може да се покаже како полесно и поефикасно.

5. Дали квалитативниот заклучок ќе опстане и ако играчите не успеат совршено да се координираат на Парето-оптималниот Нешов еквилибриум во ваква игра со договори? Повторно, одговорот во [2] е потврден, договорите можат да направат разлика, иако дозволувањето на одредена несовршеност во координацијата може да доведе до споредбено намалена социјална добросостојба. Значи, дури и во помалку од совршен свет, квалитативниот заклучок дека соработката може да доведе до подобар исход, продолжува да важи.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] S. Barrett, *Coordination vs Voluntarism And Enforcement in Sustaining International Environmental Cooperation*, Proc Natl Acad Sci 113(51) (2016), 14515–14522.
- [2] A. Caparros, M. Finus, *The Corona-Pandemic: A Game-Theoretic Perspective on Regional and Global Governance*, Environmental and Resource Economics 76 (2020), 913–927.
- [3] S.L. Chang, M. Piraveenan, P. Pattison, M. Prokopenko, *Game theoretic modelling of infectious disease dynamics and intervention methods: a review*, Journal of Biological Dynamics, 14:1 (2020), 57–89.
- [4] F. K. Diekert, *The Tragedy of the Commons from a Game-Theoretic Perspective*, Sustainability, MDPI, Open Access 4(8)(2012), 1–11.
- [5] J. Hirshleifer, *From Weakest-Link to Best-Shot: The Voluntary Provision of Public Goods*, Public Choice, 41(3) (1983), 371–386.
- [6] R. McKelvey, T.R. Palfrey, *Quantal response equilibria for extensive form games*, Experimental Economics 1 (1998), 9–41.
- [7] A. Riedl, I.M.T. Rohde, M. Strobel, *Efficient coordination in weakest-link games*, The Review of Economic Studies 83(2) (2016), 737–767
- [8] Н. Серафимова, *Затвореничка дилема: контекст, предизвици, варијации*, Научно-популарни трудови од Вториот семинар „Математика и примени“, Математички омнибус 3 (2018), 85–102.

- [9] J.B. Van Huyck, R.C. Battalio, R.O. Beil, *Tacit coordination games, strategic uncertainty, and coordination failure*, American Economic Review 80(1) (1990), 234–248.

¹ Воена Академија „Генерал Михаило Апостолски“,
Васко Карангелески бб, 1000 Скопје, Р. Северна Македонија
e-mail: nevena.serafimova@gmail.com

Примен: 22.5.2021

Поправен: 26.9.2021

Одобен: 28.9.2021

Објавен на интернет: 29.9.2021

ФИБОНАЧИЕВИТЕ БРОЕВИ, ТЕОРИЈАТА НА ЕЛИОТ И ТРГУВАЊЕТО СО ХАРТИИ ОД ВРЕДНОСТ

Владимир Јорданов ¹

Познато е дека Фибоначиевите броеви се појавуваат во математиката, посебно во геометријата при изучувањето на златниот пресек, како и кај разни „златни“ фигури, потоа кај Паскаловиот триаголник, но се појавуваат и на некои многу необични места: во природата, во архитектурата, во музичките форми и во економијата, посебно кај финансиските пазари, [7].

1. LIBER ABACI И ЗАДАЧАТА СО ЗАЈАЦИТЕ

Леонардо од Пиза (1175–1250) или повеќе познат како Фибоначи, бил италијански математичар за кој се смета дека бил еден од најталентираните математичари од средниот век. Неговиот татко Гиљермо Боначи бил богат трговец кој тргувал со арапските земји, а најмногу со денешен Алжир. Така, младиот Леонардо учејќи математика со познати арапски математичари, се запознал со арапскиот нумерички систем. Фасциниран од неговата едноставност, наспроти гломазноста на римските броеви, тој, во 1202 година, го претставил овој систем пред Европа преку книгата насловена *Liber Abaci*, т.е. Книга за пресметувањето.

Меѓу многуте задачи во таа книга, во дванаесеттата глава го поставил и го решил проблемот во врска со растот на популација од зајаци (во идеална ситуација). проблемот наречен „Колку парови зајаци се создадени од еден пар во една година“, [8], гласи:

„Да претпоставиме дека пар млади зајаци, еден мажјак и една женка, се наоѓаат на излоирано поле. Зајациите се способни да се парат на возраст од барем еден месец, па така на крајот на вториот месец женката ќе роди уште еден пар зајаци. Да претпоставиме дека нашите зајаци никогаш не угинуваат и дека женката секогаш дава уште еден пар зајаци (еден мажјак и една женка) секој месец од вториот месец натаму. Колку пара зајаци ќе се намножат до крајот на годината?“

Накратко ќе го претставиме решението на оваа задача, [8], [1]. Да претпоставиме дека на почетокот на годината, на пример, во јануари, имаме еден пар зајаци. Тие сè уште не се зрели да имаат потомство, но на крајот на вториот месец веќе имаат потомство и тоа уште еден пар зајаци. Во март ќе имаме, покрај стариот пар зајаци, нов пар зајаци, кој ќе биде зрел следниот месец. Значи, вкупно два пара. Во април ќе го имаме првобитниот пар зајаци, новиот зрел пар и уште еден пар зајаци, потомци на првобитниот пар зајаци.

Значи, за бројот на парови зајаци на крајот од месецот се добива низата: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ... Така, на крајот на годината ќе има 144 пара зајаци и сите ќе потекнуваат од првиот пар зајаци. Секој член на оваа низа е наречен *Фибоначиев број*. Како што се гледа од низата, секој број (освен првите два) може да се добие со собирање на претходните два. На пример, следниот број во горната низа е $89+144=233$. За низата Фибоначиеви броеви, којашто ја означуваме со (F_n) , важи следнава формула:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},$$

за $n \geq 2$ и $F_0 = 1, F_1 = 1$.

Интересно е да се спомене дека Фибоначиевите броеви не биле особено забележани сè до втората половина на XIX век, кога францускиот математичар Едуар Лика (Édouard Lucas, 1842 –1891) разгледувал низа инспирирана од Фибоначиевата, која почнува со броевите $F_0 = 1, F_1 = 3$, [3]. (Во некои книги за почетни вредности на Ликаовата низа се земаат броевите $F_0 = 2, F_1 = 1$.)

Врските меѓу различните Фибоначиеви броеви, посебно односот на два последователни Фибоначиеви броеви го разгледувал Јохан Кеплер (1571–1630), кој забележал дека како што се зголемува вредноста на n , така количникот $\frac{F_n}{F_{n-1}}$ многу брзо се приближува кон златниот пресек $\phi = 1,618 \dots$ (Табела 1, трета колона). Доказот на ова тврдење, коешто денес го запишуваме во вид

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \phi,$$

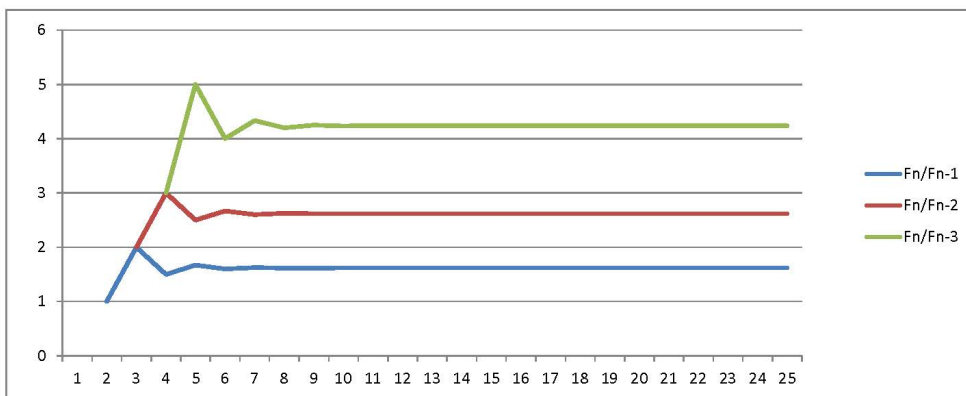
следувал дури по еден век, [5].

Фибоначиевите броеви, теоријата на Елиот и тргувањето со акции

Може да се разгледаат и други количници, како што се $\frac{F_n}{F_{n-2}}$, $\frac{F_n}{F_{n-3}}$,

итн., коишто резултираат со лимеси претставени на Сликата 1, добиена од податоците од Табелата 1. Тие лимеси се следниве:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-2}} = \phi^2 \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-3}} = \phi^3.$$



Слика 1. Графички приказ на количниците $\frac{F_n}{F_{n-1}}$, $\frac{F_n}{F_{n-2}}$ и $\frac{F_n}{F_{n-3}}$.

n	F	F_n/F_{n-1}	F_n/F_{n-2}	F_n/F_{n-3}
1	1			
2	1	1.00000000		
3	2	2.00000000	2.00000000	
4	3	1.50000000	3.00000000	3.00000000
5	5	1.66666667	2.50000000	5.00000000
6	8	1.60000000	2.66666667	4.00000000
7	13	1.62500000	2.60000000	4.33333333
8	21	1.61538462	2.62500000	4.20000000
9	34	1.61904762	2.61538462	4.25000000
10	55	1.61764706	2.61904762	4.23076923
11	89	1.61818182	2.61764706	4.23809524
12	144	1.61797753	2.61818182	4.23529412
13	233	1.61805556	2.61797753	4.23636364
14	377	1.61802575	2.61805556	4.23595506
15	610	1.61803714	2.61802575	4.23611111
16	987	1.61803279	2.61803714	4.23605150
17	1597	1.61803445	2.61803279	4.23607427
18	2584	1.61803381	2.61803445	4.23606557
19	4181	1.61803406	2.61803381	4.23606890
20	6765	1.61803396	2.61803406	4.23606763

Табела 1. Приказ на количниците $\frac{F_n}{F_{n-1}}$, $\frac{F_n}{F_{n-2}}$ и $\frac{F_n}{F_{n-3}}$ до 8 децимали.

Покрај тоа, можеме да ги разгледуваме и реципрочните односи на погоре дадените, како што е прикажано во Табелата 2.

n	F	F_{n-1}/F_n	F_{n-2}/F_n	F_{n-3}/F_n
1	1			
2	1	1.00000000		
3	2	0.50000000	0.50000000	
4	3	0.66666667	0.33333333	0.33333333
5	5	0.60000000	0.40000000	0.20000000
6	8	0.62500000	0.37500000	0.25000000
7	13	0.61538462	0.38461538	0.23076923
8	21	0.61904762	0.38095238	0.23809524
9	34	0.61764706	0.38235294	0.23529412
10	55	0.61818182	0.38181818	0.23636364
11	89	0.61797753	0.38202247	0.23595506
12	144	0.61805556	0.38194444	0.23611111
13	233	0.61802575	0.38197425	0.23605150
14	377	0.61803714	0.38196286	0.23607427
15	610	0.61803279	0.38196721	0.23606557
16	987	0.61803445	0.38196555	0.23606890
17	1597	0.61803381	0.38196619	0.23606763
18	2584	0.61803406	0.38196594	0.23606811
19	4181	0.61803396	0.38196604	0.23606793
20	6765	0.61803400	0.38196600	0.23606800

Табела 2. Приказ на количниците $\frac{F_{n-1}}{F_n}$, $\frac{F_{n-2}}{F_n}$ и $\frac{F_{n-3}}{F_n}$ до 8 децимали.

Да забележиме дека нумеричките вредности на третата колона во Табелата 2 се приближуваат до реципрочната вредност на златниот пресек, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n-1}}{F_n} = \frac{1}{\phi}.$$

Може да се забележи една интересна законитост меѓу количниците $\frac{F_n}{F_{n-1}}$ и $\frac{F_{n-1}}{F_n}$ (лесно се согледува од третите колони во Табелите 1 и 2), а тоа е дека $\frac{F_n}{F_{n-1}} \approx 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}$.

Табелите 1 и 2 ни кажуваат дека постојат значајни врски меѓу Фибоначиевите броеви. На пример, кој било Фибоначиев број е приближно 0,618 пати поголем од претходниот, а 0,618 пати помал од наредниот, а вредноста 0,382, којашто е гранична вредност на колоната

$\frac{F_{n-2}}{F_n}$, е двојно поголема од 0,618. (Да забележиме дека овие константи

не се однесуваат на првите неколку броеви од низата, но како „напредуваме“ во неа ги добиваме количниците 1,618 и 0,618 соодветно). Како што 1,618 и 0,618 ги опишуваат врските меѓу две последователни вредности на Фибоначиевата низа, така тие ја опишуваат врската меѓу еден раст на цените на пазарот на хартии од вредност и наредниот раст. На пример, ако една цена порасне од 5 на 8, тогаш можеме 8 да го помножиме со 1,618 за да го оцениме следниот раст на цените (којшто ќе биде 13). Слично, ако цената паѓа од 13 на 8, тогаш множејќи го 8 со 0,618 може да процениме дека следната поправена цена ќе биде 5.

За нас натаму ќе бидат интересни следниве вредности: 1,618, 2,618, 4,236, 0,618, 0,382, 0,236. Да го објасниме ова. Како што се важни односите помеѓу два последователни Фибоначиеви броеви, така се важни и односите помеѓу три последователни и четири последователни Фибоначиеви броеви.



Слика 2. Графички приказ на важните односи во реална ситуација, [2].

Ова ни дава дополнителни вредности од секундарно значење (0,382 и 2,618) и терцијарно значење (0,236 и 4,682). Исто така, важни се и броевите 0,5 и 1,382, коишто ги нема во табелите. Првиот, 0,5, е важен количник за поправка бидејќи е на средина помеѓу 0,382 и 0,618. Средната точка е секогаш важна во кој било циклус на растење. Во финансиските пазари, кога цените паѓаат до средната точка на претходниот опсег на тргување купувачите и продавачите ќе го приметат ова и колективно, можеби и свесно, ќе паузираат за да одлучат дали е можно цената повторно да порасне или да продолжи да паѓа.

2. ТЕОРИЈА НА ЕЛИОТ

Ралф Нелсон Елиот (1871 – 1948) го проучувал однесувањето на цените на акциите на пазарот. Тој тврдел дека сите човечки активности имаат три клучни карактеристики: сооднос, време и шема, а сите можат да се претстават преку Фибоначиевите броеви. Оваа теорија била создадена во времето по Големата Депресија во 1929 година. Елиот одлучил да ги анализира историските перформанси на акциите и движењето на трговијата со цел да најде причина за настанувањето на економскиот пад. Тој утврдил дека движењето на пазарните трендови формирало повторлива шема, којашто се состоела од растови и падови. Овие движења ги нарекол „бранови“, при што некои од нив ги нарекол „импулсивни“, а други – „корективни“ и согледал дека тие би можеле да се користат за предвидување на движењето на пазарните трендови. Со овој пристап на Елиот, Фибоначиевите броеви станале видливи и во овие движења и во економијата воопшто, [10].

2.1. КОЈ БИЛ РАЛФ НЕЛСОН ЕЛИОТ?

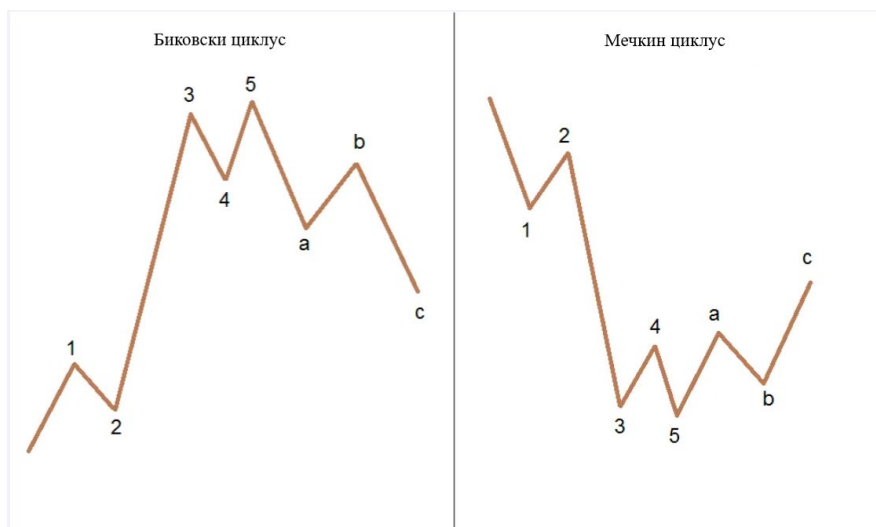
Ралф Нелсон Елиот (28 Јули, 1871–15 јануари, 1948) бил американски сметководител. Започнал да се занимава со својата професија во средината на 90-тите години на XIX век и главно работел на раководни позиции за железници во Централна Америка и Мексико. Долго време живеел во Тексас, но поради општествената нестабилност, со семејството се преселил во Њујорк, каде што започнал успешна консултантска фирма. Во 1924 година, Министерството за надворешни работи на САД

(анг. US State Department) го ставил на позиција главен сметководител на Никарагва, којашто во тоа време била под контрола на САД. Тој напишал две книги поврзани со неговите професионални искуства: *Tea Room and Cafeteria Management* (прев. *Менаџмент на чајилница и кафетерија*) и *The Future of Latin America* (прев. *Иднината на Латинска Америка*). На 58 годишна возраст тој потешко се разболел и бил принуден да се пензионира. Во тоа време одлучил да се занимава со правилно управување на пазарот на хартии од вредност и да ги проучува неговите движења. Ја развил теоријата на бранови (wave principle) којашто е еден вид техничка анализа што ги идентификува трендовите на финансиските пазари. Своето откритие и бројните правила ги објавувал преку разни писма и статии во весникот *Financial World*. Во 1938 година, Чарлс Колинс, издавач на билтен за дневниот национален финансиски пазар, ја напишал книгата *The Wave Principle* (прев. *Принципот на бранови*) под името на Елиот. Во раните 40-ти години на XX век, Елиот ја проширил својата теорија со примена врз сите колективни човечки однесувања и во 1946 година, две години пред да почине, го објавил своето последно обемно дело *Nature's Law – The Secret of the Universe* (прев. *Закомот на природата – Тајната на Универзумот*), [4].

2.2. БИКОВИ И МЕЧКИ

Пред да ја разгледаме главната идеја на теоријата на Елиот, ќе направиме краток осврт на некои психолошки моменти и на некои поими од економијата. Техничката анализа зависи од прецизни и навремени информации за цените. Што е тоа цена? *Цена* е директен резултат од размената, односно трошењето што се случува меѓу „купувачите“ и „продавачите“ во одредено време. Тргувањето со акции создава динамичен систем каде што некои трговци остануваат, некои си одат, а некои чекаат. Тие состојби постојано се менуваат. Двете главни сили коишто влијаат врз однесувањето на пазарот се страв и алчност. На пример, некои учесници при позитивно пазарно движење влегуваат во пазарот со цел лесно да стекнат пари. Други се плашат од тоа да не забележат некоја скорешна промена во пазарот и да пропуштат профитабилна акција или пак да останат заглавени во неповолна ситуација. Ме-

ѓутоа, со падот на цените, определена група на инвеститори може да вложи во определени акции, очекувајќи нивен раст по извесен период. Така, некои учесници на пазарот „мечка“ заземаат „биковска“ позиција, [4]. Да го објасниме ова.



Слика 3. Биковски циклус (лево), мечкин циклус (десно).

Финансиските пазари можат да се опишат како бикови или мечки. Биковите (анг. Bull markets) имаат растечка вредност на акциите и стабилна економија, додека кај мечките (анг. Bear markets) вредноста на акциите опаѓа и економијата е во рецесија. Интересно е тоа што ваквите пазари често сами себе се засилуваат поради тоа што исто така ги претставуваат мислите и очекувањата на инвеститорите. Така, доколку пазарот е мечка, тогаш се смета дека вредноста на акциите ќе продолжи да опаѓа, па заради тоа продажбата на акции е поголема од купувањето и, како резултат на тоа, состојбата на пазарот воопшто не се менува. Истото важи и за биковите, само што има поголемо барање за акции, но нема доволно количество. Односно сите сакаат да купат акции, но нема многу што продаваат. Пазарите „мечки“ често претставуваат економија која е во рецесија и има висока стапка на невработеност, а биковите претставуваат економија во раст и ниска стапка на невработеност, бидејќи инвеститорите имаат повеќе пари и имаат поголема наклонетост да ги трошат. Еден пазар се смета за мечка кога вредноста на акциите е падната за 20% или повеќе од последната највисока вредност.

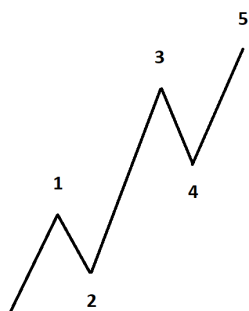
Клучниот фактор во утврдување дали пазарот е мечка или бик е како пазарот реагира на подолг рок. Почетната реакција на одреден настан не е индикатор на идната природа на пазарот. Но, дури ни на долг рок не може да се категоризира како мечка или бик, бидејќи е можно пазарот да минува низ период на стагнација пред да се определи во која насока ќе се движи, па воопшто нема да има ниту добивки ниту загуби.

Во пазар „бик“, најдобрата стратегија на инвеститорот е да купува акции на почетокот додека нивната цена е ниска и потоа да ги продава кога достигнуваат максимална вредност. Притоа, сите трошоци што настануваат на ваков пазар се релативно ниски, неважни и краткотрајни. Но, во мечка, ризикот на загуба е поголем, бидејќи вредноста на акциите постојано опаѓа. Може да се инвестира во ваков пазар, но повисоки се шансите дека ќе се претрпат поголеми загуби пред да се подобри состојбата на пазарот. Најчесто, најпрофитабилното нешто што може да се направи е брзо да се продадат акциите или да се инвестира во побезбедна опција, како на пример, индустриите што се под сопственост на државата (секогаш се купува од нив независно од економската состојба), [4].

3. ПОЈАВА НА ФИБОНАЧИЕВИТЕ БРОЕВИ ВО ЕЛИОТОВИОТ ПРИНЦИП НА БРАНОВИ

Веќе ги спомнавме импулсивните и корективните бранови во теоријата на Елиот. *Импулсивен бран* е термин којшто опишува силно движење во цената на финансиските средства што се совпаѓа со главниот правец на постечкиот тренд. Интересно нешто во врска со шемите на импулсивните бранови од теоријата на Елиот е дека тие не се ограничени на одреден временски период. Ова им овозможува на одредени бранови да траат неколку часа, неколку месеци или години, па дури и децении.

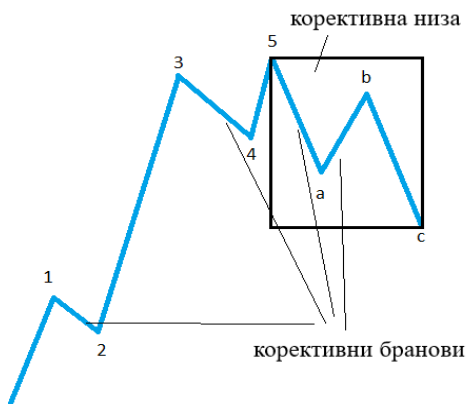
Без оглед на временската рамка, импулсивните бранови секогаш се движат во иста насока каков што е трендот гледан на една поголема скала. Овие импулсивни бранови се прикажани на Слика 4, како бран 1, бран 3 и бран 5. Брановите 1, 2, 3, 4 и 5 заедно формираат 5-брановен импулс, гледано на една поголема скала.



Слика 4. Идеализиран импулсивен бран.

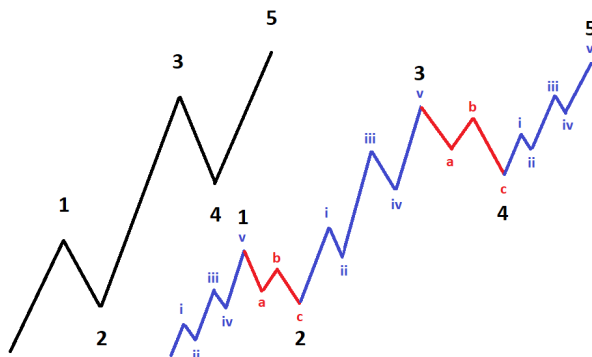
Корективните бранови се составени од три помали бранови што се движат во обратна насока. За тие што се залагаат за оваа теорија, пазарот бик се состои од 5-брановен импулс, а пазарот мечка се состои од корективни поправки, независно од нивната големина.

Да видиме како сето ова има врска со Фибоначиевите броеви. Елиот забележал дека пазарите мечки се состојат од 2 импулсивни бранови и 1 корективен бран, притоа формирајќи вкупно 3 бранови. Исто така, пазар бик се состои од 3 импулсивни, па 2 корективни бранови, со што се добиваат вкупно 5 бранови. Целосен пазарен циклус би бил комбинација од сите овие движења, односно би се состоел од 8 бранови.



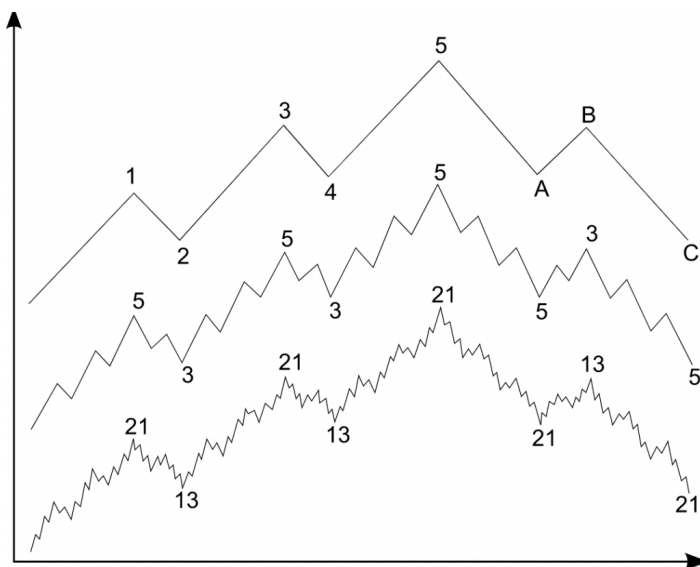
Слика 5. Идеализиран импулсивен бран со поединечни корективни бранови (2 и 4) и корективна низа последователни бранови (a, b и c).

Притоа, Елиотовиот принцип на бранови тврди дека секој поголем бран може да се подели на помали и средни бранови. Следува пазарот „мечка“ кој има 13 средни бранови, додека следниот пазар „бик“ има 21 среден бран, формирајќи вкупно 34 бранови.



Слика 6. Идеализиран импулсивен бран (лево), импулсивни бранови со корективна низа бранови (десно).

Продолжувајќи со низата, пазарите „мечка“ имаат 55 помали бранови, а пазарите „бик“ имаат 89, создавајќи вкупно 144 помали бранови. Елиот самиот не се изненадил од појавата на Фибоначиевите броеви во пазарот на акции поради тоа што тој не е природна појава и, како сите нешта создадени од човекот, следи определено однесување (idiosyncrasy). Елиот, во [4], истакнал дека оваа појава не била посебна за финансиските пазари, туку дека се среќава како закон на природата. Ова е всушност златниот пресек (златниот однос). Овој однос, заедно со други односи настанати како резултат од Фибоначиевите броеви, може да се користи за предвидување на цената на акциите.



Слика 7. График на Елиотовиот принцип на бранови.

Според Елиот и односот помеѓу два бранови може да се користи како индикатор на цените на акциите. По растот на цените, следи нивен пад, односно „поправка“ на првиот раст. Притоа, се забележало дека највисоката можна поправка е 61,8%, т.е. 61,8 Фибоначиеви проценти на првиот раст на цената. Овој процент е всушност златниот пресек.

Денес, анализата на финансиските пазари користи шеми на бранови и поправки за да се предвиди однесувањето на пазарот. Но, Фибоначиевите броеви се користат за предвидување на движењето на пазарот преку анализа на неговото однесување во минатото. Може да има 34 или 55 месеци помеѓу значајни пазарни промени, било да е раст или пад, или 21 или 13 денови помеѓу помали флукуации. Ваквите предвидувања можат да бидат многу прецизни. Така, Елиот точно го предвидел денот на кој завршил падот на пазарите мечки којшто траел од 1933 до 1935 година.

4. ПРИМЕНА НА ФИБОНАЧИЕВАТА НИЗА КАЈ ПОПРАВКИ, ЛАКОВИ, ЗРАЦИ И ВРЕМЕНСКИ ЗОНИ

Кога се користи при техничката анализа, златниот однос типично се преведува во три проценти: 38,2%, 50% и 61,8%. Сепак, кога има потреба, може да се користат и некои други, како на пример: 23,6%, 161,8%, 423%, итн.

Постојат четири начини според кои Фибоначиевата низа може да се примени кај графикони и тоа: поправки (анг. retracements), [6], лаци, зраци и временски зони. Меѓутоа, не можат сите да се користат во дадена ситуација. Фибоначиевите поправки користат хоризонтални линии за да покажат во кои области има поддршка или отпор. Нивните нивоа се пресметуваат користејќи ги највисоките и најниските точки во графиконот. Потоа се создаваат пет линии: првата стои на 100% (највисоката точка), втората стои на 61,8%, третата – на 50%, четвртата – на 38,2% и последната – на 0% (најниската точка). Секогаш кога настанува промена на цената, било да е раст или пад, новите нивоа на поддршка или отпор често се или на овие линии или близу до нив, Слика 8, [9].



Слика 8. Фибоначиева поправка, [2].

Фибоначиевите лаци се полукругови коишто излегуваат од права линија којашто поврзува висока и ниска точка. Тие се всушност три лаци коишто прават пресек на таа линија во 38,2%, 50%, 61,8% и 78,6%. Тие се користат за предвидување на степенот на поддршка и отпор како и за идеални области за тргување, Слика 9.



Слика 9. Фибоначиеви лаци, [2].

Фибоначиевите зраци се составени од дијагонални линии. Откако е определена највисоката и најниската точка на графиконот, се црта хоризонтална линија од најдесната точка на графикот.



Слика 10. Фибоначиеви зраци, [9].

Оваа линија потоа се дели на 38,2%, 50% и 61,8% и се цртаат линии од најлевата точка на графикот низ овие координати. Овие линии се индикатори на поддршка и отпор, Слика 10.

Фибоначиевите временски зони, за разлика од останатите Фибоначиеви методи, се вертикални линии.



Слика 11. Фибоначиеви временски зони, [9].

Тие се формираат преку поделба на графиконот на делови користејќи вертикални линии чијшто простор меѓу нив е тој на Фибоначиевите броеви (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, итн.). Секоја линија претставува време во коешто може да се очекува значајна промена на цената, Слика 11.

5. ЗАКЛУЧОК

Елиотовиот принцип на бранови е одлична стратегија за тргување кога се користи правилно, [4]. Негова слабост се многубројните правила и услови кои го прават доста тежок за користење. Покрај тоа, може да се случи да постојат различни интерпретации на принципот за еден ист пазар заради некои информации што ги поседуваат брокерите. Но, извесно е дека сите инвеститори би имале корист од него. Тој го предвидува движењето на пазарот, создава организираност и дисциплинираност при тргување со акции и, можеби најважно, Елиотовиот принцип на бранови е единствената теорија за тргување којашто го зема предвид времето како фактор.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] В. Јорданов, *Паскалов триаголник - конструкција, шеми од броеви и примени*, Портал ПОИМ на Институтот за математика, ПМФ, Скопје, 4 јуни 2015, <http://poim-pmf.weebly.com/paskalov-triagolnik.html>
- [2] J. Kuepper, *Fibonacci and the Golden Ratio*, Investopedia, Technical Analysis Basic Education, Nov. 3, 2020 <https://www.investopedia.com/articles/technical/04/033104.asp>
- [3] T. Koshy, *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, Vol. 1, Second edition, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2018.
- [4] G. A. MacLean, *Fibonacci and Gann Applications in Financial Markets*, John Wiley & Sons, Ltd., 2005.
- [5] E. McKenzie, *Origins of the Fibonacci Sequence*, The Classroom, <https://www.theclassroom.com/origins-fibonacci-sequence-9528.html>

- [6] C. Murphy, *What Are Fibonacci Retracements and Fibonacci Ratios?*, Investopedia, Technical Analysis Basic Education, Oct. 21, 2020.
www.investopedia.com/ask/answers/05/fibonacciretracement.asp
- [7] A. S. Posamentier, I. Lehmann, *The (Fabulous) Fibonacci Numbers*, Prometheus Books, 2007.
- [8] L. Sigler, G. J. Toomer, *Fibonacci's Liber abaci: a translation into modern English of Leonardo Pisano's Book of calculation*, in Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, Eds. J. Z. Buchwald, J. Lützen, G. J. Toomer, Springer Science+Business Media, LLC, 2003.
- [9] D. Vonko, *Understanding Fibonacci Numbers and their Value as Research Tool*, Investopedia, Advanced Trading Strategies and Instruments, Jun 2, 2020.
www.investopedia.com/articles/trading/06/fibonacci.asp
- [10] Wikipedia: the free encyclopedia, *Ralph Nelson Elliott*,
http://en.wikipedia.org/wiki/Ralph_Nelson_Elliott

¹ Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје
Економски факултет – Скопје
Бул. Гоце Делчев, бр. 9В, 1000 Скопје, Р. Северна Македонија
e-mail: jordanov.vlad@gmail.com

Примен: 14.3.2021

Поправен: 19.9.2021

Одобен: 28.9.2021

Објавен на интернет: 29.9.2021

ИДЕНТИТЕТОТ НА ТРОЕН ПРОИЗВОД НА ЈАКОБИ

Адмир Хусеини¹

1. ВОВЕД

Идентитетот на троен производ на Јакоби е следната равенка помеѓу q -производ и q -ред,

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}) \cdot (1 + q^{2n-1}z) \cdot (1 + q^{2n-1}z^{-1}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{k^2} z^k$$

каде што q и z се реални броеви.

Во делот 2 од овој труд ја развиваме теоријата на q -анализа, каде што главниот резултат е q -биномната формула на Гаус:

$$(x + a)_q^n = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \cdot q^{\frac{k \cdot (k-1)}{2}} \cdot a^k \cdot x^{n-k}$$

Од неа се изведува идентитетот на Јакоби во следната форма:

$$(1 - q)_q^{\infty} \cdot (1 - x)_q^{\infty} \cdot (1 - qx^{-1})_q^{\infty} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \cdot q^{\frac{k \cdot (k-1)}{2}} \cdot x^k$$

Почнувајќи од основните поими на q -анализата и користејќи само елементарни теореми и основни лимеси, го добиваме идентитетот на Јакоби. Овој идентитет може да се докаже и директно, без користење на теоријата на q -анализа. Во делот 3 ќе презентираме два директни докази. Првиот е еден од наједноставните директни докази, додека вториот е оригиналниот доказ на Јакоби. Во делот 4 се презентираат класични идентитети кои се непосредна последица на идентитетот на Јакоби. Материјалот е елементарен и секој читател кој има основни знаења од математичка анализа може да го разбере, но резултатите не се тривијални. Целта на трудот е да се покаже дека овие резултати може да се добијат со елементарни техники.

Резултатите и доказите не се оригинални туку се преземени од трудовите на цитираните автори. Сепак се обидов да дадам концизен приказ на различните тврдења и докази од заедничка гледна точка.

2. q –АНАЛИЗА И q –БИНОМНИ ФОРМУЛИ

Во овој дел ќе ја изложиме теоријата на q –анализа почнувајќи од основните поими, во аналогија со класичната анализа. Во овој контекст, $q \in \mathbb{R}$. Дефинициите и својствата во делот 2.2. се преземени од книгата [6].

2.1. q –ДИФЕРЕНЦИЈАЛ И q –БИНОМНИ КОЕФИЦИЕНТИ

Дефиниција 1. За која било полиномна функција од реална променлива $f(x)$, q –диференцијалот $d_q f$ се дефинира преку

$$d_q f(x) = f(qx) - f(x).$$

Веднаш следува дека $d_q x = (q - 1) \cdot x$. Може да се докажат формули за q –диференцијал на збир, разлика, производ и количник на две функции. Подолу го прикажуваме само правилото на производ.

$$\begin{aligned} d_q(f(x) \cdot g(x)) &= f(qx) \cdot d_q g(x) + d_q f(x) \cdot g(x) \\ &= f(x) \cdot d_q g(x) + d_q f(x) \cdot g(qx) \end{aligned}$$

Може да се види дека правилото на производот не е целосно симетрично, туку дека постојат две еквивалентни форми.

Дефиниција 2. q –извод се дефинира преку

$$D_q f(x) = \frac{d_q f(x)}{d_q x} = \frac{f(qx) - f(x)}{(q - 1) \cdot x}.$$

D_q е линеарен оператор. Од соодветните формули на q –диференцијалот може да се докажат формули за q –извод D_q на збир, разлика, производ и количник на две функции.

Аналогно како кај класичен извод, се дефинира k -ти q -извод D_q^k за $k > 1$ рекурзивно преку следнава формула:

$$D_q^k f(x) = D_q^{k-1} (D_q f(x))$$

Пример 1. За $f(x) = x^n$, каде што $n \in \mathbb{N}$, се добива дека

$$D_q(x^n) = \frac{(qx)^n - x^n}{(q-1)x} = \frac{q^n - 1}{q-1} \cdot x^{n-1} = [n] \cdot x^{n-1}$$

каде што

$$[n] = \frac{q^n - 1}{q-1} = 1 + q + \dots + q^{n-1}.$$

Притоа, $[n]$ е q -аналог на на ненегативен цел број n во класична анализа. Сега сакаме да ги најдеме q -аналозите на факториелите и биномите.

Дефиниција 3. Дефинираме $[0]! = 1$ и за $n = 1, 2, \dots$

$$[n]! = [n] \cdot [n-1] \cdots [1].$$

Конкретно, се добива следната вредност:

$$[n]! = \frac{q^n - 1}{q-1} \cdot \frac{q^{n-1} - 1}{q-1} \cdots \frac{q-1}{q-1}.$$

Слично ги воведуваме и q -биномните коефициенти.

Дефиниција 4. Гаусовиот или q -биномниот коефициент е дефиниран како

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[k]! \cdot [n-k]!}$$

Заменувајќи ги вредностите на факториелите, се добива

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{(q^n - 1) \cdot (q^{n-1} - 1) \cdot \dots \cdot (q-1)}{\{(q^k - 1) \cdot \dots \cdot (q-1)\} \cdot \{(q^{n-k} - 1) \cdot \dots \cdot (q-1)\}}.$$

За разлика од класичните биномни коефициенти, за $|q| < 1$ може да се земе лимес кога $n \rightarrow \infty$ при што се добиваат следните вредности.

Својство 1. За $|q| < 1$ границите на q -аналогот на n и на q -биномниот коефициент ги имаат следните вредности

$$\begin{aligned} [\infty] &= \lim_{n \rightarrow \infty} [n] = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{(1-q)_q^1}, \\ \left[\begin{matrix} \infty \\ k \end{matrix} \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = \frac{1}{(1-q) \cdots (1-q^k)} = \frac{1}{(1-q)_q^k}, \\ \left[\begin{matrix} \infty \\ \infty \end{matrix} \right] &= \lim_{n,k \rightarrow \infty} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = \frac{1}{(1-q) \cdot (1-q^2) \cdots} = \frac{1}{(1-q)_q^\infty}. \end{aligned} \quad (1)$$

Доказ. Формулите следуваат од својствата на гранични вредности на низи, како и $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ за $|q| < 1$.

$$\begin{aligned} [\infty] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q}, \\ \left[\begin{matrix} \infty \\ k \end{matrix} \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-q^{n-k+1}) \cdots (1-q^n)}{(1-q) \cdots (1-q^k)} = \frac{1}{(1-q) \cdots (1-q^k)}, \\ \left[\begin{matrix} \infty \\ \infty \end{matrix} \right] &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\begin{matrix} \infty \\ k \end{matrix} \right] = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{(1-q) \cdots (1-q^k)} = \frac{1}{(1-q)_q^\infty}. \end{aligned}$$

2.2. q -АНАЛОГ НА $(x-a)^n$ И НЕГОВИ q -ИЗВОДИ

Следно, ќе го дефинираме q -аналогот на $(x-a)^n$ за $n \in \mathbb{N}$, името $(x-a)_q^n$. Овој дел е преземен од Глава 3, стр. 7–12, [6].

Дефиниција 5. $(x-a)_q^n$ се дефинира на следниов начин:

$$\begin{aligned} (x-a)_q^0 &= 1 \text{ и за } n = 1, 2, \dots \\ (x-a)_q^n &= (x-a) \cdot (x-qa) \cdot \dots \cdot (x-q^{n-1}a). \end{aligned} \quad (2)$$

Својство 2. За $k \leq n$, важи

$$D_q^k((x-a)_q^n) = \frac{[n]!}{[n-k]!} \cdot (x-a)_q^{n-k}. \quad (3)$$

Доказ. Доказот се спроведува со индукција и едноставна примена на правилото за q -извод на производ.

Прво ја докажуваме формулата за $k = 1$:

$$\begin{aligned} & D_q((x-a)_q^{n+1}) \\ &= D_q((x-a)_q^n \cdot (x-q^n a)) \\ &= (x-a)_q^n \cdot \underbrace{D_q((x-q^n a))}_1 + (q \cdot x - q^n a) \cdot \underbrace{D_q((x-a)_q^n)}_{[n] \cdot (x-a)_q^{n-1}} \\ &= (x-a)_q^n + q \cdot (x-q^{n-1}a) \cdot [n] \cdot (x-a)_q^{n-1} \\ &= (1 + q \cdot [n]) \cdot (x-a)_q^n = \left(1 + q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}\right) \cdot (x-a)_q^n \\ &= [n+1] \cdot (x-a)_q^n, \end{aligned}$$

и потоа ја применуваме рекурзивно за да го добиеме резултатот за кој било позитивен број $k \leq n$.

Својство 3. За $n \in \mathbb{N}$ важи

$$D_q\left(\frac{(x-a)_q^{n+1}}{[n+1]!}\right) = \frac{(x-a)_q^n}{[n]!}. \quad (4)$$

Доказ. Ова следува од формулата (3) за $k = 1$:

$$D_q\left(\frac{(x-a)_q^{n+1}}{[n+1]!}\right) = \frac{D_q((x-a)_q^{n+1})}{[n+1]!} = \frac{[n+1] \cdot (x-a)_q^n}{[n+1]!} = \frac{(x-a)_q^n}{[n]!}.$$

Својство 4. За $n \in \mathbb{N}$ важи:

$$\begin{aligned} (0-a)_q^n &= (-1)^n q^{\frac{n \cdot (n-1)}{2}} \cdot a^n, \\ (x-0)_q^n &= x^n. \end{aligned} \quad (5)$$

Доказ. Ако се заменат $x = 0$ и $a = 0$ во формулата (2), се добиваат соодветно следните вредности

$$(0+a)_q^n = (0-a) \cdot (0-qa) \dots (0-q^{n-1}a) = (-1)^n q^{\frac{n \cdot (n-1)}{2}} \cdot a^n,$$

$$(x - 0)_q^n = (x - 0) \cdot (x - q \cdot 0) \cdots (x - q^{n-1} \cdot 0) = x^n.$$

Потребни ни се и следниве резултати:

Својство 5. За позитивни цели броеви $m, n \in \mathbb{N}$ важи

$$(x - a)_{q^{m+n}}^{m+n} = (x - a)_q^m \cdot (x - q^m a)_q^n. \quad (6)$$

Доказ. Ако се групираат множителите во производот од формулата (2), се добива

$$\begin{aligned} (x - a)_{q^{m+n}}^{m+n} &= (x - a) \cdot (x - q \cdot a) \cdots (x - q^{m+n-1} \cdot a) \\ &= \{(x - a) \cdots (x - q^{m-1} \cdot a)\} \\ &\quad \cdot \{(x - (q^m a)) \cdot (x - q \cdot (q^m a)) \cdots (x - q^{n-1} \cdot (q^m a))\} \\ &= (x - a)_q^m \cdot (x - q^m a)_q^n. \end{aligned}$$

Претходната формула (6) може да се напише и како

$$(x - q^{-m} a)_{q^{m+n}}^{m+n} = (x - q^{-m} a)_q^m \cdot (x - a)_q^n.$$

Својство 6. За позитивни цели броеви $m, n \in \mathbb{N}$ важи

$$\begin{aligned} (1 - q^{-m} a)_q^m &= (-1)^m q^{-\frac{m \cdot (m+1)}{2}} \cdot a^m \cdot \left(1 - \frac{q}{a}\right)_q^m, \\ (1 - q^{-m} a)_{q^{m+n}}^{m+n} &= (-1)^m q^{-\frac{m \cdot (m+1)}{2}} \cdot a^m \cdot \left(1 - \frac{q}{a}\right)_q^m \cdot (1 - a)_q^n. \end{aligned} \quad (7)$$

Доказ. Првата формула следува од групирањето на множителите во производот од формулата (2):

$$\begin{aligned} (1 - q^{-m} a)_q^m &= (1 - (q^{-m} a)) \cdot (1 - q \cdot (q^{-m} a)) \cdots (1 - q^{m-1} \cdot (q^{-m} a)) \\ &= \left(1 - \frac{a}{q^m}\right) \cdot \left(1 - \frac{a}{q^{m-1}}\right) \cdots \left(1 - \frac{a}{q}\right) \\ &= \frac{a}{q^m} \cdot \left(\frac{q^m}{a} - 1\right) \cdot \frac{a}{q^{m-1}} \cdot \left(\frac{q^{m-1}}{a} - 1\right) \cdots \frac{a}{q} \cdot \left(\frac{q}{a} - 1\right) \\ &= (-1)^m q^{-\frac{m \cdot (m+1)}{2}} \cdot a^m \cdot \left(1 - q^{m-1} \frac{q}{a}\right) \left(1 - q^{m-2} \frac{q}{a}\right) \cdots \left(1 - \frac{q}{a}\right) \\ &= (-1)^m q^{-\frac{m \cdot (m+1)}{2}} \cdot a^m \cdot \left(1 - \frac{q}{a}\right)_q^m. \end{aligned}$$

Сега втората формула од (7) лесно се добива

$$\begin{aligned} (1 - q^{-m}a)_q^{m+n} &= (1 - q^{-m}a)_q^m \cdot (1 - a)_q^n \\ &= (-1)^m q^{-\frac{m \cdot (m+1)}{2}} \cdot a^m \cdot \left(1 - \frac{q}{a}\right)_q^m \cdot (1 - a)_q^n. \end{aligned}$$

2.3. q – ТЕЈЛОРОВА ФОРМУЛА И

q – БИНОМНА ФОРМУЛА НА ГАУС

Сега сакаме да изведеме q –аналог на Тејлоровата, како и на биномната формула. Овој дел е преземен од главите 4 и 5, стр. 12–17, [6].

Ги дефинираме полиномите:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_k(x) &= \frac{(x - c)_q^k}{[k]!}, \text{ за } k = 1, 2, \dots, n \text{ и } c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Својство 7. Полиномите $P_k(x)$ ги исполнуваат следните услови:

- i) $P_0(c) = 1$ и $P_k(c) = 0$, за секој $k \geq 1$.
- ii) $\deg P_k = k$, за секој $k \in \mathbb{N}_0$.
- iii) $D_q P_k(x) = P_{k-1}(x)$, за секој $k \geq 1$ и $D_q(1) = 0$.

Доказ. Условите i) и ii) се очигледни, а iii) е последица од формулата (4).

Теорема 1 (q – Тејлорова формула). За кој било полином $f(x)$ со $\deg f \leq n$, важи

$$f(x) = \sum_{k=0}^n (D_q^k f)(c) \frac{(x - c)_q^k}{[k]!}. \quad (8)$$

Доказ. Нека е V векторскиот простор од сите полиноми со степен $k \leq n$. Полиномите P_0, P_1, \dots, P_n се линеарно независни поради условот ii) од Својството 7. Бидејќи нивните степени строго се зголемуваат, тие формираат база на V и затоа секој полином $f \in V$ може да го запишеме на единствен начин како

$$f = \sum_{k=1}^n c_k P_k.$$

Од условот iii) од Својството 7 следува дека

$$D_q^j P_k = P_{k-j}.$$

За да го пресметаме c_k , ќе ја пресметаме прво вредноста на $(D_q^j f)(c)$.

$$\begin{aligned} (D_q^j f)(c) &= \sum_{k=1}^n c_k (D_q^j P_k)(c) \\ &= \sum_{k=j}^n c_k P_{k-j}(c) \\ &= c_j \cdot 1 + c_{j+1} \cdot 0 + \dots + c_n \cdot 0 \\ &= c_j, \end{aligned}$$

бидејќи од условот i) од Својството 7 следува дека $P_{k-j}(c) = 1$ само за $k = j$, а за сите други вредности е нула. Ова ја докажува q –Тејлоровата формула.

Теорема 2. (*q –Биномна формула на Гаус*) За реална променлива x , произволен реален број a и природен број n , важи

$$(x + a)_q^n = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \cdot q^{\frac{k \cdot (k-1)}{2}} \cdot a^k \cdot x^{n-k}. \quad (9)$$

Доказ. Ја применуваме q –Тејлоровата формула (8) на полиномот $f(x) = (x + a)_q^n$ во $c = 0$ и со користење на формулата (3) добиваме:

$$\begin{aligned} (x + a)_q^n &= \sum_{k=0}^n (D_q^k f)(c) \frac{(x - c)_q^k}{[k]!} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{[n]!}{[n - k]!} \cdot (c + a)_q^{n-k} \frac{(x - c)_q^k}{[k]!} \\ &= \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \cdot (0 + a)_q^{n-k} \cdot (x - 0)_q^k. \end{aligned}$$

Користејќи ги вредностите од формулата (5), се добива

$$(x + a)_q^n = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \cdot q^{\frac{(n-k) \cdot (n-k-1)}{2}} \cdot a^{n-k} \cdot x^k.$$

Формулата на Гаус следува од замените $n - k \mapsto k$ и равенството

$$\begin{bmatrix} n \\ n - k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

Теорема 3. *За реална променлива x , произволен реален број a и природен број n , важи*

$$\left(1 - \frac{q}{a}\right)_q^m \cdot (1 - a)_q^n = \sum_{k=-m}^n \begin{bmatrix} m + n \\ m + k \end{bmatrix} \cdot (-1)^k \cdot q^{\frac{k \cdot (k-1)}{2}} \cdot a^k. \quad (10)$$

Доказ. Ако се заменат вредностите $x \rightarrow 1, a \rightarrow q^{-m}a$ во Гаусовата q -биномна формула (9), се добива

$$\begin{aligned} (1 - q^{-m}a)_q^{m+n} &= \sum_{k=0}^{m+n} \begin{bmatrix} m + n \\ k \end{bmatrix} \cdot q^{\frac{k \cdot (k-1)}{2}} \cdot (-q^{-m}a)^k \\ &= \sum_{k=0}^{m+n} \begin{bmatrix} m + n \\ k \end{bmatrix} \cdot (-1)^k \cdot q^{\frac{k \cdot (k-1)}{2} - mk} \cdot a^k. \end{aligned}$$

Ако се заменат вредностите од формулата (7) се добива

$$\begin{aligned} (-1)^m q^{-\frac{m \cdot (m+1)}{2}} \cdot a^m \cdot \left(1 - \frac{q}{a}\right)_q^m \cdot (1 - a)_q^n \\ = \sum_{k=0}^{m+n} \begin{bmatrix} m + n \\ k \end{bmatrix} \cdot (-1)^k \cdot q^{\frac{k \cdot (k-1)}{2} - mk} \cdot a^k. \end{aligned}$$

$$\left(1 - \frac{q}{a}\right)_q^m \cdot (x - a)_q^n = \sum_{k=0}^{m+n} \begin{bmatrix} m + n \\ k \end{bmatrix} \cdot (-1)^{k-m} \cdot q^{\frac{(k-m) \cdot (k-m-1)}{2}} \cdot a^{k-m}.$$

каде што користиме дека $\frac{k \cdot (k-1)}{2} - mk + \frac{m \cdot (m+1)}{2} = \frac{(k-m) \cdot (k-m-1)}{2}$. Со

промена на индексот $k \mapsto m + k$ се добива формулата (10).

Да спомнеме дека важи и слична формула

$$\frac{1}{(1-x)_q^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k. \quad (11)$$

која се нарекува *биномна формула на Хајне*. Читателот може да го најде доказот во книгата [6], Глава 8, стр. 27–29.

2.4. ТЕОРЕМИТЕ НА ОЈЛЕР И ЈАКОБИ

Во овој дел ќе изведеме два добро познати резултати на Ојлер, како и идентитетот на Јакоби земајќи лимеси кога $n \rightarrow \infty$ на биномните формули од претходниот дел. Овој дел е преземен од Глава 9, стр. 29–33, [6].

Теорема 4. (Ојлер) *За реална променлива x и произволен реален број q , каде што $|q| < 1$, важи*

$$\begin{aligned} (1+x) \cdot (1+qx) \cdot (1+q^2x) \cdot \dots &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{k \cdot (k-1)}{2}}}{(1-q) \cdot \dots \cdot (1-q^k)} \cdot x^k, \\ \frac{1}{(1-x) \cdot (1-qx) \cdot (1-q^2x) \cdot \dots} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q) \cdot \dots \cdot (1-q^k)} \cdot x^k. \end{aligned} \quad (13)$$

Овие идентитети пократко може да се напишат во следната форма

$$\begin{aligned} (1+x)_q^\infty &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{k \cdot (k-1)}{2}}}{(1-q)_q^k} \cdot x^k, \\ \frac{1}{(1-x)_q^\infty} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q)_q^k} \cdot x^k. \end{aligned}$$

Доказ. Земајќи лимес кога $n \rightarrow \infty$ на биномната формула на Гаус (9) за вредности $x = 1$, $a = z$, се добива првата формула

$$(1+z)_q^\infty = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \infty \\ k \end{bmatrix} \cdot q^{\frac{k \cdot (k-1)}{2}} \cdot z^k.$$

Втората формула следува од лимесот кога $n \rightarrow \infty$ на биномната формула на Хајне (11)

$$\frac{1}{(1-z)_q^\infty} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \infty \\ k \end{bmatrix} z^k.$$

Теорема 5. (Јакоби) За реална променлива x и произволен реален број

q , $\epsilon \emptyset |q| < 1$, важи

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}) \cdot (1 + q^{2n-1}x) \cdot (1 + q^{2n-1}x^{-1}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} \cdot x^n. \quad (14)$$

Доказ. Земајќи лимес кога $m, n \rightarrow \infty$ од двете страни на формулата (10), добиваме

$$\left(1 - \frac{q}{a}\right)_q^\infty \cdot (1 - a)_q^\infty = \frac{1}{(1 - q)_q^\infty} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \cdot q^{\frac{k \cdot (k-1)}{2}} \cdot a^k.$$

Притоа ја искористивме формулата (1) за да го пресметаме лимесот на биномниот коефициент. Од тука следува

$$(1 - q)_q^\infty \cdot (1 - a)_q^\infty \cdot (1 - qa^{-1})_q^\infty = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \cdot q^{\frac{k \cdot (k-1)}{2}} \cdot a^k.$$

Ако се запишат заедно соодветните множители од формулата (2) во производот во левата страна се добива

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) \cdot (1 - q^{n-1}a) \cdot (1 - q^n a^{-1}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \cdot q^{\frac{n \cdot (n-1)}{2}} \cdot a^n.$$

Тврдењето следува од замената $q \mapsto q^2$, а потоа $a \mapsto -qx$.

3. ДИРЕКТНИ ДОКАЗИ НА ИДЕНТИТЕТОТ НА ЈАКОБИ

Во овој дел ќе презентираме докази на идентитетот на Јакоби, кои се засноваат на директно користење на бесконечни редови и производи. Целта е да се добијат претставувања на бесконечни производи во форма

на бесконечни редови, Лоранови редови или парцијални дробки. Овие докази се добиваат на следниот начин:

1. Од бесконечниот производ се изведува едноставна функционална равенка,
2. Функциите се претставуваат како соодветен ред со неопределени коефициенти,
3. Се изведува рекурентна релација за коефициентите преку чекор 1,
4. Се решава рекурентната релацијата.

Резултатите од следните делови ќе послужат како убави примери на техниката користена за докажување на вакви идентитети.

3.1. ПРВ ДИРЕКТЕН ДОКАЗ

Во овој дел, преземен од трудовите [2] и [9], даваме директен доказ на формулата (14), следејќи ги горенаведените чекори. Левата страна на (14) ја означуваме со $I(z)$

$$I(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}) \cdot (1 + q^{2n-1} \cdot z) \cdot (1 + q^{2n-1} \cdot z^{-1}).$$

и дефинираме

$$J(z) = I(z^2) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}) \cdot (1 + q^{2n-1} \cdot z^2) \cdot (1 + q^{2n-1} \cdot z^{-2}).$$

Теорема 6. *Ако $|q| < 1$, тогаш*

$$J(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} z^{2n}. \quad (15)$$

Доказ. Доказот ќе го презентираме според горенаведените чекори.

Чекор 1. Ќе го докажеме равенството

$$J(z) = qz^2 J(qz). \quad (16)$$

Навистина,

$$J(qz) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}) \cdot (1 + q^{2n-1} \cdot (qz)^2) \cdot (1 + q^{2n-1} \cdot (qz)^{-2})$$

$$\begin{aligned}
 &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}) \cdot (1 + q^{2n+1} z^2) \cdot (1 + q^{2n-3} z^{-2}) \\
 &= \left(\frac{1}{1 + q \cdot z^2} \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{q \cdot z^2} \right) J(z) \\
 &= \frac{J(z)}{q \cdot z^2}.
 \end{aligned}$$

Чекор 2.

$$J(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^{2n}.$$

каде што $a_{-2n} = a_{2n}$. Од функционалната равенка (16) заклучуваме дека:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^{2n} &= (q \cdot z^2) \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (qz)^{2n} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n q^{2n+1} z^{2n+2} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{n-1} q^{2n-1} z^{2n}.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Чекор 3 и 4. Од равенката (17) следува дека $a_0 = 1$, $a_n = a_{n-1} \cdot q^{2n-1}$ и оттука

$$\begin{aligned}
 a_n &= a_{n-1} \cdot q^{2n-1} = a_{n-2} \cdot q^{2n-3} \cdot q^{2n-1} \\
 \dots &= q \cdot q^3 \cdot \dots \cdot q^{2n-3} \cdot q^{2n-1} = q^{1+3+\dots+(2n-3)+(2n-1)} = q^{n^2},
 \end{aligned}$$

со што се докажува равенката (15). Оригиналниот идентитет на Јакоби (14) следува со замена $z^2 \mapsto x$.

3.2. ОРИГИНАЛНИОТ ДОКАЗ НА ЈАКОБИ

Овој дел е преземен од книгата [2], стр.180 и трудот [8]. Ги дефинираме следниве бесконечни q -производи:

$$\begin{aligned}
 F(z) &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n-1} \cdot z), \\
 G(z, q) &= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - q^n \cdot z)}, \\
 H(z) &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n-1} \cdot z) \cdot (1 + q^{2n-1} \cdot z^{-1}).
 \end{aligned} \tag{17}$$

Потоа ги претставуваме $F(z)$ и $G(z, q)$ како бесконечни редови и парцијални дропки, соодветно. Нив ги користиме за да го добиеме Лорановиот ред на $H(z)$, имено:

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(1 - q^2) \cdots (1 - q^{2n}) \cdots} z^n. \tag{18}$$

Од двете претставувања на $H(z)$, дадени со формулите (17) и (18) следува идентитетот на Јакоби.

Својство 8. За $F(z)$ и $G(z, q)$ важат следните функционални равенки

$$\begin{aligned}
 F(z) &= (1 + q \cdot z) \cdot F(q^2 z), \\
 G(z, q) &= \frac{G(qz, q)}{1 - qz}.
 \end{aligned} \tag{19}$$

Доказ. Равенката за $F(z)$ се добива со одвојување на првиот множител од производот (17) и поместување на индексот на преостанатиот бесконечен производ

$$\begin{aligned}
 F(z) &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n-1} \cdot z) \\
 &= (1 + q \cdot z) \cdot \prod_{n=2}^{\infty} (1 + q^{2n-1} \cdot z) \\
 &= (1 + q \cdot z) \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2(n+1)-1} \cdot z)
 \end{aligned}$$

Идентитетот на троен производ на Јакоби

$$\begin{aligned}
 &= (1 + q \cdot z) \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n-1} \cdot (q^2 z)) \\
 &= (1 + q \cdot z) \cdot F(q^2 z).
 \end{aligned}$$

На сличен начин, од формулата (17) следува дека

$$\begin{aligned}
 G(z, q) &= \frac{1}{(1 - q \cdot z) \cdot (1 - q^2 \cdot z) \cdot (1 - q^3 \cdot z) \dots} \\
 &= \frac{1}{(1 - q \cdot z)} \cdot \left(\frac{1}{(1 - q \cdot (qz)) \cdot (1 - q^2 \cdot (qz)) \dots} \right) \\
 &= \frac{G(qz, q)}{1 - qz}. \square
 \end{aligned}$$

Да ја запишеме функцијата $F(z)$ како бесконечен ред

$$F(z) = A_0 + A_1 \cdot z + A_2 \cdot z^2 + \dots \quad (20)$$

а функцијата $G(z, q)$ како парцијална дробка

$$G(z, q) = B_0 + \frac{B_1 z}{1 - qz} + \frac{B_2 z^2}{(1 - qz)(1 - q^2 z)} + \dots \quad (21)$$

каде што $A_0 = 1$, и $B_0 = 1$.

Својство 9. Коefициентите A_n, B_n од (20) и (21) ги исполнуваат следните рекурентни релации

$$\begin{aligned}
 A_0 &= B_0 = 1, \\
 A_n &= A_n \cdot q^{2n} + A_{n-1} \cdot q^{2n-1}, \\
 B_n &= B_{n-1} q^{2n-1} + B_n q^n.
 \end{aligned} \quad (22)$$

Доказ. Ако во функционалната равенка (19) за $F(z)$ го замениме бесконечниот ред (20), се добива

$$\begin{aligned}
 &A_0 + A_1 \cdot z + A_2 \cdot z^2 + \dots \\
 &= (1 + q \cdot z) \cdot (A_0 + A_1 \cdot q^2 z + A_2 \cdot q^4 z^2 + \dots) \\
 &= A_0 + (A_1 \cdot q^2 + A_0 \cdot q) \cdot z + (A_2 \cdot q^4 + A_1 \cdot q^3) \cdot z^2 + \dots \\
 &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cdot q^{2n} + A_{n-1} \cdot q^{2n-1}) \cdot z^n.
 \end{aligned}$$

Со изедначување на коефициентите се добива дека

$$\begin{aligned} A_0 &= 1, \\ A_n &= A_n \cdot q^{2n} + A_{n-1} \cdot q^{2n-1}. \end{aligned}$$

Ако во функционалната равенка (19) за $G(z, q)$ ја замениме парцијалната дробка (21), се добива

$$1 + \frac{B_1 z}{1 - qz} + \frac{B_2 z^2}{(1 - qz)(1 - q^2 z)} + \dots = \frac{1}{1 - qz} + \frac{B_1 qz}{(1 - qz)(1 - q^2 z)} + \dots$$

Го користиме следниот едноставен идентитет

$$1 = (1 - q^n z) + q^n z, \quad n \in \mathbb{Z}$$

за да докажеме дека

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - qz} &= 1 + \frac{qz}{1 - qz} \\ \frac{z}{(1 - qz)(1 - q^2 z)} &= \frac{z}{1 - qz} + \frac{q^2 z^2}{(1 - qz)(1 - q^2 z)} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Сега, следува

$$\begin{aligned} 1 + \frac{B_1 z}{1 - qz} + \frac{B_2 z^2}{(1 - qz)(1 - q^2 z)} + \dots \\ = 1 + \frac{(q + B_1 q)z}{1 - qz} + \frac{(B_1 q^3 + B_2 q^2)z}{(1 - qz)(1 - q^2 z)} + \dots \end{aligned}$$

и оттука $B_n = B_{n-1} q^{2n-1} + B_n q^n$.

Својство 10. За $F(z)$ и $G(z, q)$ важат следните формули

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n(q) \cdot z^n, \\ G(z, q) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n(q) \cdot \frac{z^n}{(1 - qz) \dots (1 - q^n z)}. \end{aligned} \tag{23}$$

каде што

$$\begin{aligned} A_n(q) &= \frac{q^{n^2}}{(1 - q^2) \dots (1 - q^{2n})}, \\ B_n(q) &= \frac{q^{n^2}}{(1 - q) \dots (1 - q^n)}. \end{aligned} \tag{24}$$

Доказ. Коефициентите $A_n(q)$ се добиваат преку решавањето на рекурентните релации (22).

$$\begin{aligned} A_n(q) &= \frac{q^{2n-1}}{1-q^{2n}} \cdot A_{n-1}(q) \\ &= \frac{q^{2n-1}}{1-q^{2n}} \cdot \frac{q^{2n-3}}{1-q^{2n-2}} \cdot A_{n-2}(q) \\ &\vdots \\ &= \frac{q^{2n-1} \cdot q^{2n-3} \dots q^3 \cdot q^1}{(1-q^{2n}) \cdot (1-q^{2n-2}) \dots (1-q^2)} \\ &= \frac{q^{n^2}}{(1-q^{2n}) \cdot (1-q^{2n-2}) \dots (1-q^2)}. \end{aligned}$$

Последниот чекор следува од равенството

$$(2n-1) + (2n-3) + \dots + 3 + 1 = n^2.$$

Коефициентите B_n ја исполнуваат следната рекурентна релација

$$\begin{aligned} B_0(q) &= 1, \\ B_n(q) &= \frac{q^{2n-1}}{1-q^n} B_{n-1}(q). \end{aligned}$$

Решението се добива слично како во претходната релација и е

$$B_n(q) = \frac{q^{n^2}}{(1-q) \dots (1-q^n)}.$$

Ова го завршува доказот на формулите (23) и (24).

Доказот на следниот идентитет е малку потежок и не го следи стандардниот алгоритам. Наместо тоа, директно ги множиме формулите на производот и наоѓаме репрезентација на коефициентите, користејќи го претходниот резултат. Ова е основната идеја на Јакоби во неговиот доказ.

Својство 11 За $H(z)$ дефинирана во (17) важи следната формула

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(q) z^n, \quad (25)$$

каде што

$$C_n(q) = \frac{q^{n^2}}{(1-q^2)\cdots(1-q^{2n})\cdots}$$

Доказ. Да напишеме

$$\begin{aligned} F(z) &= A_0 + A_1 \cdot z + A_2 \cdot z^2 + \cdots, \\ H(z) &= (A_0 + A_1 \cdot z + A_2 \cdot z^2 + \cdots) \\ &\quad \cdot \left(A_0 + A_1 \cdot \frac{1}{z} + A_2 \cdot \frac{1}{z^2} + \cdots \right). \\ T_r(z, q) &= \frac{z^r}{(1-qz)(1-q^2z) \cdots (1-q^r z)} \end{aligned}$$

Бидејќи $H(z) = H(z^{-1})$, јасно е дека $C_n = C_{-n}$. Изразот со z^n доаѓа од множење на z^{n+r} со z^{-r} , каде што r е ненегативен цел број. Оттука следува дека

$$C_n = \sum_{r=0}^{\infty} A_{n+r} \cdot A_r.$$

Со замена на пресметаните вредности за A_n од формулата (24) се добива

$$\begin{aligned} A_{n+r} \cdot A_r &= \frac{q^{(n+r)^2}}{(1-q^2)\cdots(1-q^{2n+2r})} \cdot \frac{q^{r^2}}{(1-q^2)\cdots(1-q^{2r})} \\ &= \frac{q^{n^2+2nr+r^2}}{(1-q^2)\cdots(1-q^{2n+2r})} \cdot \frac{q^{r^2}}{(1-q^2)\cdots(1-q^{2r})} \\ &= \frac{q^{n^2}}{(1-q^2)\cdots(1-q^{2n})} \\ &\quad \cdot \left(\frac{q^{2nr}}{(1-q^{2n+2})\cdots(1-q^{2n+2r})} \cdot \frac{q^{2r^2}}{(1-q^2)\cdots(1-q^{2r})} \right) \\ &= \frac{q^{n^2}}{(1-q^2) \cdot (1-q^4)\cdots(1-q^{2n})} \cdot B_r(q^2) \cdot T_r(q^{2n}, q^2). \end{aligned}$$

Може да се препознаат изразите

$$B_r(q^2) = \frac{q^{2r^2}}{(1-q^2) \cdot (1-q^4)\cdots(1-q^{2r})},$$

Идентитетот на троен производ на Јакоби

$$T_r(q^{2n}, q^2) = \frac{q^{2nr}}{(1 - q^{2n+2}) \cdot (1 - q^{2n+4}) \dots (1 - q^{2n+2r})},$$

на $G(q^{2n}, q^2) = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} B_r(q^2) \cdot T_r(q^{2n}, q^2)$, и отука користејќи го производот

$$G(q^{2n}, q^2) = \frac{1}{(1 - q^{2n+2}) \cdot (1 - q^{2n+4}) \dots},$$

се наоѓа

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{r=0}^{\infty} A_{n+r} \cdot A_r = \frac{q^{n^2}}{(1 - q^2) \dots (1 - q^{2n})} \cdot \left(\frac{1 + \sum_{r=1}^{\infty} B_r(q^2) \cdot T_r(q^{2n}, q^2)}{G(q^{2n}, q^2)} \right) \\ &= \frac{q^{n^2}}{(1 - q^2) \dots (1 - q^{2n})} \cdot G(q^{2n}, q^2) \\ &= \frac{q^{n^2}}{(1 - q^2) \dots (1 - q^{2n})} \cdot \frac{1}{(1 - q^{2n+2}) \cdot (1 - q^{2n+4}) \dots}. \end{aligned}$$

Според тоа,

$$C_n = \frac{q^{n^2}}{(1 - q^2) \cdot (1 - q^4) \dots}.$$

со што доказот е готов.

Се гледа дека целта на Јакоби во дефинирањето на функцијата $G(q, z)$ е претворање на збирот $1 + \sum_{r=1}^{\infty} B_r(q^2) \cdot T_r(z, q^2)$ во производ. Доказот на овој идентитет е сведок за извонредните математички и пресметувачки вештини на Јакоби.

4. ПРИМЕНИ НА ИДЕНТИТЕТОТ НА ЈАКОБИ

Со одредени смени во идентитетот на Јакоби се добиваат повеќе корисни идентитети. Како примена изведуваме добро познати и класични идентитети на Ојлер, Гаус и Јакоби, чие истражување спаѓа во областите на елиптични функции, комбинаторика и аналитичка теорија на броеви.

Теоремите од оваа глава може да се најдат во книгите [3,4,5]. Овој дел е преземен од [7], секција 1.1, стр.3–10.

Теорема 7. (Јакоби) За $|uv| < 1, u \neq 0, v \neq 0$ важи

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - u^n v^n) (1 - u^n v^{n-1}) (1 - u^{n-1} v^n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n u^{\frac{n(n+1)}{2}} v^{\frac{n(n-1)}{2}}. \quad (26)$$

Доказ. Формулата (26) се добива со замените $q = \sqrt{uv}$ и $z = \sqrt{\frac{u}{v}}$ во идентитетот на Јакоби (14).

Теорема 8. (Ојлер, Гаус) За $|q| < 1$ и $m \in \mathbb{N}$ важи

$$\begin{aligned} & \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{n(m+1)}) (1 - q^{n(m+1)-m}) (1 - q^{n(m+1)-1}) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{n(n-1)(m+1)}{2} + n}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - q^n)^2}{1 - q^{2n}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2}, \quad (28)$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{n(3n-1)}{2}}. \quad (29)$$

Доказ. За првиот идентитет (27), треба да се направат замените $u \mapsto q$ и $v \mapsto q^m$ во идентитетот (26). Со овие смени изразите од левата страна на (26) го добиваат обликот

$$\begin{aligned} u^n v^n &= q^n \cdot (q^m)^n = q^{n \cdot (m+1)}, \\ u^n v^{n-1} &= u^n v^n \cdot v^{-1} = q^{n \cdot (m+1) - m}, \\ u^{n-1} v^n &= u^n v^n \cdot u^{-1} = q^{n \cdot (m+1) - 1}, \end{aligned}$$

што ги дава множителите на левата страна на (27). За десната страна, се добива

$$u^{\frac{n(n+1)}{2}} v^{\frac{n(n-1)}{2}} = q^{\frac{n(n+1)}{2}} (q^m)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Идентитетот на троен производ на Јакоби

$$\begin{aligned}
 &= q^{\frac{n}{2}((n+1)+m(n-1))} = q^{\frac{n}{2}((n-1)+m(n-1)+2)} \\
 &= q^{\frac{n(n-1)(m+1)}{2}+n}.
 \end{aligned}$$

Вториот идентитет (28) следи од (27), со замената $m = 1$.

$$\begin{aligned}
 &\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{n(m+1)}) (1 - q^{n(m+1)-m}) (1 - q^{n(m+1)-1}) \\
 &= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^n)}{(1-q^{2n})(1-q^{2n-1})} (1 - q^{2n-1}) \\
 &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) \cdot \frac{(1-q^n)}{(1-q^{2n})} \\
 &= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^n)^2}{(1-q^{2n})}.
 \end{aligned}$$

каде што производот на изразите над парни и непарни цели броеви го дава производот над сите природни броеви. Експонентот на q на десната страна на (27) за $m = 1$ е

$$\frac{n(n-1)(m+1)}{2} + n = n(n-1) + n = n^2.$$

Идентитетот (29) следува со замена на $m = 2$ во првиот идентитет (27).

$$\begin{aligned}
 &\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{n(m+1)}) (1 - q^{n(m+1)-m}) (1 - q^{n(m+1)-1}) \\
 &= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^n)}{(1-q^{3n})(1-q^{3n-2})(1-q^{3n-1})} \\
 &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n).
 \end{aligned}$$

Експонентот на q во десната страна на (27) станува

$$\frac{n(n-1)(m+1)}{2} + n = \frac{n}{2} (3(n-1) + 2) = \frac{n(3n-1)}{2}.$$

5. ЗАБЕЛЕШКИ

Мојата фасцинација за вакви идентитети и интересни пресметувачки резултати ја разбуди проф. Ристо Малчески за време на моите средношколски години. Алгебарските трансформации и основите на анализата ги научив од неговите учебници. Првпат се сретнав со вакви идентитети кога тој ме запозна со учебникот на Харди и Рајт, [4].

Правилно се запознав со оваа област за време на моите студии преку предавањата на проф. Еберхард Фрајтаг и проф. Зигрид Боге во Хајделберг. Проф. Боге го презентираше доказот на идентитетот на Јакоби на семинар и ме остави воодушевен. Тие ми дадоа како дипломска тема нов доказ на идентитетите на Мекдоналд, кои претставуваат модерно обопштување на идентитетот на Јакоби.

Им благодарам на организаторите на семинарот „Математика и примени“, проф. Ирена Стојковска и проф. Весна Целакоска-Јорданова кои ми дадоа можност да ја презентирам оваа тема пред јавноста. Исто така им благодарам на уредниците и рецензентите за нивните корисни забелешки и корекции за време на процесот на прегледување на трудот.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] W. Chu. *Jacobis triple product identity and the quintuple product identity*. Bollettino dell Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 10-B (3), 2007, 867–874.
- [2] J. A. Ewell. *An easy proof of the triple-product identity*. The American Mathematical Monthly, 88(4), 1981, p.270.
- [3] C.F. Gauss. *Hundert Theoreme ueber die neuen Transscendenten*, Gesammelte Werke, Volume 3, Goettingen, 1876, p. 461–469.
- [4] G. H. Hardy, E.M. Wright. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Oxford University Press, 2008.
- [5] C.G. J. Jacobi. *Fundamenta Nova Theoriae Functionum Ellipticarum*, Gesammelte Werke, Volume 1, Berlin, 1881.
- [6] V. Кас and P. Cheung. *Quantum Calculus*. Springer New York, 2002.

- [7] G. Koehler. *Eta Products and Theta Series Identities*. Springer Berlin Heidelberg, January 2013.
- [8] P.Singh. *Elliptic functions: Theta functions continued*. February 2011.
<https://paramanands.blogspot.com/2011/02/elliptic-functions-thetafunctions-contd.html>
- [9] R. Zaman. *The Jacobi triple product*.
<https://pdfslide.tips/documents/the-jacobi-triple-productpdf.html>

¹ Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје
Природно-математички факултет,
ул. Архимедова 3, 1000 Скопје, Р. Северна Македонија

² РИСАТ, Институт за истражување на наука и технологија,
Валона, Албанија,
е-mail: huseini@risat.org

Примен: 29.4.2021

Поправен: 9.6.2021

Одобрен: 25.9.2021

Објавен на интернет: 30.9. 2021

(НЕ)ВОЗМОЖНА ОСЛОБОДИТЕЛНА СТРАТЕГИЈА

Стево Ѓоргиев¹

Математичките загатки отсекогаш привлекувале големо внимание кај секој од нас. Многу често на прв поглед тие изгледаат нерешливи, конфузни и многу комплицирани. Многу често имаме случаи во кои нашата цел не е решавање на загатката, туку разбирање на решението на загатката. Исто така, не се ретки случаите во кои врз база на даденото решение на една загатка, се обидуваме да најдеме нејзино поелегантено решение. Една таква загатка е и загатката позната под името *100 затвореници*, која за прв пат била дадена во 2003 година од страна на данскиот компјутерски научник Питер Бро Милтерсен, [2].

1. ФОРМУЛАЦИЈА НА ЗАГАТКАТА

Како што кажува и самото име на оваа загатка, станува збор за затвореници чија крајна цел е да добијат ослободителна пресуда, односно да ја победат управата на затворот во играта која се игра под одредени правила. Овој проблем е поставен во многу различни верзии, но секоја од нив ја има истата цел. Во продолжение ќе наведеме две познати верзии на овој проблем. Прво ќе ја наведеме првичната формулација на проблемот, а потоа верзијата во која најчесто се среќава овој проблем, т.е. формулацијата како загатка.

Првична формулација: ([3,6]) Директорот на еден затвор, на 100 затвореници осудени на смртна казна, нумерирани со бројчиња од 1 до 100, им дава последна шанса за ослободување. Во една соба има шкафче со 100 фиоки. На случаен начин директорот става по едно бројче од 1 до 100 во секоја од фиоките. Затворениците влегуваат во собата еден по еден. Секој од затворениците може да отвори 50 фиоки по кој било редослед. Откако ќе заврши еден од затворениците со отворањето на фиоките, фиоките се затвораат пред да влезе следниот затвореник во собата. Ако при отворањето на фиоките, секој од затворениците го најде своето бројче во една од фиоките кои ги отворил, тогаш сите затвореници се ослободени од извршување на казната. Ако барем еден

затвореник не го најде своето бројче при отворањето на фиоките, тогаш се извршува смртната казна за сите затвореници. Пред почетокот на играта, т. е. пред влегувањето на првиот затвореник во собата со шкафчето со фиоки, затворениците можат да договараат стратегија на играње. Од влегувањето на првиот затвореник во собата со шкафчето со фиоки, тие повеќе немаат право на меѓусебна комуникација. Која е најдобрата стратегија за играње на затворениците?

Формулација како загатка: ([5]) Имињата на 100 затвореници, сите со различни имиња, се ставени во 100 дрвени кутии, по едно име во една кутија. Кутиите се поставени во една редица, една до друга, на маса во една соба. Еден по еден, секој од затворениците влегува во собата со кутиите. Секој од затворениците може да отвори најмногу 50 кутии, но мора да ја напушти собата кога ќе ја најде кутијата со своето име и нема право да комуницира со останатите затвореници откако ќе ја напушти собата со кутиите. На затворениците им е дозволено да формираат стратегија на играње пред почетокот на играта (пред влегување на првиот играч во собата со кутии), што е навистина потребно, затоа што ако некој од нив не ја најде кутијата со своето име, тогаш сите ќе бидат егзекутирани. Определи стратегија за играње на затворениците, така што веројатноста за успех е поголема од 30%.

Како што можеме да забележиме од горните две формулации, се работи за решавање на проблем од иста природа, само разликата е во поставените барања. Имено, во првичната формулација потребно е да се најде најдобра стратегија, а во формулацијата како загатка, потребно е да се најде стратегија која гарантира веројатност на успех поголема од 30%. Всушност, барањето од формулацијата како загатка е потслучај од барањето во првичната формулација.

Во продолжение ние ќе се задржиме на формулацијата како загатка и определувањето на стратегијата за играње која гарантира веројатност на успех поголема од 30%, што всушност е и најдобрата стратегија за играње во оваа игра, но нема да се задржуваме на тоа да докажеме дека е најдобра.

2. СТРАТЕГИИ ЗА ИГРАЊЕ И ВЕРОЈАТНОСТ ЗА УСПЕХ

Решавањето на оваа загатка се базира на два пристапа, односно разгледување на две стратегии за играње:

1. *Класична стратегија* - секој од играчите при влезот во собата со кутии ги отвора на случаен начин предвидените 50 кутии по сопствено убедување;
2. *Пермутациона стратегија* – секој од играчите при влезот во собата со кутии ги отвора предвидените 50 кутии по претходно утврден заеднички алгоритам, стратегија за играње.

Во продолжение ќе направиме детални разгледувања на загатката во случај на класична стратегија за играње и во случај на пермутациона стратегија за играње.

2.1. КЛАСИЧНА СТРАТЕГИЈА

Она што на прв поглед „ни дава за право“ да размислуваме во насока дека оваа загатка е со погрешно формулирани барања и дека е невозможна да се определи стратегија со која ќе постигнеме веројатност за успех од над 30%, е токму размислувањето во контекст на класична стратегија. Да ги разгледаме следните настани:

A_i – i – тиот играч ја отворил кутијата во која се наоѓа бројот i ,

B_j^i – бројот i е во j – тата отворена кутија,

каде што $i = 1, 2, \dots, 100$ и $j = 1, 2, \dots, 50$. Според тоа,

$$P(A_i) = P\left(\bigcup_{j=1}^{50} B_j^i\right) = \sum_{j=1}^{50} P(B_j^i) = \sum_{j=1}^{50} \frac{1}{100} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2},$$

од тоа што $B_k^i \cap B_l^i = \emptyset$, за секое $k \neq l$, $i = 1, 2, \dots, 100$ и $P(B_j^i) = \frac{1}{100}$, за секое $j = 1, 2, \dots, 50$.

Од независноста на настаните A_i , веројатноста на настанот E – затворениците не биле егзекутирани, е еднаква на

$$P(E) = P\left(\bigcap_{i=1}^{100} A_i\right) = \prod_{i=1}^{100} P(A_i) = \prod_{i=1}^{100} \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{100}.$$

Значи, со ваквиот пристап на решавање на загатката, добиваме дека веројатноста за успех, односно веројатноста затворениците да избегнат егзекуција е многу мала, па може да се каже дека е невозможно да ја остварат својата цел. Оваа веројатност не е ниту приближно до веројатноста за успех која затворениците ја посакуваат. Всушност со ваквиот класичен пристап за решавање на оваа загатка, дури и во случај на двајца затвореници добиваме веројатност за успех помала од 30%.

2.2. ПЕРМУТАЦИОНА СТРАТЕГИЈА

Во овој дел ќе ја разгледаме стратегијата за играње која е всушност најдобра стратегија која затворениците можат да ја применат при играње на оваа игра. Со други зборови, оваа е стратегијата со која веројатноста да успеат да не бидат егзекутирани е над 30%. За поедноставување, на почеток ќе ја разгледаме оваа игра како игра со 10 затвореници, во која секој од затворениците треба да ја пронајде кутијата која во внатрешноста го содржи неговото бројче со најмногу 5 отворени кутии. Согласно правилата на играта, секој од играчите е нумериран со еден од броевите од 1 до 10. Според тоа, можеме да ја разгледуваме секоја кутија со имињата на затворениците како кутија со два броја и тоа:

- Првиот број е редниот број на кутијата на надворешната страна. Доколку не се означени кутиите однадвор со бројчиња, согласно тоа што се наредени во редица на една маса, можат да бидат нумерирани со броеви од 1 до 10 согласно редоследот како што се поставени на масата, сметајќи од лево кон десно.
- Вториот број е бројот кој се наоѓа внатре во кутијата. Иако во самата формулација на загатката, во кутиите се наоѓаат имињата на затворениците, од тоа што секој од затворениците е нумериран со еден од броевите од 1 до 10, значи дека секое име одговара на еден број од 1 до 10.

Според тоа, оправдано е да ги разгледуваме кутиите како кутии кои се индентификуваат со два броја, еден на надворешната страна и еден во внатрешноста. Притоа да забележиме дека, броевите (имињата на затворениците) во внатрешноста на кутиите се распоредени од страна на директорот на затворот на случаен начин. На овој начин можеме

да формираме таканаречена пермутациона стратегија, која се состои од следните чекори за играње:

Чекор 1. При влегување во собата со кутиите, секој од затворениците како прва кутија ја отвора кутијата на која бројот од надворешната страна се совпаѓа со неговиот реден број.

Чекор 2. Ако затвореникот го пронајде својот реден број (своето име) во внатрешноста на кутијата, тогаш неговото играње завршува и тој ја напушта собата со кутиите.

Чекор 3. Ако бројот во кутијата не се совпаѓа со редниот број на играчот, тогаш тој продолжува со играта, така што ја отвора онаа кутија на која бројот од надворешната страна е ист со бројот којшто го пронашол во кутијата којашто ја отворил последна.

Чекор 4. Чекор 2 и Чекор 3 се повторуваат сè додека затвореникот во рамки на максималниот број предвидени потези не ја пронајде кутијата која во внатрешноста го содржи неговиот реден број (неговото име) или го достигне максималниот број предвидени потези за играње.

Пример 1. Да се обидеме да ги примениме дадените чекори на стратегијата на играта со 10 затвореници, со максимум 5 потези за играње по затвореник. Да забележиме дека вкупниот број на разместувања на имињата на затворениците во кутиите е $10!$, односно тоа е вкупен број на пермутации од 10 елементи. За да дојдеме до заклучокот кој го посакуваме, ќе започнеме со разгледувања на една пермутација дадена со

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 8 & 7 & 5 & 2 & 1 & 9 & 4 & 3 & 10 & 6 \end{pmatrix},$$

каде што првиот ред ги претставува броевите на кутијата од надворешната страна, а вториот ред ги претставува броевите во внатрешноста на секоја од кутиите. Ќе ги примениме чекорите од стратегијата на дадената пермутација. На тој начин ја добиваме Табела 1.

Со дадената пермутација, секој од затворениците го наоѓа своето име во една од кутиите со помош на пермутационата стратегија. Всушност, доколку ги разгледаме чекорите на движење на секој од затворениците, ќе забележиме дека по играта на Затвореник 1, играчите Затвореник 3, Затвореник 5 и Затвореник 8, не треба да играат, затоа што со сигурност ќе го пронајдат своето име, бидејќи тие ќе ги имаат истите

чекори на движење како и Затвореник 1, само во различна почетна точка. Од истите причини, пронаоѓањето на своето име од страна на Затвореник 2, значи дека со сигурност и Затвореник 7 и Затвореник 4 ќе го пронајдат своето име. Исто така, пронаоѓањето на своето име од страна на Затвореник 10, значи дека и Затвореник 6 и Затвореник 9 ќе го пронајдат своето.

Затвореник	Чекори на „движење“
Затвореник 1	1 → 8 → 3 → 5 → пронајдено име
Затвореник 2	2 → 7 → 4 → пронајдено име
Затвореник 3	3 → 5 → 1 → 8 → пронајдено име
Затвореник 4	4 → 2 → 7 → пронајдено име
Затвореник 5	5 → 1 → 8 → 3 → пронајдено име
Затвореник 6	6 → 9 → 10 → пронајдено име
Затвореник 7	7 → 4 → 2 → пронајдено име
Затвореник 8	8 → 3 → 5 → 1 → пронајдено име
Затвореник 9	9 → 10 → 6 → пронајдено име
Затвореник 10	10 → 6 → 9 → пронајдено име

Табела 1. Приказ на чекорите на пермутациона стратегија при дадената пермутација.

Од сето ова доаѓаме до следниот заклучок.

Играчот Затвореник i , којшто ја нашол кутијата со своето име, со сигурност знае дека играчите чиишто имиња се наоѓаат во кутиите коишто тој ги отворил, исто така ќе ја пронајдат кутијата со своето име.

Во продолжение ќе наведеме некои основни поими и тврдења кои важат општо за пермутациите, поточно во теоријата на групи од пермутации, а кои и претходно ги применивме за дадената пермутација.

Нека е дадено конечно множество $A = \mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$. *Пермутација* на множеството A е *биективно пресликување* $\sigma : A \rightarrow A$. Множеството од сите пермутации на множеството A го означуваме со S_A , односно со S_n . Множеството S_A од сите пермутации на множеството A е *група* во однос на операцијата *композиција на пресликувања*, [4].

Дефиниција 1. ([7]) Нека $\tau \in S_n$. За τ велíme дека е k -*циклус*, ако постојат $a_1, a_2, \dots, a_k \in A$ т.ш. $\tau(a_1) = a_2, \tau(a_2) = a_3, \dots, \tau(a_k) = a_1$ и τ го фиксира секој друг елемент на A , т.е.

$$\tau(a_i) = \begin{cases} a_{i+1}, i < k \\ a_1, i = k \\ a_i, \text{ во сите други случаи} \end{cases},$$

и означуваме $\tau = (a_1 a_2 a_3 \dots a_k)$.

Бројот на елементи од еден циклус се нарекува *должина на циклус*. Притоа, циклусите кои немаат заеднички елементи ги нарекуваме *дијунктни циклуси*. Едно од поважите тврдења, кое ќе го користиме во наредните разгледувања е следното тврдење.

Тврдење 1. ([4]) Нека $\sigma \in S_n$. Тогаш σ може да се претстави како производ на дисјунктни циклуси ако и само ако има конечно многу нетривијални циклуси. Ако не се земе предвид распоредот на факторите во производот, тогаш претставувањето на σ во облик на производ е еднозначно определено.

Пример 2. Доколку се навратиме на Пример 1, користејќи ги претходно изнесените дефиниции и тврдења, добиваме дека дадената пермутација од примерот, запишана како производ на дисјунктни циклуси има облик

$$(1\ 8\ 3\ 5)(2\ 7\ 4)(6\ 9\ 10).$$

Да забележиме дека, во нашиот пример, еден играч да биде победник, треба должината на циклусот со кој играчот ќе го пронајде своето име

да биде помала или еднаква на 5. Па, во случај на пермутација запишана како производ на дисјунктни циклуси, погоре донесениот заклучок значи дека сите играчи чиишто редни броеви се наоѓаат во циклус со должина помала или еднаква на 5 го пронашле своето име. Според тоа, проблемот го сведуваме на разгледување на должини на дисјунктни циклуси на пермутација.

3. ВЕРОЈАТНОСТА НА „ГОЛЕМИОТ“ ЦИКЛУС

Во продолжение ќе се обидеме поформално да ја дадеме врската помеѓу должината на циклуси и поволните настани за пресметување на посакуваната веројатност. Имено, во претходниот пример дојдовме до заклучок дека сите играчи чиишто редни броеви се наоѓаат во циклус со должина помала или еднаква на 5 го пронашле своето име. Доколку се навратиме на нашиот почетен проблем, определување на веројатноста за успех на затворениците, односно веројатноста на настанот

E – затворениците избегнале егзекуција ,

што значи дека секој од нив го пронашол своето име во дозволените 50 на број потези. Запишано во терминологија од теорија на групи од пермутации, овој настан е еквивалентен со настанот

F – пермутацијата е составена од циклуси со

должини помали или еднакви на 50 ,

што значи дека должините на циклусите на пермутацијата претставена како производ на дисјунктни циклуси се помали или еднакви на 50. Според тоа, бројот на поволни настани е еднаков на бројот на пермутации од S_n , кои претставени како производ на дисјунктни циклуси, се состојат од циклуси со должини најмногу 50. Определувањето на овој број е покомплицирано, за разлика од определувањето на бројот на пермутации кои претставени како производ на дисјунктни циклуси содржат циклус со должина поголема од 50, што всушност е спротивниот настан на настанот F , односно тоа е настанот

\bar{F} – пермутацијата содржи циклус со должина поголема од 50 .

За таа цел, во продолжение ќе се обидеме да дојдеме до некои заклучоци кои важат општо за пермутациите при претставување како производ на дисјунктни циклуси. Да се обидеме да го определеме

бројот на сите пермутации од S_n , кои содржат циклус со должина k , $\left[\frac{n}{2} \right] < k \leq n$, односно пермутациите од облик $(\underbrace{\quad\quad\quad}_{k\text{-циклус}})(\quad)(\quad)(\quad)(\quad)$.

Да забележиме дека една пермутација од S_n која содржи циклус со должина k , $\left[\frac{n}{2} \right] < k \leq n$, не содржи друг циклус со истата должина, односно циклусот со таа должина е единствен во претставувањето. Елементите на циклусот со должина k , можат да се изберат на C_n^k начини. Заради тоа што станува збор за циклус, позицијата од која го започнуваме движењето во циклусот не е битна, па добиваме дека елементите на циклусот формираат циклична пермутација од k елементи и тие можат да се распоредат на P_{k-1} начини. Останатите $n-k$ елементи можат да се распоредат на P_{n-k} начини, [4]. Според тоа,

$$C_n^k \cdot P_{k-1} \cdot P_{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} (k-1)!(n-k)! = \frac{n!}{k},$$

е бројот на пермутациите од S_n кои содржат циклус со должина k , $\left[\frac{n}{2} \right] < k \leq n$. Со тоа сме го покажале следното тврдење:

Тврдење 2. Бројот на пермутации од S_n кои содржат циклус со должина k , $\left[\frac{n}{2} \right] < k \leq n$, е еднаков на $\frac{n!}{k}$.

Како последица на Тврдење 2, ги добиваме следните тврдења.

Тврдење 3. Веројатноста произволно избрана пермутација $\sigma \in S_n$ да содржи циклус со должина k , $\left[\frac{n}{2} \right] < k \leq n$ е еднаква на $\frac{1}{k}$.

Тврдење 4. Веројатноста произволно избрана пермутација $\sigma \in S_n$ да содржи циклус со должина поголема од k , $\left[\frac{n}{2} \right] < k \leq n$ е еднаква на

$$\sum_{i=\left[\frac{n}{2} \right] + 1}^n \frac{1}{i}.$$

Всушност, последните две тврдења се двете клучни алатки за да покажеме дека пермутационата стратегија навистина гарантира веројатност на успех поголема од 30%. За таа цел да го претставиме настанот \bar{F} – пермутацијата содржи циклус со должина поголема од 50, како $\bar{F} = \bigcup_{k=51}^{100} M_k$, односно унија од настаните

M_k – пермутацијата содржи циклус со должина k ,

за $51 \leq k \leq 100$. Да забележиме дека настаните од унијата се дисјунктни помеѓу себе. Од сето ова, добиваме дека

$$\begin{aligned} P(F) &= 1 - P(\bar{F}) = 1 - P\left(\bigcup_{k=51}^{100} M_k\right) = 1 - \sum_{k=51}^{100} P(M_k) = \\ &= 1 - \sum_{k=51}^{100} \frac{|M_k|}{|S_{100}|} = 1 - \sum_{k=51}^{100} \frac{100!}{k \cdot 100!} = 1 - \sum_{k=51}^{100} \frac{1}{k} \approx 0,312. \end{aligned}$$

Со ова покажавме дека пермутационата стратегија навистина гарантира веројатност на успех поголема од 30%. Според тоа, можеме да заклучиме дека барањата на загатката се оправдани и дека постои стратегија за играње со која може да се добие бараната веројатност на успех. Практична потврда за оваа веројатност на успех е добиена со помош на статистичкиот софтвер R со кодот даден во [8], презентираан подолу во Прилог, каде што се разгледуваат успехите и неуспехите во 1000 повторувања на играта. Како што кажавме и на самиот почеток, тежината на загатката не е само наоѓање на нејзиното решение, туку и во неговото разбирање. Тоа е така, затоа што, како што видовме, тоа претставува спој од повеќе математички области, како што се теоријата на веројатност, теоријата на игри, теоријата на групи од пермутации и комбинаторната анализа.

ПРИЛОГ ([8])

Во овој прилог е даден код во статистичкиот софтвер R, за 1000 повторувања на играта 100 затвореници и пресметување на веројатноста за успех користејќи пермутациона стратегија.

(He)Возможна ослободителна стратегија

```
n = 1000 #број на обиди
uspesi = rep(0,n) #евидентирање на бројот на затвореници кои го
пронашле своето име во секој од обидите
for(i in 1:n){
  pobeda = rep(F,100)
  ime = sample(1:100)
  for(j in 1:100){
    kutii = 0
    razgleduvana.kutija = j
    while(kutii<50 && !pobeda[j]){
      kutii=kutii+1
      pobeda[j] = ime[razgleduvana.kutija]==j
      razgleduvana.kutija = ime[razgleduvana.kutija]
    }
  }
  uspesi [i] = sum(pobeda)
}
cat("Веројатноста за успех во 1000 обиди со пермутациона стратегија е
",100*mean(uspesi==100),"%.",sep="")
```

Во Табела 2 дадена подолу, ги имаме веројатностите за успех добиени со помош на горенаведниот код во статистичкиот софтвер R. Со ова извршивме тестирање за различни вредности на бројот на обиди, односно повторувања на играта. Притоа увидовме дека со зголемувањето на бројот на повторувања на играта, експериментално добиената веројатност за успех се приближува до теориската. И двете се поголеми од 30%, што требаше да го илустрираме.

Број на повторувања	10	100	1000	10000	100000	1000000
Веројатност на успех (%)	20%	34%	31.7%	31.28%	31%	31.14%

Табела 2. Табеларен приказ на веројатностите при различен број на повторувања.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] R. A. Brualdi, *Introductory Combinatorics*, Pearson Education, 2010.
- [2] E. Curtin, M. Warshauer, *The Locker Puzzle*, Mathematical Entertainments, The Mathematical Intelligencer, Vol. 28, No. 1, 2006, 28-31.
- [3] P. Flajolet, R. Sedgewick, *Analytic Combinatorics*, Cambridge University Press, 2009.
- [4] Ѓ. Чупона, Б. Трпеновски, *Предавања по алгебра Книга II*, НУБ „Св. Климент Охридски“, 2000.
- [5] *Data Genetics | 100 Prisoners Escape Puzzle*,
<https://datagenetics.com/blog/december42014/index.html>
- [6] *Department of mathematics and statistics Queen's Univeristy | The condemned prisoners and the boxes*,
<https://www.mast.queensu.ca/~peter/inprocess/prisoners.pdf>
- [7] *MIT Mathematics | 5. Permutation Groups*,
http://math.mit.edu/~mckernan/Teaching/12-13/Spring/18.703/1_5.pdf
- [8] *Rosseta code | 100 prisoners*,
https://rosettacode.org/wiki/Rosetta_Code

¹ Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје
Природно-математички факултет
ул. „Архимедова“ бр. 3, 1000 Скопје, Р. Македонија
e-mail: stevogjorgiev@gmail.com

Примен: 2.6.2021

Поправен: 19.10.2021

Одобен: 22.10.2021

Објавен на интернет: 3.11.2021

ПЕРИОДИЧНОСТА КАЈ ДИСКРЕТНИТЕ ДИНАМИЧКИ СИСТЕМИ И ТЕОРЕМАТА НА ШАРКОВСКИ

*Анастасија Трајанова*¹

Динамички систем е концепт спротивен на *статички систем*, со којшто се опишува развојот на одреден математички систем низ времето, кој најчесто се однесува непредвидливо и невообичаено, па од главен интерес е да се изнајде некој ред и правила коишто се кријат во тој хаос. Времето во кое системот се развива може да биде непрекинато или дискретно. Кога времето се мери во дискретни единици, тогаш станува збор за дискретен динамички систем. Теоријата на динамичките системи наоѓа примена во многу области како што се: популационата динамика, биологијата, хемиската кинетика, епидемиологијата, нелинеарната оптика, механиката, невронските мрежи, економијата, електрониката, медицинската дијагностика итн. Комплексните модели кои се добиваат дури и од наједноставните процеси во овие дисциплини, се причина за забрзаниот развој на теоријата на динамичките системи во последните 40 години.

Во овој труд, кој своевидно е и прво изложување на Теоремата на Шарковски на македонски јазик, целосно е разработен овој познат резултат кој се однесува на класата дискретни системи добиени со итерации на непрекинато пресликување на конкретен интервал, со кој Шарковски успеал да ја објасни нивната периодичност. Оригиналниот доказ од 1964 година може да се најде во неговиот најпознат труд [5].

Кога велиме *класата дискретни системи добиени со итерации на непрекинато пресликување на конкретен интервал* мислиме на систем зададен со пресликување на еден простор во самиот себе, а развојот на системот е одреден со итерации на зададеното пресликување.

Нека $f: I \rightarrow I$ е непрекинато пресликување, и $I \subseteq \mathbb{R}$ интервал. Под интервал подразбираме сврзано подмножество од реалните броеви што содржи повеќе од една точка (може да биде отворено, затворено или полуотворено).

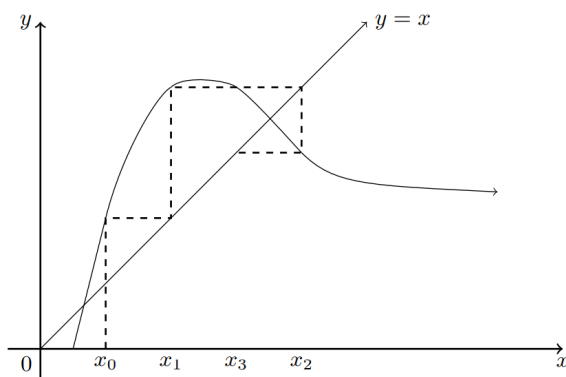
На неколку места во овој труд ќе користиме ознака $\langle a, b \rangle$ за затворен интервал со крајни точки a и b во кој е непознато кој број е поголем, дали a или b .

Штом имаме непрекинато пресликување f можеме да итерираме со ова пресликување на следниот начин:

$$f^1 = f, \quad f^{n+1} = f \circ f^n, \quad n \geq 1.$$

Во горе дадената нотација за итерации, f^1 (првата итерација од f) е всушност самото пресликување f , додека f^{n+1} ($n + 1$ - та итерација од f) е дефинирана индуктивно како композиција на f и n - тата итерација од f , соодветно.

Пример 1. Да видиме како графички изгледа низата итерации од f (непрекинато пресликување) во итеративната точка x_0 , т.е. низата $x_0, f^1(x_0), f^2(x_0), \dots$ дадена со следниот цртеж:



Да забележиме што се случува геометриски ако почнеме да итерираме во точката x_0 :

1. Цртаме вертикална линија од x_0 (*прва итеративна точка*) која го сече графикот на функцијата f во единствена точка. Од оваа точка цртаме хоризонтална линија која ја сече правата $y = x$ во единствена точка. На крај, од оваа точка цртаме вертикална линија која ја сече x -оската точно во *втората итеративна точка* на функцијата f , т.е. во точката $x_1 = f^1(x_0)$.

2. Истата постапка ја повторуваме аналогно и од точката x_1 за да ја добиеме *третата итеративна точка* на функцијата f , т.е. ја добиваме точката $x_2 = f^2(x_0)$.

3. Аналогно ги добиваме и останатите итеративни точки на функцијата f .

Во овој труд, ќе се запознаеме со потполното подредување на природните броеви, познато како *Подредување на Шарковски*, коешто овозможува испитување на периодичноста кај дискретните системи на начин што и ден денес нема достојни надминувања во еднодимензионалната динамика.

Пристапот за докажување на оваа теорема кој ќе го сретнете во овој труд е целосно базиран на трудот [2] од 1979 г. Самата структура на доказот е преземена од книга [1].

Целта на овој труд е да се прикаже јасна и убедлива слика на доказот на Теоремата на Шарковски и лично видување за значењето и перспективите кои оваа теорема ги имаа во областа на динамичките системи и теоријата на хаосот.

1. ОРБИТИ И ПЕРИОДИЧНИ ТОЧКИ

Во овој дел ќе изложиме некои поважни дефиниции на поими кои ќе ги користиме во понатамошното излагање.

Дефиниција 1. *Орбита* во $x \in I$ е следното множество: $\{f^n(x) : n \geq 0\} = \{x, f^1(x), f^2(x), f^3(x) \dots\}$.

Дефиниција 2. За точката $c \in I$ велиме дека е *фиксна точка* во I ако важи $f(c) = c$.

Ќе покажеме дека фиксна точка секогаш постои. Нека $f: I \rightarrow I$ е непрекинато пресликување и $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Ако a или b се фиксни точки, тогаш тврдењето сигурно важи. Ако ниту a ниту b не е фиксна точка, тогаш нека $g(x) = f(x) - x$. Па, бидејќи ни a ни b не се фиксни точки, важи $f(a) > a$ и $f(b) < b$, па имаме дека $g(a) = f(a) - a > 0$ и $g(b) = f(b) - b < 0$. Јасно е дека g е непрекинато пресликување. Од Теоремата за средна вредност имаме дека постои точка c таква што $g(c) = 0$ и велиме дека точката c е *фиксна точка* за пресликувањето f .

Дефиниција 3. За точката $c \in I$ велиме дека е *периодична со периода n* , каде што $n \in \mathbb{N}$, ако важи $f^n(c) = c$ и $f^k(c) \neq c$ за $1 \leq k < n$.

Дефиниција 4. Ако $c \in I$ е периодична точка со периода n , тогаш орбитата во c ја нарекуваме *периодична n -орбита*, т.е. $\{c, f^1(c), \dots, f^{n-1}(c)\}$ има точно n елементи, бидејќи $f^n(c) = c$.

2. ТЕОРЕМАТА НА ШАРКОВСКИ

Клучното прашање кое Шарковски си го поставил било: Дали кај ваквите ендоморфизми $f: I \rightarrow I$, на основа на постоењето на одредена периодична m -орбита $\{c, f^1(c), \dots, f^{m-1}(c)\}$ можеме да заклучиме дека постојат и други периодични орбити со различни периоди?

Неговата теорема е еден фасцинантен резултат кој освен што важи за кое било вакво непрекинато пресликување, важи и за пресликувања од интервал I во целата реална права \mathbb{R} . Меѓутоа, во вториот случај некои итерации не мора да се дефинирани на интервалот I , но и покрај тоа, теоремата останува точна.

Теорема 1. (Теоремата на Шарковски) *Да претпоставиме дека сите природни броеви се потполно подредени на следниот начин (познато како подредување на Шарковски):*

$$1 > 2 > 2^2 > 2^3 > \dots > 2^k \cdot 7 > 2^k \cdot 5 > 2^k \cdot 3 \dots > 2^2 \cdot 7 > 2^2 \cdot 5 \\ > 2^2 \cdot 3 > \dots > 2 \cdot 7 > 2 \cdot 5 > 2 \cdot 3 > \dots > 7 > 5 > 3$$

Ако f има периодична n -орбита каде што n е позитивен цел број, тогаш f има периодична m -орбита за секој $m > n$ во подредувањето на Шарковски.

Забелешка 1. Во подредувањето на Шарковски, ако почнеме оддесно, ги имаме сите непарни броеви почнувајќи од 3 во растечки редослед, па на ист начин сите броеви од облик $2 \cdot$ непарни (во растечки редослед), па потоа сите од облик $2^2 \cdot$ непарни, \dots , $2^n \cdot$ непарни \dots и на крајот, сите степени на два, сè до $2^0 = 1$. Па, 1 е на левиот крај, најлево, а 3 е на десниот крај, најдесно.

Забелешка 2. Од тврдењето на оваа теорема директно следува дека ако постои периодична 3-орбита, тогаш ќе постои орбита од секоја друга периода.

Оваа теорема првпат е докажана од украинскиот математичар и академик Александар Михаилович Шарковски во трудот [5] објавен во украински математички билтен од 1964. Доказот којшто ќе го претставам во овој напис е помодерна адаптација на оригиналниот доказ направена во 1979 година која се базира на трудот [2].

3. ПОМОШНИ ЛЕМИ

Во овој дел ќе претставиме неколку леми кои сами по себе се од независен интерес за многу отворени проблеми од оваа област, а истовремено се користат и во доказот на оваа прекрасна теорема.

Лема 1. *Нека J е компактен подинтервал од I така што $f(J) \supseteq J$. Тогаш f има фиксна точка во J .*

Доказ. Ако $J = [a, b]$ и знаеме дека $f(J) \supseteq J$, тогаш постојат $c, d \in J$ такви да важи: $f(c) = a$ и $f(d) = b$. Па, имаме дека $a = f(c) \leq c$ и $b = f(d) \geq d$. Оттука, $f(c) - c \leq 0 \leq f(d) - d$. Ако ја разгледаме функцијата $g(x) := f(x) - x$, од Теоремата за средна вредност добиваме дека $\exists c^* \in [c, d] \subset [a, b]$ такво што $g(c^*) = 0$, односно $f(c^*) = c^*$.

Лема 2. *Нека J и K се компактни подинтервали од I такви што $f(J) \supseteq K$. Тогаш постои компактен подинтервал $L \subseteq J$ таков што $f(L) = K$.*

Доказ. Да забележиме дека ако J се пресликува во $f(J)$, тогаш за секој подинтервал $T \subseteq f(J)$ мора да постои подинтервал во J , да речеме $P \subseteq J$, таков што ќе важи $f(P) = T$.

Нека $K = [a, b]$ и $c = \sup\{x \in J : f(x) = a\}$. Ако за некој $x > c$: $f(x) = b$, го избираме најмалото такво x и го означуваме со d , тогаш $L = [c, d]$. Ако, пак, за некое $x < c$: $b = f(x)$, го избираме најголемото такво x и го означуваме со d' , тогаш $L = [d', c]$.

Следната лема е всушност генерализација на Лема 2 кога имаме повеќе интервали.

Лема 3. *Нека J_0, J_1, \dots, J_m се компактни подинтервали од I такви што $f(J_{k-1}) \supseteq J_k$ ($1 \leq k \leq m$). Тогаш постои компактен подинтервал $L \subseteq J_0$ таков што $f^m(L) = J_m$ и $f^k(L) \subseteq J_k$ ($1 \leq k < m$). Дошолнително, ако $J_0 \subseteq J_m$, тогаш постои точка $y \in L \subseteq J_0 \subseteq I$ таква што $f^m(y) = y$ и $f^k(y) \in J_k$ ($0 \leq k < m$).*

Доказ. Лемата ќе ја докажеме со помош на математичка индукција.

Почетниот случај во индукцијата ($m = 1$) е всушност резултат на Лема 2: $J_1 \subseteq f(J_0) \exists L \subseteq J_0, f(L) = J_1$. Додатно ако $J_0 \subseteq J_1$, имаме дека $f(L) = J_1 \supseteq J_0 \supseteq L$, па од Лема 1, постои фиксна точка $y \in L \subseteq J_0$ таква што $f(y) = y$ и $f^k(y) = y \in J_0$ ($0 \leq k < 1$).

Индуктивна претпоставка: Фиксираме некое $m > 1$ и претпоставуваме дека тврдењето е точно за сите помали вредности. Имаме, $J_1 \subseteq f(J_0)$, $J_2 \subseteq f(J_1)$, $J_3 \subseteq f(J_2)$, $J_{m-1} \subseteq f(J_{m-2})$, $J_m \subseteq f(J_{m-1})$. Индуктивната претпоставка применета на последните $m - 1$ релации:

$$J_2 \subseteq f(J_1), J_3 \subseteq f(J_2), J_{m-1} \subseteq f(J_{m-2}), J_m \subseteq f(J_{m-1}) \Rightarrow \\ \exists L' \subseteq J_1: f^{m-1}(L') = J_m, f^k(L') \subseteq J_{k+1} \text{ за } 1 \leq k < m - 1.$$

Сега, од Лема 2 имаме: $L' \subseteq J_1 \subseteq f(J_0) \Rightarrow \exists L \subseteq J_0$ таква што $f(L) = L' \subseteq J_1 \Rightarrow f^m(L) = f^{m-1}(L') = J_m$, $f^k(L) \subseteq f^{k-1}(L') \subseteq J_k$, за $2 \leq k < m$. Со ова го докажавме првиот дел, т.е. дека $\exists L \subseteq J_0$ за кое важи $f^m(L) = J_m$ и $f^k(L) \subseteq J_k$ за $2 \leq k < m$ и дополнително, $f(L) \subseteq J_1$ и $f^0(L) = L \subseteq J_0$. Сега, уште ако $J_0 \subseteq f(J_m)$ ќе покажеме дека постои периодична точка $y \in L$ со периода m , т.е. дека $f^m(y) = y$.

Од првиот дел на лемата, $J_0 \subseteq J_m \subseteq f(J_{m-1})$ и $\exists L \subseteq J_0$ за кое важи $f^m(L) = J_m \supseteq J_0 \supseteq L$, па од Лема 1 имаме: $\exists c \in L \subseteq J_0: f(c) = c$. Оттука, $f^m(c) = c$.

Дополнително, $f^k(L) \subseteq J_k$ (од првиот дел од оваа лема) заклучуваме дека $f^k(c) \subseteq J_k$ за $1 \leq k < m$.

4. ПОМОШНА ТЕОРЕМА

Теоремата во овој дел, без која подредувањето на Шарковски би немало смисла, ни гарантира постоење на помала орбита од разгледуваната, односно орбита со помала периода.

Теорема 2. *Нека е $f: I \rightarrow I$ непрекинато пресликување и I компактен интервал. Нека е $\mathbf{B} = \{x_1 < x_2 < \dots < x_n\}$ периодична n - орбита со периода $n > 1$. Тогаш, помеѓу секои две соседни елементи во орбитата \mathbf{B} постои точка која припаѓа на некоја друга периодична орбита со периода помала од n .*

Доказ. Нека $\{c, f(c), f^2(c), \dots, f^{n-1}(c)\}$ е периодична n - орбита. Јасно $f^n(c) = c$ и $f^k(c) \neq c$ за $1 \leq k < n$. Нека a и b се два соседни елементи во n -орбитата. Ги разгледуваме сите $m < n$ такви што $f^m(b) < b$. Постои барем едно такво m , бидејќи a е од левата страна на b ($a < b$) и a е исто така дел од n -орбитата. Да се увериме дека постои $m' \neq n$, $1 \leq m' < n$, такво што $f^{m'}(a) > a$ и $f^{m'}(b) < b$.

Ако за сите m – орбити за кои $f^m(b) < b$ важи дека $f^m(a) < a$, тогаш би следело дека лево од a има онолку елементи колку што има и лево од b што не е можно. Бидејќи f е непрекинат ендоморфизам, секоја итерација е дефинирана на интервалот I . Во случајот кога $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, не мора секоја итерација да биде дефинирана, па затоа ќе ги разгледаме и двата случаја.

Случај 1° Нека f^m е добро дефинирана на $[a, b]$. Тогаш $\exists c \in (a, b)$ така што $f^m(c) = c$ (од Теоремата за средна вредност), па c е периодична точка со периода помала или еднаква на m , па затоа помала и од n .

Случај 2° Нека f^m не е добро дефинирана на $[a, b]$. Нека $J_k = \langle f^k(a), f^k(b) \rangle$ за $1 \leq k \leq m$. При непрекинато пресликување интервал се пресликува во интервал, па множеството $f(\langle f^{k-1}(a), f^{k-1}(b) \rangle)$ е интервал што ги содржи $f(f^{k-1}(a)), f(f^{k-1}(b))$ како слики на крајните точки, т.е. $J_k \subseteq f(J_{k-1})$. Од $f^m(a) \geq b$ и $f^m(b) \leq a$ имаме дека $J_0 \subseteq J_m$, па врз основа на Лема 3, постои точка $y \in [a, b]$ таква што $f^m(y) = y$ и $f^k(y) \subseteq J_k$, за $0 \leq k < m$.

5. СВОЈСТВО НА ПОДРЕДЕНА n -ОРБИТА

Во овој дел ќе се сретнеме со еден нов концепт кој овозможува секоја периодична n -орбита да се претстави како циклус во соодветен диграф.

Дефиниција 5. Нека f е непрекинат ендоморфизам на интервалот I и $\mathbf{B} = \{x_1 < x_2 < \dots < x_n\}$ периодична n -орбита со периода $n > 1$ запишана во растечки облик.

Ако $f(x_i) = x_{s_i}$ ($1 \leq s_i \leq n$), $i = 1, 2, \dots, n$, тогаш орбитата \mathbf{B} ја асоцираме со цикличната пермутација:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \end{pmatrix}.$$

Дефиниција 6. Нека $I_i = [x_i, x_{i+1}]$ (па за орбита со периода n , добиваме $n - 1$ интервали). **Диграф** од циклусот кој ја претставува периодичната n -орбита \mathbf{B} е насочен граф од транзиции, со темиња I_1, I_2, \dots, I_{n-1} и рабови $I_i \rightarrow I_s$ ако $f(I_i) \supseteq I_s$.

Следно, ќе наведеме неколку својства на диграф.

Својство 1. За секој I_j постои барем еден I_k за кој $I_j \rightarrow I_k$ и секогаш можеме да најдеме такво k различно од j , освен кога $n = 2$.

Доказ. Ова својство ни кажува дека ако тргнеме од кое било теме во диграфот, сигурно ќе постои раб кој ќе излегува од него, а да не е јамка, освен во случајот кога $n = 2$.

Тривијално е! Бидејќи $f(I_j) \supseteq \langle f(x_j), f(x_{j+1}) \rangle$, $f(x_j) \neq x_j$ и $f(x_{j+1}) \neq x_{j+1}$, сигурно ќе постои интервал различен од I_j содржан во $f(I_j)$ сè додека $n \neq 2$ (во случајот кога $n = 2$ може да се случи $f(x_j) = x_{j+1}$ и $f(x_{j+1}) = x_j$).

Својство 2. За секој I_k постои барем еден I_j за кој $I_j \rightarrow I_k$ и секогаш може да најдеме такво j различно од k освен кога n е парен и $k = \frac{n}{2}$.

Доказ. Ова својство ни кажува дека ако тргнеме од кое било теме во диграфот I_k , секогаш ќе постои раб кој ќе влегува во него. Уште повеќе, секогаш постои таков раб кој не е јамка, освен во случајот кога n е парен и $k = \frac{n}{2}$ (ова е случајот кога n е парна орбита и тргнуваме од средишниот интервал). Доказот не е тривијален! Да претпоставиме спротивно, нека не постои $j \neq k$ такво што $I_j \rightarrow I_k$. Сакаме да покажеме дека n е парен, $k = \frac{n}{2}$ и I_k е јамка. Ако $i \neq k$ и $f(x_i) \leq x_k$, тогаш $f(x_{i+1}) \leq x_k$ и $f(x_i) \geq x_{k+1} \Rightarrow f(x_{i+1}) \geq x_{k+1}$.

Ако $f(x_{k+1}) \geq x_{k+1} \Rightarrow f(x_i) \geq x_{k+1}$ за $k < i \leq n$, тогаш вистинското подмножество $\{x_{k+1}, \dots, x_n\}$ се пресликува во самото себе, па сочинува орбита со периода $n - k$, што не е можно заради нашата дефиниција за n -орбита. Оттука, мора да важи $f(x_{k+1}) \leq x_k$ и слично, $f(x_k) \geq x_{k+1}$, па според тоа $f(I_k) \supseteq I_k$ постои јамка во I_k ($I_k \rightarrow I_k$).

$$f(x_i) \leq x_k \text{ за } k \leq i \leq n \text{ (овде имаме } n - k \text{ точки)}$$

$$\Rightarrow n - k \leq k \Rightarrow n \leq 2 \cdot k$$

$$f(x_i) \geq x_{k+1} \text{ за } 1 \leq i \leq k \Rightarrow k \leq n - k \Rightarrow n \geq 2 \cdot k$$

Оттука, $n \leq 2 \cdot k$ и $n \geq 2 \cdot k$, па значи $n = 2 \cdot k$.

Својство 3. Секој диграф содржи I_k ($1 \leq k \leq n - 1$) такво што $I_k \rightarrow I_k$.

Доказ. Знаеме дека $f(x_1) > x_1$ и $f(x_n) < x_n$. Нека $k = \min\{1 \leq j < n: f(x_j) > x_j, f(x_{j+1}) < x_{j+1}\}$ (таков индекс постои, ако земеме на пример $k = n - 1$). Па затоа, $I_k \subseteq f(I_k)$.

Следните два примера илустрираат како изгледа соодветниот циклус и диграф за периодична 3-орбита.

Пример 2. (Циклус) Нека $B = \{x_1 < x_2 < x_3\}$ е некоја 3-орбита. Јасно е дека $f^3(x_i) = x_i$, за $i = 1, 2, 3$. Бидејќи елементите во B се подредени, како претставници за x_1, x_2, x_3 можеме да ги земеме броевите 1, 2, 3 кои се подредени на ист начин.

Нека $f(x_i) = x_{s_i}$ за $i = 1, 2, 3$. Тогаш $x_{s_1}, x_{s_2}, x_{s_3}$ е пермутација од x_1, x_2, x_3 . Покрај тоа, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \end{pmatrix}$ е циклична, бидејќи во спотивно би значело дека постои циклус помал од 3, што не е можно. Затоа, постојат две можности за да се претстави циклусот на 3-орбитата:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 3. (Диграф) Ако $B = \{x_1 < x_2 < x_3\}$ соодветствува со циклусот $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, тогаш имаме $I = [x_1, x_2]$ и $I_2 = [x_2, x_3]$ што ги поистоветуваме со $[1, 2]$ и $[2, 3]$, соодветно. Па, важи:

$$f(I_1) \supseteq I_1; \quad f(I_1) \supseteq I_2; \quad f(I_2) \supseteq I_1 \iff I_1 \rightarrow I_1; \quad I_1 \rightarrow I_2; \quad I_2 \rightarrow I_1,$$

со што го добиваме соодветниот диграф $I_1 \leftrightarrow I_1 \leftrightarrow I_2$.

Напомена. Ако ги замениме местата на I_1 и I_2 ќе го добиеме диграфот за другиот циклус од Пример 2!

6. ФУНДАМЕНТАЛЕН ЦИКЛУС

Во овој дел е претставен уште еден концепт, наречен *фундаментален циклус*, за полесно понатамошно работење со периодичните орбити.

Дефиниција 7. Дадена е n -орбита. Циклусот $J_0 \rightarrow J_1 \rightarrow \dots \rightarrow J_{n-1} \rightarrow J_0$ со должина n во соодветниот диграф е наречен *фундаментален циклус* ако J_0 содржи крајна точка c таква што $f^k(c)$ е крајна точка на J_k ($1 \leq k < n$).

Ќе покажеме дека фундаментален циклус секогаш постои и тој е единствен. Нека $J_0 \rightarrow J_1 \rightarrow \dots \rightarrow J_{n-1} \rightarrow J_0$ е n -циклус од диграфот на n -орбитата каде што $J_0 = J_1$, а останатите интервали може, но и не мора да се повторуваат. Ако почнеме од J_1 и земеме крајна точка $c = 1$, тогаш следниот интервал е еднозначно определен, бидејќи $f(c) \in f(J_1)$ и $f(J_1)$ содржи точно еден интервал со крајна точка $f(c)$. Заради тоа, сите следни интервали се единствено определени. Бидејќи c е дел од n -орбитата, добиваме дека $f^n(c) = c$, што значи дека сигурно ќе завршиме во J_1 .

Забелешка 3. Еден од интервалите J_0, J_1, \dots, J_{n-1} во фундаменталниот циклус мора да се повтори барем двапати, бидејќи диграфот има само $n - 1$ теме (I_1, I_2, \dots, I_{n-1}).

Забелешка 4. Секој интервал во фундаменталниот циклус може да се појави најмногу 2 пати бидејќи секој интервал има точно 2 крајни точки, па за да биде во фундаменталниот циклус треба и двете да се итерации од почетната точка c . Затоа секој интервал може да се појави најмногу 2 пати.

Дефиниција 8. За циклус во диграфот велиме дека е *примитивен* ако не е составен од помал циклус кој се повторува неколку пати.

Ако некој од интервалите I_1, I_2, \dots, I_{n-1} се содржи двапати во фундаменталниот циклус, тогаш тој циклус може да се разложи на два помали циклуси во кои овој интервал ќе се содржи точно еднаш. Заради тоа овие два потциклуса ќе бидат примитивни!

Забелешка 5. $J_1 \rightarrow J_4 \rightarrow J_4 \rightarrow J_3 \rightarrow J_5 \rightarrow J_2 \rightarrow J_6 \rightarrow J_1$ е всушност примитивен!

7. СТРАФИНОВА ЛЕМА

Оригиналниот доказ на Шарковски во суштина е мошне долг и комплициран. Како што и самиот Страфин рекол: „Тој има конструирано толку многу низи од точки, што осум комплексни фигури и повеќето букви од грчката азбука се потребни за да се следи доказот.“ ([3, p. 104]). Заради тоа, Страфин успеал да даде едноставен доказ за значаен дел од Теоремата на Шарковски со којшто се гарантира дека ако f има периодична точка со периода n и придружениот нејзин диграф содржи

примитивен циклус со должина m , тогаш f има периодична точка со периода m .

Лема 4. Нека f има периодична точка со периода n , односно n -орбита. Ако придружениот нејзин диграф содржи примитивен циклус $J_0 \rightarrow J_1 \rightarrow \dots \rightarrow J_{n-1} \rightarrow J_0$ со должина m , тогаш f има периодична точка y со периода m и $f^k(y) \in J_k$ ($0 \leq k < m$).

Доказ. $f(J_0) \supseteq J_1, f(J_1) \supseteq J_2, \dots, f(J_{m-2}) \supseteq J_{m-1}, f(J_{m-1}) \supseteq J_0$. Според Лема 3, кога $J_m = J_0$, добиваме дека постои компактен интервал $L \subseteq J$ таков што $f^m(L) = J_m$ и $f^k(L) \subseteq J_k$, за $1 \leq k < m$.

Исто така, важи $J_0 \subseteq J_0$, па постои точка $y \in J_0$ таква што $f^k(y) = y$ и $f^k(y) \in J_k$, за $0 \leq k < m$. Забележуваме дека итерациите од y скокаат од еден во друг од дадените интервали. Останува уште да се покаже дека y е периодична точка со периода m . Затоа треба да покажеме дека $f^k(y) \neq y$ за $1 \leq k < m$.

Случај 1° Ако y не е крајна точка од J_0 тогаш m мора да биде периода за y бидејќи $f^k(y)$ скока од еден во друг интервал, а циклусот не е примитивен!

Случај 2° Ако y е крајна точка од J_0 и бидејќи y е елемент на n -орбитата, односно $f^n(y) = y$, тогаш мора да важи дека $n|m$.

Имаме дека $f(J_{k-1}) \supseteq J_k$ и $f^k(y) \in J_k$ ($1 \leq k < m$) што одговара на конструкцијата на фундаментален циклус, па J_k е еднозначно определен и овој циклус е содржател на фундаментален циклус, што би значело дека не е примитивен! Според тоа, y е m -периодична точка.

Користејќи ја оваа лема, Страфин конструирал многу краток и едноставен доказ на резултат познат како *Lee-Yorke-ва теорема*, којашто е претставена во неговиот труд [4], издаден 10 години по доказот на Шарковски, во кој се вели дека *периода 3 повлекува постоење на секоја друга периода* или како што Lee и Yorke ја нарекуваат:

Теорема 3. Периода 3 имплицира хаос.

Доказ. Да претпоставиме дека f има 3-орбита: $\{f(c) < c < f^2(c)\}$. Од нејзиниот диграф $I_1 \leftrightarrow I_1 \leftrightarrow I_2$ гледаме дека постојат два примитивни циклуси со должина 1 и 2, па затоа f има фиксна точка и f има периодична точка со периода 2. За секој позитивен цел број $m > 2$ постои m -

орбита која соодветствува на примитивниот циклус со должина m : $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow I_1 \rightarrow I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_1$. Па затоа, f има периодична точка од секоја периода $m \in \mathbb{N}$.

8. ПОМОШНА ЛЕМА – ХИЕРАРХИЈА

Со следната лема се потврди почетната хиерархијата која ја насетил Шарковски, а која покажува дека $n > 3$ за $n > 1$, т.е. дека 3 е највисоко во хиерархијата, а потоа и дека $1 > 2$, но $2 \not> 1$, и на крај, $1 > 2 > n$, каде што $n > 2$. Ваквата хиерархија е директна последица на оваа лема заедно со Страфиновата лема.

Лема 5. *Ако f има периодична точка со периода $n > 1$, тогаш f има фиксна точка и периодична точка со периода 2.*

Доказ. Секој диграф има јамка, па според Лема 1 (заради $f(I_k) \supseteq I_k$) следува дека секој диграф има фиксна точка. Нека $n > 1$ е најмалиот позитивен цел број таков што f има n -периода. Ќе покажеме дека $n = 2$ постои. Да го претпоставиме спротивното, т.е. нека $n > 2$, па го разложуваме фундаменталниот циклус на два примитивни циклуси. Вакво разложување е секогаш можно.

Случај 1° Ако ФЦ (фундаменталниот циклус) не е примитивен, може да се разложи на k примитивни при што $k|n$.

Случај 2° Ако ФЦ е примитивен тогаш знаеме дека постои интервал кој се повторува барем двапати, а ниеден повеќе од двапати. Па, во првиот циклус прескокнуваме сè измеѓу ваквите два интервала, а вториот циклус е јамка од интервалот кој се повторува двапати! На овој начин, нашиот n -циклус сме го разложиле на два примитивни од кои едниот има должина строго поголема од 1 и нека таа е s . Од Страфиновата лема (Лема 5), заклучуваме дека f има периодична точка строго помеѓу 1 и n , што не е можно заради минималноста на n .

9. СТЕФАНОВА ОРБИТА

Во овој дел ја претставуваме Стефановата лема која ни покажува како f влијае врз својата *минимална непарна орбита* (кога не постојат периодични орбити со помала непарна периода) и комплетно го карактеризира нејзиниот изглед.

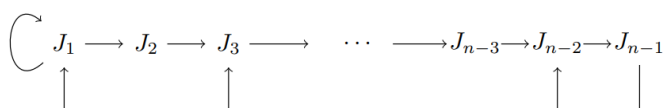
Лема 6. *Да претпоставиме дека f има n - орбита каде n е непарен број и дека нема периодични орбити со непарна периода измеѓу 1 и n (минимална непарна орбита). Ако c е средишна точка во n орбитата тогаш елементите во неа го имаат следниот распоред:*

$$f^{n-1}(c) < f^{n-3}(c) < \dots < f^2(c) < c < f(c) < f^3(c) < \dots < f^{n-2}(c)$$

или инверзниот облик

$$f^{n-2}(c) < f^{n-4}(c) < \dots < f(c) < c < f^2(c) < f^4(c) < \dots < f^{n-1}(c)$$

За $J_1 = \langle c, f(c) \rangle$ и $J_k = \langle f^{k-2}(c), f^k(c) \rangle$ за $1 < k < n$, го добиваме соодветниот диграф:



Доказ. Нека ФЦ е фундаментален циклус за соодветниот диграф. Го разложуваме ФЦ на два примитивни циклуси од кои едниот има непарна должина. Тоа е можно бидејќи Страфиновата лема (Лема 4) гарантира 2-циклус, па другиот мора да има непарна должина. Бидејќи нема циклус со непарна должина помеѓу 1 и n , заклучуваме дека тоа мора да биде 1-циклус. Оттука, ФЦ има облик: $J_1 \rightarrow J_1 \rightarrow J_2 \rightarrow \dots \rightarrow J_{n-1} \rightarrow J_1$, каде што $J_i \neq J_1$ за $1 < i < n$, бидејќи J_1 не смее да се појави повеќе од 2 пати во фундаменталниот циклус. Оттука, J_1, J_2, \dots, J_{n-1} се меѓусебно различни. Во спротивно би значело дека постои помал примитивен циклус. Па, ако тој е непарен тогаш може да е единствено 1-циклус, па ако го извадиме добиваме парен примитивен. Ако дополнително го извадиме почетниот 1-циклус, ќе добиеме непарен примитивен циклус со должина помала од n . Ако, пак, тој е парен, со негово анулирање добиваме непарен циклус, што не е можно.

Затоа J_1, J_2, \dots, J_{n-1} се сите меѓусебно различни и сочинуваат пермутација од I_1, I_2, \dots, I_{n-1} .

Слично, не може да имаме $J_i \rightarrow J_k$ ако $k > i + 1$ или ако $k = 1$ и $i \neq 1, n - 1$. Зошто? Знаеме дека $f(J_1) \supseteq J_2$, па не е можно и $J_3 \supseteq J_1$, бидејќи во тој случај може да се исклучи таквиот циклус и да се добие помала непарна орбита од n користејќи ја Страфиновата лема. Исто така, не може да имаме $J_i \rightarrow J_1$ за $j \neq 1, n - 1$, бидејќи на ист начин може да се конструира постоење на помала непарна орбита.

Претпоставуваме дека $J_1 = J_k = [a, b]$. Бидејќи $I_1 \leftrightarrow I_1 \leftrightarrow I_2 \Rightarrow J_2$ е соседно со J_1 и важи едно од следните 2 тврдења:

$$\begin{aligned} & (x_k = a, x_{k+1} = f(a), x_{k-1} = f^2(a)) \vee \\ & (x_{k+1} = b, x_k = f(b), x_{k+2} = f^2(b)) \end{aligned}$$

$J_1 \rightarrow J_1 \rightarrow J_2 \rightarrow \dots \rightarrow J_{n-1} \rightarrow J_1$ и знаеме дека $f(J_1)$ ги содржи единствено J_1 и J_2 . Па, каде ќе се наоѓа J_2 ? Нека $J_1 = I_k = [x_k, x_{k+1}]$ за некој $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Тогаш имаме само два можности:

Случај 1°. $J_2 = [x_{k-1}, x_k], J_1 = [x_k, x_{k+1}]$;

$$\begin{aligned} x_k = a ; x_{k+1} = f(x_k) = f(a) ; x_{k-1} = f(x_{k+1}) = f^2(x_k) = f^2(a) ; \\ \Rightarrow f^2(a) < a < f(a). \end{aligned}$$

Случај 2°. $J_1 = [x_k, x_{k+1}], J_2 = [x_{k+1}, x_{k+2}]$;

$$\begin{aligned} x_{k+1} = b ; x_k = f(x_{k+1}) = f(b) ; \\ x_{k+2} = f(x_k) = f(f(x_{k+1})) = f^2(b) ; \\ \Rightarrow f(b) < b < f^2(b). \end{aligned}$$

Гледаме дека, ако $n = 3$, тогаш сме готови! Да заклучиме уште за $n > 3$. Да видиме каде ќе се наоѓа J_3 .

Случај 1°. $f^2(a) < a < f(a)$. Ако $f^3(a) < f^2(a)$ добиваме дека $J_2 \rightarrow J_1$ што не е дозволено! Оттука, $f^3(a) > f^2(a)$. Бидејќи $J_2 \not\rightarrow J_k$ за $k > 3 \Rightarrow J_3 = [f(a), f^3(a)]$ е прв сосед на J_1 од десно. Ако $f^4(a) > f^3(a)$ добиваме дека $J_3 \rightarrow J_1$, што не е дозволено. Оттука, а $J_2 \rightarrow J_1$, што не е дозволено! Оттука, $f^4(a) > f^3(a)$. Бидејќи $J_3 \not\rightarrow J_k$ за $k > 4$, следува дека $[f^4(a), f^2(a)]$ е прв сосед на J_2 од лево. Ако продолжиме на овој начин, ќе видиме дека редоследот на реалната права е следниот:

$$f^{n-1}(a) < f^{n-3}(a) < \dots < f^2(a) < a < f(a) < f^3(a) < \dots < f^{n-2}(a)$$

Случај 2°. $f(b) < b < f^2(b)$. Аналогно се добива следниот распоред на реалната права:

$$f^{n-2}(b) < f^{n-4}(b) < \dots < f(b) < b < f^2(b) < f^4(b) < \dots < f^{n-1}(b).$$

10. ПОСЛЕДНИ ДВЕ ПОМОШНИ ЛЕМИ

Следната лема покажува дека непарните периоди имаат повисока хиерархија од парните и помалите непарни имаат повисока хиерархија од поголемите непарни.

Лема 7. *Ако f има непарна орбита со периода $n > 1$ тогаш има периодична орбита со периода (i) r за секој парен број r ; (ii) m за секој непарен број $m > n$.*

Доказ. Да претпоставиме дека n е минимална непарна орбита. Тогаш диграфот е всушност Стефанов од Лема 6. Ако $m < n$ е парен, тогаш $J_{n-1} \rightarrow J_{n-m} \rightarrow J_{n-m+1} \rightarrow \dots \rightarrow J_{n-1}$ е примитивен циклус со должина m . Ако $m > n$ е парен или непарен, тогаш $J_1 \rightarrow J_2 \rightarrow \dots \rightarrow J_{n-1} \rightarrow J_1 \rightarrow J_1 \rightarrow \dots \rightarrow J_1$ е примитивен циклус со должина m , што од Лема 4 значи дека f содржи m - орбита.

Оваа лема заедно со следната лема се клучни за комплетирање на подредувањето претставено во Теоремата на Шарковски.

Лема 8. *Ако c е периодична точка на f со периода n , тогаш за секој позитивен цел број h , c е и периодична точка на f^h со периода $\frac{n}{(h,n)}$, каде што $(h,n) = \text{НЗД}(h,n)$. Обратно, ако c е периодична точка на f^h со периода m , тогаш c е и периодична точка на f со периода $\frac{m \cdot h}{d}$, каде што $d|h$ и $(d,m) = 1$.*

Доказ. Нека c има периода n за f и нека $m = \frac{n}{(h,n)}$ за произволно $h \in \mathbb{N}$.

Тогаш имаме дека $f^{m \cdot h}(c) = f^{n \cdot \frac{h}{(h,n)}}(c)$ каде што $\frac{h}{(h,n)}$ е цел број. Ако, пак, $f^{k \cdot h}(c) = c$, тогаш n мора да е делител на $k \cdot h$. Нека $k \cdot h = n \cdot d$, за некој $d \in \mathbb{N}$. Тогаш имаме дека

$$k = \frac{d \cdot n}{h} = \frac{n}{(h,n)} \cdot \frac{d \cdot (h,n)}{h} = m \cdot \frac{(d \cdot h, d \cdot n)}{h} = m \cdot (d, n).$$

Оттука, $m|k$, па c е m -периодична за f^h , со што првиот дел е покажан.

Да претпоставиме дека c е m -периодична за f^h , т.е. $f^{h \cdot m}(c) = c$. Тогаш c има периода n за f каде што n е делител на $h \cdot m$. Нека $n = \frac{m \cdot h}{d}$ за некој $d \in \mathbb{N}$. Од директната насока на оваа лема за произволен h имаме

дека c е периодичка точка на f^h со периода $\frac{n}{(h,n)}$, па затоа

$$m = \frac{\frac{m \cdot h}{d}}{(h,n)} = \frac{m \cdot h}{d \cdot (h,n)} \Leftrightarrow h = d \cdot (h,n) = d \cdot (h,n) \Rightarrow d|h.$$

Нека $e = (h,n)$. Имаме: $(d \cdot e, m \cdot e) = (h, m \cdot (h,n)) = (h,n) = e$, од каде што следува дека $(d, m) = 1$.

11. СУМИРАЊЕ НА РЕЗУЛТАТИТЕ

Во овој дел ќе ја комплетираме хиерархијата на Шарковски на следниот начин. Нека е дадена n -орбита, $n = 2^d \cdot q$ каде што q е непарен број.

- Прво покажуваме дека кога $q = 1$ и $m = 2^e$ за $0 \leq e < d$ важи хиерархијата: $m > n$.
- Потоа, нека $q > 1$ и $m = 2^d \cdot r$. Покажуваме дека важи $m > n$ во два случаја: (i) кога r е парен; (ii) кога r е непарен и $r > q$.

Јасно е дека со ова се гарантира следното подредување:

$$1 > 2 > 2^2 > 2^3 > \dots > 2^k \cdot 7 > 2^k \cdot 5 > 2^k \cdot 3 \dots > 2^2 \cdot 7 > 2^2 \cdot 5 \\ > 2^2 \cdot 3 > \dots > 2 \cdot 7 > 2 \cdot 5 > 2 \cdot 3 > \dots > 7 > 5 > 3$$

Затоа, нека е дадена n – орбита, $n = 2^d \cdot q$ каде што q е непарен.

– Прво претпоставуваме дека $q = 1$ и $m = 2^e$ каде што $0 \leq e < d$. Од Лема 5 може да претпоставиме дека $e > 0$. Ќе покажеме дека $m > n$. Нека c е периодична точка од f со периода $n = 2^d$. Го разгледуваме пресликувањето $g = f^{\frac{m}{2}}$ и ја применуваме директната насока од Лема 8 со $h = \frac{m}{2} = 2^{e-1}$ и $n = 2^d$. Добиваме дека g има периодична точка c со периода $\frac{n}{(h,n)} = \frac{2^d}{(2^{e-1}, 2^d)} = 2^{d-e+1}$. Лема 5 повлекува дека g има периодична точка со периода 2. Ако ја примениме обратната насока од Лема 8 за $h = \frac{m}{2} = 2^{e-1}$ и $m = 2$ добиваме дека f има периодична точка со периода $\frac{m \cdot h}{d} = \frac{2 \cdot 2^{e-1}}{d} = \frac{2^e}{d}$ каде што $d|h = 2^{e-1}$ и $(d, 2) = 1$. Оттука, $d = 1$ и f има периодична точка со периода $m = 2^e$.

– Сега нека $n = 2^d \cdot q$ и $q > 1$ е непарен. Останува да покажеме дека $m > n$ за $m = 2^d \cdot r$ каде што или (i) r е парен или (ii) r е непарен и $r > q$. Го разгледуваме пресликувањето $g = f^{2^d}$. Директната насока од

Лема 8 за $h = 2^d$ и $n = 2^d \cdot qg$ има периодична точка со периода $\frac{n}{(h,n)} = \frac{2^d \cdot q}{(2^d, 2^d \cdot q)} = \frac{2^d \cdot q}{2^d} = q$. Од Лема 7 добиваме дека: g има периодична точка со периода $r > q$. Сега ако го примениме вториот смер од Лема 8 со $h = 2^d$ и $m = r$ добиваме дека за некој \hat{d} , f има периодична точка со периода $\frac{m \cdot h}{\hat{d}} = \frac{r \cdot 2^d}{\hat{d}}$ каде што $(m, \hat{d}) = (r, \hat{d}) = 1$ и $\hat{d} | h = 2^d$. Во случајот (i) r е парен имаме: $\hat{d} = 1$ па f има периодична точка со периода $2^d \cdot r$ што е и потребно да се покаже. Во случајот (ii) r е непарен и $r > q$ имаме: $\hat{d} = 2^k$ за некој $0 \leq k \leq d$, па f има периодична точка со периода $2^e \cdot r$ за некој $e \leq d$.

- Ако $e = d$ добиваме дека f има периодична точка со периода $2^d \cdot r$.
- Ако $e < d$, наместо $n = s^d \cdot q$ разгледуваме $n = s^d \cdot r$ ($r > q$), па добиваме $m = 2^e \cdot (2^{d-e} \cdot r)$ каде што $2^{d-e} \cdot r$ е парен. Од случајот (i) следи дека f има периодична точка со периода точно m .

Со ова се комплетира доказот на Теоремата на Шарковски.

12. ПРОЗОРЕЦ КОН ТЕОРИЈАТА НА ХАОСОТ

Она по што се разликува доказот на Теоремата на Шарковски прикажан во овој напис од оригиналниот доказ на Шарковски е воведувањето на два нови концепти: *диграф* и *фундаментален циклус*. Овој пристап не само што значајно го скратува самиот доказ, кој во оригиналот е доста долг заради елементарниот израз на авторот, туку истовремено го прави поелегантен и што е многу поважно овозможува подобар пристап за оваа теорија да се развива во насока на хаотичните динамички системи.

Она што е од посебен интерес кај хаотичните динамички системи е да се разбере асимптотското однесување на итеративната низа кога $n \rightarrow \infty$, т.е. дали низата конвергира во фиксна точка или можеби во некоја периодична орбита, со што се испитува нејзината стабилност. Теоремата на Шарковски ни говори за постоењето на орбита, но не и за нејзината стабилност. Една од дефинициите за *хаос* што е изнесена во трудот на Block и Coppeel, [4], во кој покажуваат дека периода 3 имплицира хаос, е случајот кога постои орбита од секоја периода но ни една не е стабилна, па траекторијата во ваквите системи е всушност „скокање“ од една нестабилна орбита во друга. Во ваквите системи не постои периодично

однесување па оттука и името *хаотични системи*. Затоа, за да се разбере природата на хаосот, од големо значење е да се испитува подлабока класификација на орбитите, позната како *фина класификација* (англ. *fine classification*) со која се класифицираат сите орбити во зависност од нивното место во хиерархијата на Шарковски. Ваквата класификација за разлика од класификацијата според периодичност на орбитите, позната како *груба класификација* (англ. *rough classification*), се прави според *диграфот* и *цикличната пермутација* на орбитите коишто ги претставивме во овој труд.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] L.S.Block, W.A.Coppel, *Dynamics in One Dimension*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [2] L.S. Block, J. Guckenheimer, M. Misiurewicz, L.S. Young, *Periodic Points and Topological Entropy of One-dimensional Maps*, Global Theory of Dynamical Systems, Proc. International Conf., Northwestern Univ., Evanston, Ill.,(1979), 18-34.
- [3] P. D. Straffin, Jr., Periodic points of continuous functions. Math. Mag., 51 (1978), 99-105.
- [4] T.Y. Li, J.A. Yorke, *Period Three Implies Chaos*, The American Mathematical Monthly, Vol. 82, No. 10. (1975), 985-992.
- [5] A.N. Sharkovsky, *Coexistence of Cycles of a Continuous Transformation of a Line into itself*, Ukrain. Mat. Zhurn., 16, 1(1964), 61-71.

¹ Природно-математички факултет, Нови Сад,
Др Зорана Ђинђића 1, Нови Сад 21000, Р. Србија
e-mail: anastasijatrajanova@gmail.com

Примен: 29.5.2021

Поправен: 17.10.2021

Одобрен: 25.10.2021

Објавен на интернет: 4. 12.2021

ЛОГИСТИЧКА РЕГРЕСИЈА И НЕЈЗИНА ПРИМЕНА НА ЗАДАЧИ ОД БИНАРНА КЛАСИФИКАЦИЈА

*Филип Николовски*¹

Статистиката како дел од математиката (или како независна наука) меѓу другото се занимава и со опишување на зависностите помеѓу променливите кои ги разгледува. Променливите главно спаѓаат во една од две категории: **независни**, врз кои директно имаме влијание, и **зависни** на чиешто вредности не можеме директно да влијаеме; нивната вредност се менува исклучиво на основа на вредностите на независните променливи. Во контекст на барањата и очекувањата, оваа зависност може да се опише на повеќе начини. Два од нив се: опишувањето на степенот (јачината, моќта) на зависност и конструкција на модел со кој директно би можеле да извршиме предвидување на вредностите на зависната променлива врз основа на вредности на независните променливи. Овој пристап на анализа на зависностите помеѓу променливите главно спаѓа во областа на статистиката наречена *регресиона анализа*. Најчесто користени алатки од оваа област се **коэффициентот на корелација r** (како мерка за степенот на линеарна зависност помеѓу променливите) и **моделот на линеарна регресија** кој претпоставува постоење на линеарна зависност. Меѓутоа постојат ситуации кога линеарниот регресионен модел не е соодветен, па затоа прибегнуваме кон модели од друг тип. Во овој труд се опишува ситуација која води кон конструкција на таканаречениот модел на **логистичка регресија**. Со помош на овој модел можеме да ги искористиме добрите страни на линеарниот модел, но да ги примениме на типови задачи кои во основа не се во неговиот домен.

Во првата точка накусо ќе се осврнеме на линеарниот регресионен модел, неговата конструкција и неговите особености. Ова ќе ни даде можност да ги согледаме предностите што тој ги има над другите модели. Понатаму, се разгледува задача на бинарна класификација во која зависната променлива не е од нумерички, туку од категориски тип и ќе се обидеме да конструираме модел за класификација преку моделирање на веројатностите со помош на линеарна регресија. Недостатоците на

овој пристап ќе ги исправиме во третата точка каде формулираме модел на логистичка регресија за моделирање на веројатностите преку нивна (привремена) трансформација во *шанси*. Во последната точка даваме едноставен начин за оценка на прецизноста/точноста на конструираниот модел.

1. ЛИНЕАРЕН РЕГРЕСИОНЕН МОДЕЛ

Наједноставниот нетривијален модел кој може да се конструира при работа со податоци е моделот на **линеарна регресија**. Како што кажува самото име, овој модел претпоставува дека врската помеѓу независните променливи (кои се „влезни“) и зависната променлива („излезната“) е линеарна. Да претпоставиме дека сме собрале податоци за n независни променливи во m серии на набљудувања, а во секоја од сериите сме собрале податоци и за независната променлива y . Податоците може да ги структурираме во матрици X и y , на независни и зависни променливи, соодветно, дадени со:

$$X = \begin{bmatrix} x_{ij} \end{bmatrix}_{m \times n} \quad \text{и} \quad y = [y_i]_{m \times 1}$$

каде што x_{ij} го означува i -то набљудување за j -та независна променлива, а y_i го означува i -то набљудување за независната променлива. Со помош на овие ознаки линеарниот модел кој ја опишува зависноста на зависната од независните променливи може да се формулира како:

$$y = Xw + \varepsilon \tag{1}$$

каде што со ε е означена случајна компонента која ја содржи грешката во моделот. „Конструкцијата“ на моделот се сведува на наоѓање на коефициентите $w = [w_j]_{n \times 1}$, а откако ќе ги пресметаме овие коефициенти целта ни е да вршиме предвидувања за вредностите на зависната променлива со помош на матричната равенка $\hat{y} = Xw$. Јасно е дека предвидените вредности \hat{y} и вистинските вредности y ќе се разликуваат. Во пракса $m \gg n$ (имаме многу повеќе податоци од број на независни променливи), па наоѓањето на коефициентите w е малку посложено од решавање систем линеарни равенки. Затоа за решавање на оваа задача го користиме *методот на најмали квадрати* кој ни дава таков вектор на

коэффициенти w којшто го минимизира вкупното квадратно отстапување помеѓу вистинските вредности на независната променлива, y , и предвидувањата, \hat{y} , направени на основа на вредностите на независните променливи и коефициентите. Така, задачата ја сведуваме на задачата на оптимизација без ограничувања:

$$\min_{w \in \mathbb{R}^n} \|\hat{y} - y\|^2 = \min_{w \in \mathbb{R}^n} \|Xw - y\|^2 \quad (2)$$

Оваа задача, во општ случај, би морало да се реши со помош на некој од нумеричките методи за оптимизација, но имајќи ја предвид линеарната структура на моделот, во случајов може да се добие експлицитно, затворено решение:

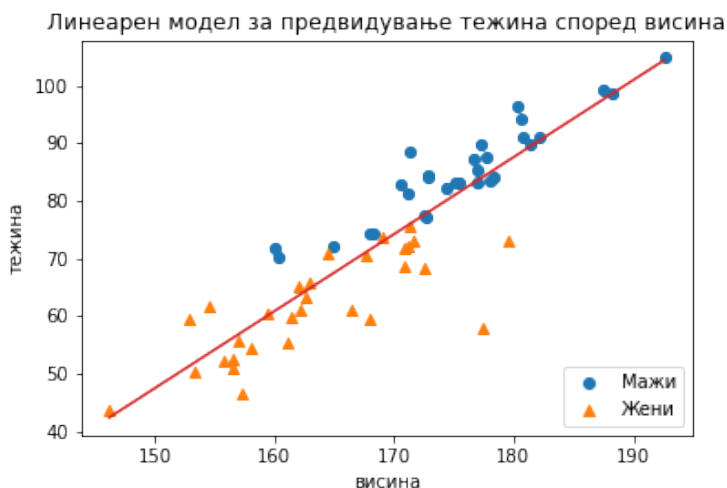
$$w = (X^T X)^{-1} X^T y,$$

што значи дека пресметката на коефициентите на моделот се сведува на едноставни операции со матрици. Овој факт, заедно со простата структура, го прават линеарниот регресионен модел доста примамлив за користење, па во пракса, наместо конструкција на посложени модели, често се прибегнува кон *линеаризација* на податоците за да се доведат до облик соодветен за моделирање со линеарен регресионен модел. Во продолжение ќе разгледаме пример на примена на ваков модел.

Висина (cm)	Тежина (kg)	Пол
172.7	77.2	M
172.6	77.4	M
162.7	63.3	F
156.5	51.0	F

Табела 1. Дел од податочното множество кое ќе го користиме.

Пример 1. Дадено ни е податочно множество со набљудувања поврзани со висината, тежината и полот на 60 лица. Дел од податоците се прикажани во Табела 1. Целта е да се конструира линеарен модел врз чија основа може да се изврши предвидување на тежината на лице, ако се знае неговата висина. Податоците се прикажани на дијаграм на расејување на Слика 1 на која со соодветен симбол е означен и полот (ова ќе ни биде потребно подоцна).



Слика 1. Дијаграм на расејување за податоците кои ги моделираме во примерот 1. Црвената линија е линеарниот модел за податоците.

Според податоците, тежината y може да се предвиди на основа на висината x со помош на моделот:

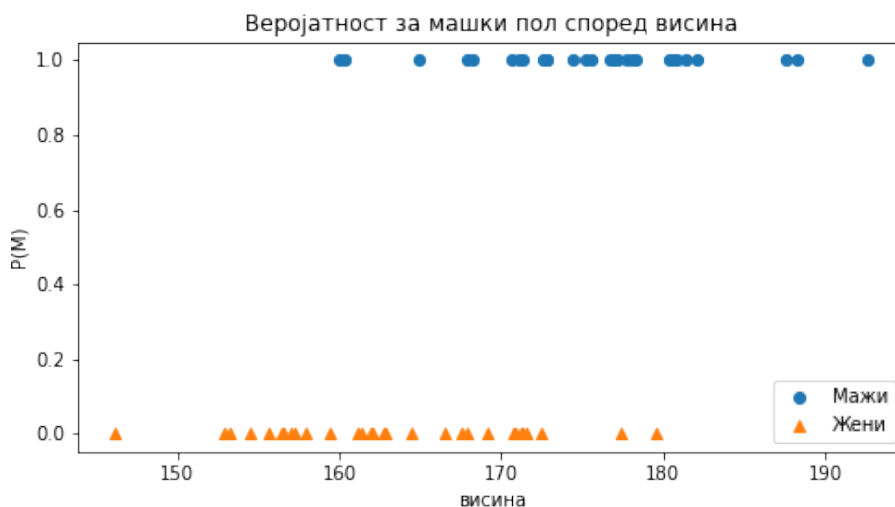
$$\hat{y} = -153.1 + 1.34x$$

Според моделот, предвидувањето е дека лице со висина од 172.7 cm би тежело 78.3 kg, но во првиот ред од Табела 1 гледаме дека лице со оваа висина тежи 77.2 kg, што значи дека моделот прилично добро си ја врши работата. Отстапувањето на предвидената од вистинската вредност се должи на фактот дека моделот кој го користиме е од стохастичка природа, односно вистинската зависност помеѓу влезните и излезната променлива не се чисто линеарни, туку содржат и стохастичка компонента (означена со ε во (1)).

1. МОДЕЛИРАЊЕ ВЕРОЈАТНОСТИ

Видовме дека линеарниот модел се покажа како соодветен избор за опишување на зависноста на висината и тежината на лицата од податочното множество. Но, целта е да конструираме модел кој ќе го предвидува полот на лицето на основа на висината и/или тежината. Прва пречка со која треба да се справиме за во оваа ситуација да може да се примени линеарен модел на оваа ситуација е фактот што полот, завис-

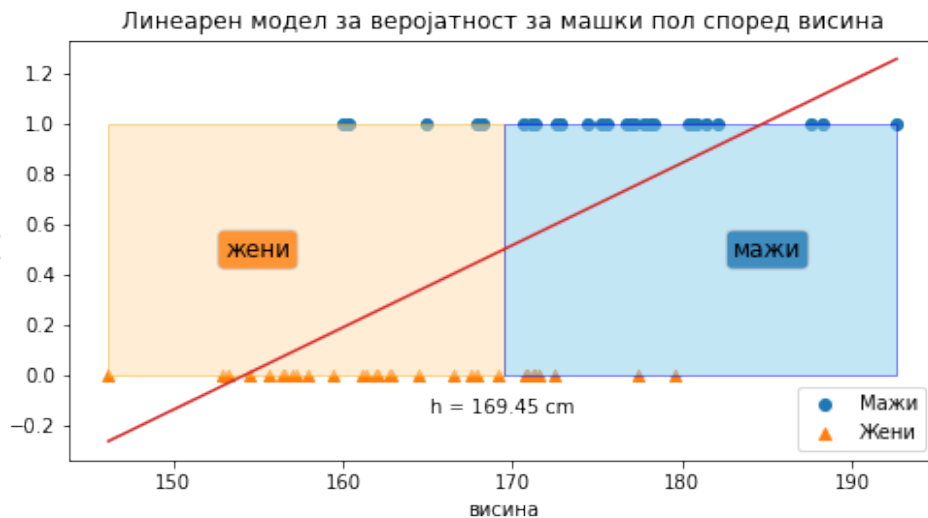
ната променлива, не е од нумеричка природа. Ова може да се надмине лесно ако работиме со *веројатноста* лице да биде од одреден пол, наместо со самата „вредност“ на полот. Така, воведуваме нова променлива-индикатор M за која ќе важи $P(M) = 1$, ако соодветното лице е од машки пол, и $P(M) = 0$, ако лицето е од женски пол. На овој начин се врши кодирање на категориската променлива *пол* и сега веќе може да конструираме, барем во принцип, линеарен модел кој ќе ја предвидува *веројатноста* лице да биде од машки пол на основа на висината и/или тежината. На Слика 2 е даден дијаграм на расејување на веројатноста $P(M)$ и висината, со и без линеарниот модел.



Слика 2. а) Дијаграм на расејување на $P(M)$ наспрема висината;

Јасно е дека е прилично лесно да се изврши класификација на лицата според нивниот пол со користење на моделот. Има смисла да се користи следново правило: доколку моделот предвидува веројатност од барем 0,5 лицето да биде од машки пол, тогаш го класифицираме како машко; во спротивно го класифицираме како женско. На Слика 2 б) се дадени регионите за класификација: сите лица повисоки од 169,45 cm ќе бидат класифицирани како машки, а сите пониски од таа вредност – како женски.

Очекувано, ќе има и погрешни класификации бидејќи моделот не е совршен (за оценка на моделот ќе дискутираме понатаму), но самиот модел има еден очигледен недостаток.



Слика 2. б) Линеарен модел за $P(M)$ на основа на висината и можна класификација на полот на основа на моделот.

Имено, линеарната функција не е ограничена на нејзината дефинициона област, па како таква не е соодветна за моделирање веројатности, кои, пак, припаѓаат во интервалот $(0, 1)$. На пример, за многу високи лица моделот ќе даде веројатност поголема од 1, а за многу ниски лица – негативна веројатност. Ова не наведува да заклучиме дека во принцип е можно веројатности да се моделираат со помош на линеарен регресионен модел, но дека моделот при ваквата примена има недостатоци. Затоа, мора да прибегнеме кон моделирање на друга величина кој е поврзана со веројатноста, но е во склад со неограниченоста на линеарната функција.

2. МОДЕЛИРАЊЕ ШАНСИ

Постои една друга величина која ја содржи истата информација како и веројатноста, но по својата големина е посоодветна за моделирање со помош на линеарен модел. Станува збор за *шансите* (анг. *odds*) да настапи еден настан.

Нека веројатноста да настапи настанот A е еднаква на $p \in (0,1)$. Под „шанса да настапи настанот A “, со ознака o , ќе го подразбираме количникот:

$$o = \frac{p}{1-p}.$$

На пример, ако за веројатноста на некој настан имаме $p = \frac{1}{3}$, тогаш шансата да настапи тој настан е: $o = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} = 1:2$, односно велеме

дека настанот има „еден спрема два“ или „еден во два“ шанси да настапи. Со други зборови, шансите велат дека за секое едно настапување, имаме две ненастапувања на настанот. Од ова се гледа дека шансите се сосема во склад со веројатностите.

Она што може да го заклучиме е следново: од $p \in (0,1)$ следи дека $o \in (0, +\infty)$ и трансформацијата $p \mapsto \frac{p}{1-p}$ е монотono растечка на $(0, 1)$.

Но ова сè уште не е облик кој целосно соодветствува на линеарниот модел. Во последниот чекор, наместо вредноста на шансата, ја земаме вредноста на природниот логаритам од шансата. Така се добива конечната трансформација:

$$p \mapsto \ln \frac{p}{1-p}. \quad (3)$$

Бидејќи $\ln : (0, +\infty) \rightarrow (-\infty, +\infty)$, заклучуваме дека трансформацијата дадена во (3) го пресликува интервалот $(0, 1)$ во $(-\infty, +\infty)$. Конечно, заклучуваме дека логаритмот од шансата е величина која е соодветно да се моделира со помош на линеарен регресионен модел. Ова значи дека моделот е:

$$\hat{y} = \ln \frac{p}{1-p},$$

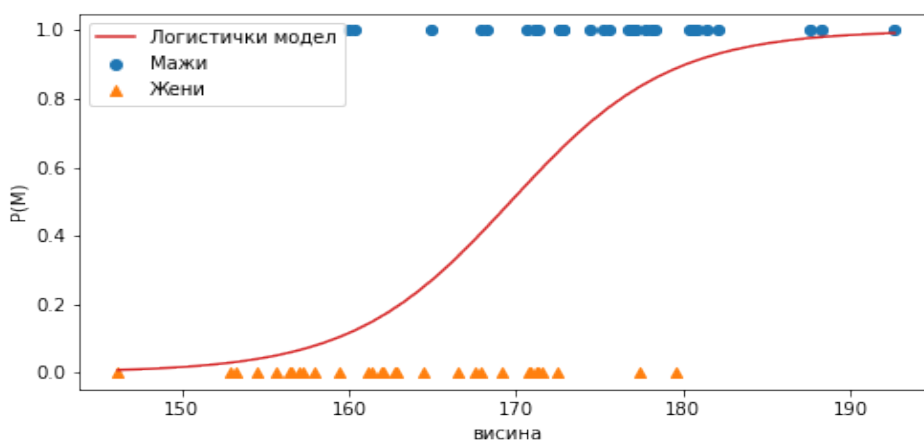
од каде со преуредување на изразот, може да добиеме посреден модел за веројатноста даден со:

$$p = \frac{e^{\hat{y}}}{1+e^{\hat{y}}} \Leftrightarrow p = \frac{1}{1+e^{-\hat{y}}}$$

Овој модел се нарекува *логистички регресионен модел* и, според конструкцијата, секогаш дава вредности во интервалот $(0, 1)$ кои може директно да се толкуваат како веројатности. Да забележиме дека $\hat{y} = Xw$ е линеарниот модел чија конструкција ја дискутиравме во точка 1 и кај

кој коефициентите w се добиени со решавање на задачата на минимизација без ограничувања (2) со помош на методот на најмали квадрати.

Пример 2. Примена на логистичкиот модел на податочното множество со кое работиме резултира со моделот даден на Слика 3. На сликата јасно се гледа дека иако логаритмот од шансата зависи линеарно од висината на лицата, веројатноста не зависи линеарно. Овој модел очигледно е подобар бидејќи (i) ограничен е на $(0, 1)$ што е соодветно за веројатноста и (ii) промената на веројатноста не е константна во однос на промената на висината.



Слика 3. Логистички модел за моделирање на веројатноста $P(M)$ на основа на висината на лицата.

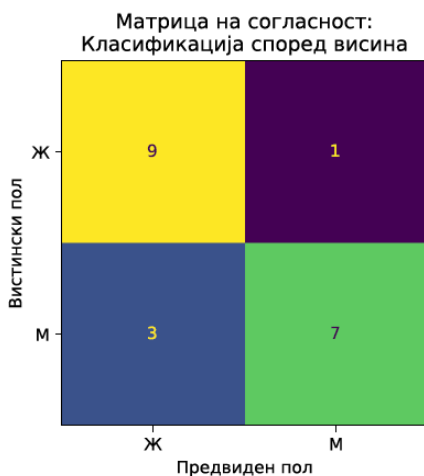
Слично како и претходно, како лице од машки пол го класифицираме секое лице за кое, врз основа на висината, моделот предвидува веројатност поголема од 0,5; во спротивно го класифицираме тоа лице како женско. Да се потсетиме дека ова го правиме поради тоа што избравме моделот да ја моделира веројатноста на настанов „лицето е од машки пол.“

Но, и при вакви услови постои можност моделот да направи погрешна класификација. Ова е факт кој не може да го избегнеме, бидејќи во принцип е невозможно само врз основа на висината на лица да се изврши нивна совршена класификација по пол. Останува уште да извршиме оценка на моделот во контекст на прецизноста на класификацијата.

3. ОЦЕНКА НА МОДЕЛОТ

Постојат повеќе начини на кои може да се оцени моделот. Ние тука ќе изложиме еден мошне едноставен пристап. Треба да го имаме предвид е следново: оценка на моделот не се прави на основа на податоци кои моделот „ги видел“, т.е. податоци на основа врз кои моделот е конструиран; моделот секогаш треба да се оценува на „свежи“ податоци кои се сродни, но не идентични со податоците користени во негова конструкција. Во пракса, се препорачува, околу 25% од податочното множество да се издвои за оваа цел уште пред конструкцијата на моделот. На ваков начин се формира *тестирачко множество*. Ние располагаме со симболично множество од 20 лица, по десет машки и женски.

Оценката на моделот ја вршиме на следниов начин: за секое лице во тестирачкото множество, вршиме класификација со помош на моделот. Потоа ја споредуваме класификацијата на моделот со „вистинската“ состојба и бележиме дали моделот класифицирал точно или не. Резултатите ги прикажуваме во табела-матрица која ја нарекуваме *матрица на согласност* (анг. *confusion matrix*).



Слика 4. Матрица на согласност за моделот на логистичка регресија за класификација на лица според пол на основа на висина.

Она што може да забележиме е дека моделот има глобална точност на класификација од 80% (само четири лица од 20 не се точно класифицирани), но точноста е различна за машки (70%, три од десет неточни) и

женски (90%, само еден од десет неточни). Ова значи дека моделот не е подеднакво добар во препознавање машки и женски и може да заклучиме дека со осетно поголема точност класифицира женски одошто машки. Иако процентот на точно класифицирани лица е висок, сепак ова е прилично скроман резултат. Врз основа на мало податочно и тестирачко множество, и ваквиот резултат е сосема солиден.

4. ЗАКЛУЧОК

На самиот почеток си поставивме задача да го воведеме моделот на линеарна регресија, да ја опишеме неговата конструкција и неговите особености и да го примениме во два различни контексти. Иако навидум неприродно и непогодно, успеавме да покажеме како може да се надминат недоследностите кои ги носи наивната примена на моделот на линеарна регресија при негова примена на задачата на бинарна класификација. Ова не доведе до соодветен модел за класификација заснован на шанси наместо на веројатност кој се нарекува модел на логистичка регресија. Примената и оценката на овој модел ја илустриравме со негова примена на задачата на класификација на лица според пол на основа на нивната висина.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] M. P. Deisenroth, A. A. Faisal, C. S. Ong, *Mathematics for Machine Learning*, Cambridge University Press, 2020.
- [2] A. V. Downey, *Think Stats (2nd ed)*, O'Reilly Media, 2015.

1 Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје,
Машински Факултет, Скопје
Руѓер Бошковиќ бр. 18, (1000) Скопје, Р. Северна Македонија
e-mail: filip.nikolovski@mf.ukim.edu.mk

Примен: 7.2.2022

Поправен: 15.2.2022

Одобрен: 16.2.2022

Објавен на интернет: 17.2. 2022

НЕТРАНЗИТИВНИ КОЦКИ

*Ерблина Зекири*¹

1. ВОВЕД

Ако Аце е повисок од Бојан и Бојан е повисок од Цветан, може да заклучиме дека Аце е повисок од Цветан. Овој факт доаѓа од тоа што релацијата „е повисок од“ е транзитивна релација. Значи, ако првиот елемент е во релација со вториот и вториот е во релација со третиот, тогаш следува дека првиот елемент е во релација со третиот. Многу други релации се исто така транзитивни, на пример: „е поголемо од“, „е помало од“, „е изоморфен со“, „е еднакво со“, итн. Секако, ако сите релации беа транзитивни, транзитивноста немаше да биде интересно својство за изучување. Постојат и релации коишто не се транзитивни: на пример: „не е делител на“ не е транзитивна релација затоа тоа што 3 не е делител на 5, 5 не е делител на 12, но оттука не следува дека 3 не е делител на 12. Има голем број на приказни за шаховски мајстори коишто можат да победат секого во шах, освен некои одредени непријатели. И тие непријатели се најчесто играчи коишто не се најдобри или губат од други играчи коишто шаховските мајстори ги победуваат. Значи имаме случај каде што А (мајсторот) го победува В, потоа В го победува С (некој играч што не е играчот А), но С го победува А (мајсторот).

Ќе разгледаме една игра меѓу двајца играчи со три коцки. Секој играч избира една коцка и ја фрла, а потоа се разгледува паднатиот број на коцката. Играчот на чија коцка паднал поголем број победува. Коцките се специјално направени и на секоја страна на коцките е напишан еден број. Интересно е што оваа игра која на прв поглед изгледа доста фер (т.е. двата играчи имаат подеднакви шанси за победа, т.е. еднакви веројатности за победа), може да се направи така да по изборот на коцка од страна на првиот играч, вториот играч секогаш да може да избере коцка со која би имал поголема веројатност за победа над првиот играч. Ваквите коцки всушност ги нарекуваме нетранзитивни коцки.

Нетранзитивните коцки се фасцинантна тема во применетата веројатност. Тие за прв пат доаѓаат во центарот на вниманието како резултат

тат на трудот на Мартин Гарднер ([5]) и претставуваат еден проблем од поголемата класа на нетранзитивни „парадокси“, кои го вклучуваат и добро познатиот Кондорсов парадокс на гласање, [7].

2. ПРИМЕРИ ЗА НЕТРАНЗИТИВНИ КОЦКИ

Постојат различни видови нетранзитивни коцки. Во овој дел ќе наведеме неколку карактеристични примери за нетранзитивни коцки и ќе ги разгледаме нивните својства.

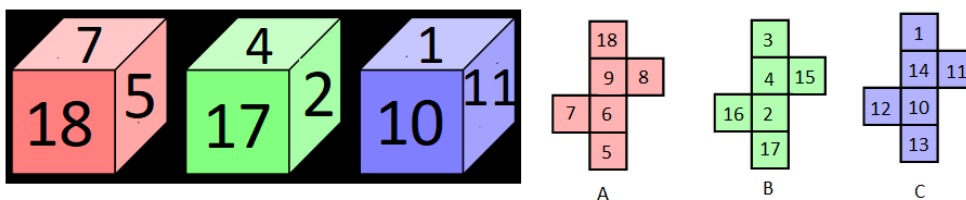
2.1 КОЦКИ СО БРОЕВИТЕ ОД 1 ДО 18

Да претпоставиме дека двајца пријатели ја играат следната игра, [6]. Дадени се три 6-страни коцки (црвена, зелена и сина) на чиешто страни се напишани броевите од 1 до 18. Првиот играч избира една коцка од трите дадени коцки, а по него избира и вториот играч. Тие ги фрлат коцките и го забележуваат паднатиот број. Играчот на чија коцка е паднат поголем број победува и добива еден бод. Ја повторуваат играта неколку пати, да речеме 20 пати. И на крај забележуваат кој има повеќе бодови, тој победува. Броевите од 1 до 18 се запишани на коцките на следниот начин:

ЦРВЕНА (А): 18, 9, 8, 7, 6, 5

ЗЕЛЕНА (В): 17, 16, 15, 4, 3, 2

СИНА (С): 14, 13, 12, 11, 10, 1

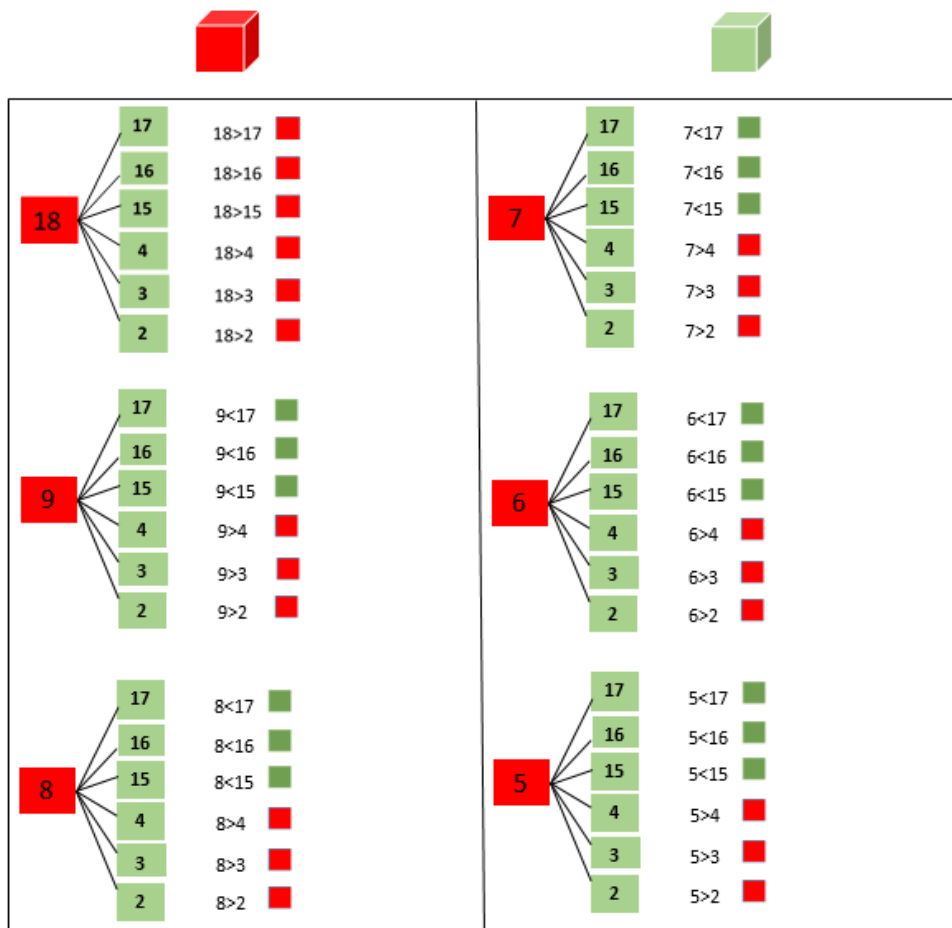


Слика 1. Три нетранзитивни коцки и нивните мрежи.

Оваа игра не е фер, иако можеби изгледа дека е фер. Имено, ако првиот играч избере една коцка, тогаш вториот секогаш може да избере „подобра коцка“, т. е. коцка со поголема веројатност за победа во играта.

Нетранзитивни коцки

Ќе покажеме дека веројатноста да се појави поголем број на коцката А (црвената коцка) отколку на коцката В (зелената коцка) е поголема од $\frac{1}{2}$, т. е. $P(A > B) > \frac{1}{2}$, а со тоа играчот кој ја одбрал коцката А има поголема веројатност за победа, отколку играчот што ја одбрал коцката В.



Слика 2. Веројатноста дека $P(A > B) > \frac{1}{2}$, [8].

Од Слика 2 забележуваме дека црвената коцка победува во 21 од вкупно 36 можни случаи т.е. $P(A > B) = \frac{(6+3+3+3+3+3)}{36} = \frac{21}{36} > \frac{1}{2}$.

Слично се добива и дека $P(B > C) > \frac{1}{2}$ и $P(C > A) > \frac{1}{2}$. Имено,

$$P(B > C) = \frac{(6+6+6+1+1+1)}{36} = \frac{21}{36} > \frac{1}{2} \text{ и}$$

$$P(C > A) = \frac{(5+5+5+5+5+0)}{36} = \frac{25}{36} > \frac{1}{2}.$$

Значи коцката А е „подобра“ од коцката В, коцката В е „подобра“ од коцката С и тоа со веројатност поголема од $\frac{1}{2}$. Но, коцката А не е „подобра“ од коцката С. За овие коцки не важи транзитивноста на оваа релација. Затоа, овие коцки ги нарекуваме нетранзитивни коцки.

Во горниот пример, која било коцка да ја избере противникот ние секогаш можеме да избереме коцка од останатите две за да имаме поголема веројатност за победа од него. На пример, ако противникот ја избере црвената коцка (А), ние ќе ја избереме сината коцка (С) и на овој начин веројатноста да победиме е $\frac{25}{36}$.

Нетранзитивните коцки спаѓаат во општата категорија на нетранзитивни парадокси. Најпознатиот нетранзитивен парадокс е „парадоксот на гласање“ кој за прв пат бил проучуван од Кондорс. Овој парадокс покажува дека ако три кандидати А, В и С конкурираат за една позиција, тогаш постои група гласачи кои го сакаат кандидатот А повеќе од В, го сакаат кандидатот В повеќе од С и го сакаат кандидатот С повеќе од А, [8]. Друг познат парадокс што ќе го објасниме во следниот дел е парадоксот на Штајнхаус-Трибула.

2.2 КОЦКИ НА ШТАЈНХАУС-ТРИБУЛА

Повторно ќе разгледаме една едноставна игра со двајца играчи (но, како што ќе видиме подоцна, не е толку забавна за еден од играчите). Играта се игра со три шестстрани коцки X, Y, Z чии страни се означени на следниот необичен начин, [4].

Двајца играчи, играчот U и играчот I ја играат следната игра. Секој играч избира различна коцка и ја фрла – играчот со поголема вредност на коцката е победник. Играчот I му дава предност на играчот U прв да избере една од која било од трите коцки.

Нетранзитивни коцки

Коцка	Броевите означени на страните на коцката					
X	1	1	4	4	4	4
Y	3	3	3	3	3	3
Z	2	2	2	2	5	5

Табела 1. Коцките од парадоксот на Штајнхаус-Трибула.

Да речеме дека U ја избира коцката X. По малку размислување, играчот I ја избира коцката Z, а потоа и двајцата играчи ги фрлаат своите коцки. Кои се можностите? Бидејќи и двете коцки имаат по 6 страни, имаме вкупно $6 \times 6 = 36$ можности, но поради повторувањата на броевите на страните на коцките, многу од овие исходи не се разликуваат. Во следната Табела 2, во првата колона се вредностите на шесте страни на коцката X, а во првата редица се вредностите на страните на коцката Z. Во табелата пишуваме X ако вредноста на коцката X во таа редица е поголема од вредноста на коцката Z во таа колона и обратно, пишуваме Z, ако вредноста на коцката Z во таа колона е поголема од вредноста на коцката X во таа редица. Ја добиваме табелата:

	2	2	2	2	5	5
1	Z	Z	Z	Z	Z	Z
1	Z	Z	Z	Z	Z	Z
4	X	X	X	X	Z	Z
4	X	X	X	X	Z	Z
4	X	X	X	X	Z	Z
4	X	X	X	X	Z	Z

Табела 2. Пример на игра.

Во табелата гледаме дека 20 пати се јавува буквата Z од вкупно 36 можни полиња, односно коцката Z победува во 20 од вкупно 36 можности. Добиваме дека веројатноста коцката Z да ја победи коцката X е

$$P(Z > X) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}. \text{ На сличен начин добиваме дека } P(X > Y) = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$

и $P(Y > Z) = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$. Ова навидум невозможно сценарио е *парадоксот на Штајнхаус-Трибула*:

„Постојат три независни случајни променливи X, Y, Z така што секоја од веројатностите $P(X > Y), P(Y > Z), P(Z > X)$ е поголема од една половина.“

Парадоксот може да се толкува и на многу други начини. На пример, може да се користи за објаснување на различни ситуации во натпреварувачките спортови и игри каде што еден тим (или играч) има добар резултат за победа против вториот тим, кој пак има добар победнички резултат против трет тим, кој пак има победнички резултат против првиот тим.

Или, на пример, нека три автобуси (да речеме, А, В и С) минуваат покрај одредена автобуска постојка секој ден во исто време. Парадоксот Штајнхаус-Трибула покажува дека поверојатно е автобусот А да пристигне на автобуската постојка пред автобусот В, а автобусот В е повеќеверојатно да пристигне пред автобусот С, додека автобусот С е повеќеверојатно да пристигне пред автобусот А.

За да се наведат други примери, корисно е да има коцки со повеќе страни, не само со 6. Под коцка со n страни (или n -страна коцка) мислиме на некој предмет со n страни и кој може да се фрли (или врти) на рамна површина така што во положба на мирување, точно една од n -те страни лежи на рамната површина и секоја од n -те различни вредности подеднакво веројатно може да се падне да лежи на рамната површина.

Во стандардните шестстрани коцки коцки ја читаме вредноста од страната свртена нагоре, но за нестандартните коцки со повеќе страни може да не постои таква страна. Во таков случај ја читаме вредноста на страната што лежи на рамната површина.

Оригинаалното истражување на парадоксот на Штајнхаус-Трибула воопшто не спомнува коцки, туку целото истражување се однесува на случајни променливи. Во нивните статии се спомнуваат три случајни променливи X, Y и Z за кои е исполнето дека секоја од веројатностите $P(X > Y), P(Y > Z)$ и $P(Z > X)$ е поголема од $1/2$.

Еден интересен резултат е дека барем една од овие веројатности мора да биде најмногу $\frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0,61803\dots$, што е таканаречениот златен пресек (golden ratio), [3]. Златниот пресек е сеприсутна математичка

константа која се појавува како граница на низата $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \dots$

каде што броевите $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$ се членови на низата на

Фибоначи, но и како верижна дробка $\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$.

Теорема 1. ([6]) Нека броевите $1, 2, \dots, 3n$ се наредени на n -страните коцки A, B и C . Тогаш барем една од веројатностите $P(A > B)$, $P(B > C)$ или $P(C > A)$ е помала од $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Доказ: Ќе ги поставиме броевите на n -страните коцки на систематски начин. Прво ставаме еден или повеќе од најголемите броеви на коцката A . Во следниот чекор се ставаат најголемите броеви што останале (еден или повеќе) на коцката B . Потоа се преминува на коцката C и се ставаат најголемите броеви што останале на коцката C . Во наредните чекори се враќаме пак на коцката A . Ја продолжуваме постапката сè додека не се стават сите броеви. Ја формираме низата x_1, x_2, \dots, x_{3k} каде што x_1 е бројот на броеви ставени на коцката A во првиот круг, x_2 е бројот на броеви ставени на коцката B во првиот круг, x_3 е бројот на броеви ставени на коцката C во првиот круг, x_4 бројот на броеви ставени на коцката A во вториот круг и така натаму.

Во примерот од 2.1 може лесно да се провери дека $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 5, x_4 = 5, x_5 = 3, x_6 = 1$.

Забележуваме дека низата x_1, x_2, \dots, x_{3k} ги има следните својства:

$$\text{i)} \quad \sum_{i=1}^k x_{3i} = \sum_{i=1}^k x_{3i-1} = \sum_{i=1}^k x_{3i-2} = n; \quad (1)$$

$$\text{ii)} \quad \text{Броевите } x_i \text{ се ненегативни цели броеви.} \quad (2)$$

Додека бараните веројатности $P(A > B), P(B > C)$ и $P(C > A)$ се дадени со:

$$\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^k x_{3i-2} \left(\sum_{j \geq i} x_{3j-1} \right), \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^k x_{3i-1} \left(\sum_{j \geq i} x_{3j} \right), \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^k x_{3i} \left(\sum_{j \geq i} x_{3j+1} \right), \quad (3)$$

соодветно. Да претпоставиме дека низата $\{x_i\}$ е низа од ненегативни реални броеви наместо само ненегативни цели броеви. Со тоа веројатностите во (3) се непрекинати функции по променливите x_i и затоа ако ја дефинираме функцијата F да биде минимумот од трите веројатности, тогаш F е непрекинатата функција:

$$F(\{x_i\}) = \min \left\{ \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^k x_{3i-2} \left(\sum_{j \geq i} x_{3j-1} \right), \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^k x_{3i-1} \left(\sum_{j \geq i} x_{3j} \right), \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^k x_{3i} \left(\sum_{j \geq i} x_{3j+1} \right) \right\}$$

Од тоа што F е дефинирана на компактно множество, F мора да достигне максимум на тоа множество. За $x_j \neq 0$, но $x_m = 0$, кога $m > j$, ќе покажеме дека должината на низата е j . Нека со α го означиме бројот $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Доказот на Теорема 1 ќе го поделиме во три чекори.

Чекор 1. Покажуваме дека ако $\{x_i\}$ е низа со должина поголема или еднаква на 6, тогаш постои низа $\{z_i\}$ со иста должина во која еден од членовите е нула и за која секоја од веројатностите во (3) е барем толку голема како за низата $\{x_i\}$ т.е. $F(\{z_i\}) \geq F(\{x_i\})$.

Чекор 2. Покажуваме дека од низа во која еден член е нула може да се конструира нова низа која е пократка и за која минимумот на веројатностите во (3) е најмалку еднаков на минимумот на веројатностите за оригиналната низа.

Чекор 3. Ако се комбинираат чекорите 1 и 2 добиваме дека за да ги максимизираме веројатностите што ни се потребни, доволно е да земаме само низи чија должина е помала или еднаква на 5. Овој максимум се пресметува во овој чекор покажувајќи дека броевите $x_1 = \alpha^2 n$, $x_2 = \alpha n$, $x_3 = n$, $x_4 = \alpha n$, $x_5 = \alpha^2 n$ го максимизираат F .

Доказ на чекор 1: Да забележиме дека со повторно означување на броевите на коцките, доколку е потребно, може да претпоставиме дека $x_1 \neq 0$ и $x_2 \neq 0$. Ако некој $x_m = 0$ за $m \geq 3$, при што m е помал од должината на низата, тогаш може да продолжиме на чекор 2. Ако не, ќе најдеме нова низа за која некој член е нула. За да ја добиеме саканата низа $\{z_i\}$ само ќе ги смениме првите 6 члена од низата $\{x_i\}$. Затоа, ако

$i \geq 7$, дефинираме $x_i = z_i$. Дефинираме $z_3 = \lambda x_3$, каде што $\lambda > 0$. Од (1) следува дека мора $z_6 = x_6 + (1 - \lambda)x_3$. Го избираме z_4 така што третата веројатност од веројатностите во (3) е непроменета. Лесно се проверува дека $z_4 = \frac{1}{\lambda}x_4$. Потоа, од (1) повторно мора да имаме $z_1 = x_1 + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)x_4$. Исто така сакаме првата веројатност во (3) да биде непроменета. По кратка пресметка добиваме $z_2 = \lambda x_2$ и затоа $z_5 = x_5 + (1 - \lambda)x_2$. Добивме дека првата и третата веројатност се исти како за низата $\{x_i\}$ така и за низата $\{z_i\}$. Сега, споредувајќи ја втората од веројатностите во (3), за низата $\{z_i\}$ со онаа за $\{x_i\}$ добиваме:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k z_{3i-1} \left(\sum_{j \geq i} z_{3j} \right) - \sum_{i=1}^k x_{3i-1} \left(\sum_{j \geq i} x_{3j} \right) &= (z_2 - x_2)n + z_5(n - z_3) - x_5(n - x_3) \\ &= x_3x_5 - \lambda x_3 \left[(1 - \lambda)x_2 + x_5 \right] = (1 - \lambda)x_3(x_5 - \lambda x_2) \end{aligned} \quad (4)$$

Ако $x_2 \geq x_5$, тогаш изразот во (4) се зголемува по λ , за $\lambda \geq 1$. Оттука, со соодветно избирање на λ , можеме да формираме низа од ненегативни реални броеви таква што или $z_5 = 0$ или $z_6 = 0$ и за кои $F(\{z_i\}) \geq F(\{x_i\})$.

Од друга страна, ако $x_2 < x_5$, тогаш изразот (4) се намалува за $\lambda < 1$. Избираме λ така што $z_1 = 0$. Повторно имаме $F(\{z_i\}) \geq F(\{x_i\})$.

Доказ на чекор 2: Ако $x_2 < x_5$ така што $z_1 = 0$, тогаш тривијално е дека низата $\{y_i\}$ дефинирана со $y_i = z_{i+1}$ е пократка и ги има истите веројатности. Во другиот случај имаме $z_m = 0$ за $m \geq 3$. Ако должината на првичната низа беше 6 и $m = 6$, ја најдовме нашата барана низа. Ако не, дефинираме нова низа $\{y_i\}$ со $y_j = z_j$ ако $j < m - 2$, $y_{m-2} = z_{m-2} + z_{m+1}$, $y_{m-1} = z_{m-1} + z_{m+2}$, $y_m = z_m + z_{m+3}$ и $y_j = z_{j+3}$ ако $j > m$. Може да се провери дека два од трите зборови во дефиницијата за F се исти за $\{z_i\}$ како и за $\{y_i\}$. Збирот што вклучува $y_{m-2}y_{m-1} = (z_{m-2} + z_{m+1})(z_{m-1} + z_{m+2})$ има дополнителен член $z_{m+1}z_{m-1}$, па е поголем или еднаков од збирот за

$\{z_i\}$. Значи, во овој случај добиваме низа $\{y_i\}$ пократка од $\{x_i\}$ со $F(\{y_i\}) \geq F(\{x_i\})$. Како илустрација на оваа идеја, нека $\{x_i\}$ е низа со $x_3 = 0$ и ја формира низата $x_1 + x_4, x_2 + x_5, x_6, x_7, \dots$. Очигледно, веројатноста дека А го победува В е зголемена додека другите веројатности се непроменети.

Доказ на чекор 3: Трите изрази што се разгледуваат во овој чекор се $\left[x_1 n + (n - x_1)(n - x_2) \right] / n^2, x_2 / n, (n - x_1) / n$. Првиот израз е растечка функција како функција од x_1 додека третиот е опаѓачка. Од друга страна првиот израз е опаѓачка функција како функција од x_2 додека вториот е растечка. Така, за низа што го максимизира F , трите изрази мора да бидат еднакви бидејќи ако не беа, може да го зголемиме најмалиот (или двата помали изрази) и притоа ќе се намали поголемиот. Поставувајќи еднаквост меѓу трите изрази се добива $x_2 = n - x_1$, и по соодветни алгебарски трансформации добиваме дека $x_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} n = \alpha^2 n$ и $x_2 = \alpha n$. Формулите за x_4 и x_5 се добиваат аналогно.

Забелешка. Доказот на теоремата за m n -страни коцки се изведува аналогно. На пример, во чекор 3, низите што треба да се разгледаат се со должина од $2m - 1$.

2.3 КОЦКИТЕ НА ЕФРОН

Во овој дел ќе разгледаме уште еден карактеристичен вид нетранзитивни коцки, таканаречени балансиран коцки.

Дефиниција. Нека X_1, X_2, \dots, X_n се n нетранзитивни коцки. Една група од n нетранзитивни коцки се нарекува *балансирана* ако $P(X_1 > X_2) = P(X_2 > X_3) = \dots = P(X_n > X_1)$.

Еден пример на балансиран коцки се коцките на Ефрон, именувани по Бредли Ефрон, човекот кој ги открил, [2]. Коцките на Ефрон се група од 4 шестстрани коцки на кои се напишани броевите 0,1,2,3,4,5,6 на следниот начин:

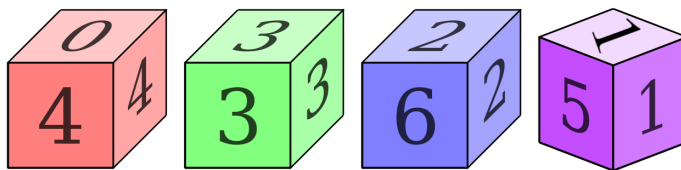
Црвена (А): 0 0 4 4 4 4

Зелена (В): 3 3 3 3 3 3

Сина (С): 2 2 2 2 6 6

Виолетова (D): 1 1 1 5 5 5

Нетранзитивни коцки



Слика 3. Коцките на Ефрон.

Резултатот од коцките на Ефрон е парадоксален циклус, токму заради тоа што:

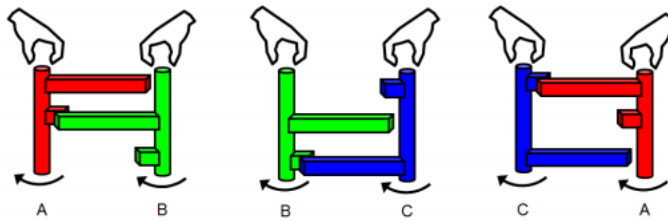
- Коцката А ја победува коцката В со веројатност $P(A > B) = \frac{2}{3}$.
- Коцката В ја победува коцката С со веројатност $P(B > C) = \frac{2}{3}$.
- Коцката С ја победува коцката D со веројатност $P(C > D) = \frac{2}{3}$.
- Коцката D ја победува коцката А со веројатност $P(D > A) = \frac{2}{3}$.

Значи, сите веројатности се еднакви, па коцките на Ефрон се балансирани нетранзитивни коцки.

3. ПРИМЕНА НА НЕТРАНЗИТИВНОСТА

Постојат и многу други примери на нетранзитивни коцки и примена на нетранзитивноста во секојдневниот живот. Како илустрација за крај ќе го наведеме следниот пример да видиме каде може да се користи нетранзитивноста освен кај нетранзитивни коцки, [1].

Три вертикални стапчиња се фиксираат во земја така да можат да се вртат околу фиксирана точка и имаат по 2 хоризонтални стапчиња на нив со различни должини (види слика 4). Стапчињата се со различни бои и оваа игра се игра со двајца играчи така што првиот играч избира еден стап, а потоа и вториот играч избира стап и стапчињата се ставаат во земја блиску едно до друго за да хоризонталните стапчиња можат да се допираат. Победник на играта е играчот кој ќе успее да го помести стапчето на противникот.



Слика 4. Трите стапчиња потребни за играта.

Конкретно, на сликата 4 играчот кој го избрал стапчето А ќе го победи играчот со стапчето В, заради тоа што должината на вертикалниот дел од стапот до првиот хоризонтален стап во кој се допираат е пократка во стапот А отколку во стапот В и на тој начин поголема сила се пренесува во стапчето А па стапчето А ќе го помести стапчето В и така играчот кој игра со стапот А ќе го победи играчот кој игра со стапот В. Аналогно, од исти причини играчот со стапот В ќе го победи играчот со стапот С и играчот со стапот С ќе го победи играчот со стапот А.

Значи, без разлика кој стап го избира првиот играч, противникот секогаш може да избере стап со кој ќе го победи првиот играч.

Последниот пример покажува дека нетранзитивноста може да се примени и во механиката. Останува отворено прашањето дали може нетранзитивноста како својство да се користи и во други области.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] A. Poddiakov, *Intransitive Machines*, National Research University Higher School of Economics.
<https://arxiv.org/abs/1809.03869>
- [2] B. Conrey, *Intransitive Dice*, Mathematics Magazine, 2016.
<https://aimath.org/~kaur/publications/89.pdf>
- [3] D. J. Butler, *Predictably Intransitive Preferences*, Judgment and Decision Making, Vol.13, No.3 (2018), 217–236.
<http://journal.sjdm.org/17/17912b/jdm17912b.html>

- [4] M. Jackson, *Paradoxes with dice and elections*, La Trobe University,
<https://w.mav.vic.edu.au/files/conferences/2004/Jackson.pdf>
- [5] M. Gardner, *Wheels, life, and other mathematical amusements*, (40-50).
<https://bobson.ludost.net/copycrime/mgardner/gardner10.pdf>
- [6] R. P. Savage, *The Paradox of Nontransitive Dice*, *The American Mathematical Monthly* 101 (1994), 429-436.
- [7] William V. Gehrlein, *Condorcet's Paradox and the Condorcet Efficiency of Voting Rules*, *Mathematica Japonica* 45, No 1 (1997) 173–199.
- [8] *Intransitive Dice*, Data Genetics.
<https://datagenetics.com/blog/july12012/index.html>

¹ Универзитет “Св. Кирил и Методиј”, Скопје
Природно-математички факултет,
Архимедова 3, 1000 Скопје, Р. Северна Македонија
e-mail: erblina_zeqiri@hotmail.com

Примен: 9.2.2022

Поправен: 28.2.2022

Одобен: 3.3.2022

Објавен на интернет: 11.3.2022

ЗАДАЧА НА НАЈДОБАР ИЗБОР И ОПТИМАЛНО ЗАПИРАЊЕ

*Ирена Стојковска*¹

При барањето соодветен кандидат за работното место, најдобро паркинг место, идеален стан за живеење, па дури и животен партнер од соништата, се соочуваме со последователно носење одлуки. Во секој чекор треба да одлучиме дали да ја запреме потрагата и да го направиме изборот или да ризикуваме да продолжиме со барањето во надеж дека ќе направиме подобар избор. Математичкиот пристап кој го решава овој вид проблеми е познат како оптимално запирање. Проблемите на оптимално запирање се среќаваат и во статистиката при тестирање хипотези и оценување параметри, во операционите истражувања при замена на машина, нарачка на стоки, во економијата при потрага на високо платени работни места или намирници со ниски цени, на финансиските пазари при тргувањето со акции, итн. ([4]).

Во овој труд, ќе го илустрираме оптималното запирање на познати примери од таа област и ќе дадеме преглед на некои резултати од теоријата на оптимално запирање.

1. ПРОБЛЕМИ НА НАЈДОБАР ИЗБОР

Претпоставете дека треба да одберете стан за изнајмување или уште подобро стан за постојано живеење. Сигурно нема да го одберете првиот слободен стан за изнајмување, односно купување и сигурно веќе имате изградено одреден критериум за пребарување според местоположбата, големината или цената. Но, и покрај добро утврдениот критериум и покрај тоа што можеби веќе сте нашле стан кој ги задоволува вашите барања, сепак вие ја продолжувате потрагата со надеж дека ќе најдете уште подобар стан. Многу веројатно во текот на барањето вашите критериуми да се смениле, ослабнале или зајакнале. При тоа, при секое одбивање на стан, преземате ризик дека веќе видениот стан можеби нема да е слободен во иднина, ако некогаш во иднината се одлучите за него. Имено, во текот на вашата потрага, при секое разгледување на стан, вие носите последователни одлуки, одлучувате дали да го земете

станот или да продолжите со барањето. Всушност во вашата намера да ги максимизирате шансите за наоѓање на најдобар стан, одлуката нема да се состои во тоа кој стан да го одберете, туку колку станови да разгледате пред да ја донесете одлуката, базирана на дотогаш изградениот критериум. Ова е пример на *проблем на оптимално запирање*.

Друг секојдневен проблем со кој се соочуваат возачите е барањето на паркинг место. Влегувате на паркингот и потрагата почнува. На почетокот, на делот од паркингот кој е далеку од влезот на зградата, има слободни места, но како што се приближувате кон влезот на зградата, нивниот број се намалува. И на крај ги снемува. Вие секако, сакате да паркирате што е можно поблиску до влезот на зградата. Затоа, треба да одлучите колку круга да свртите околу паркингот пред да го одберете паркинг местото со најголеми шанси дека е најдобро.

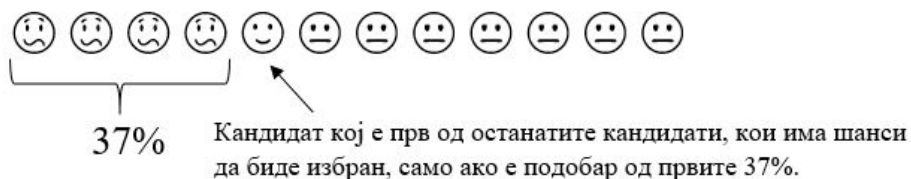
При решавањето проблеми од ваков тип, повеќето од луѓето интуитивно ќе одговорат дека треба да се биде одмерено пребирлив, одосно да се погледаат доволен број станови за да се оформи критериумот, а потоа да се одбере станот кој ги задоволува поставените стандарди. Или, пак, во зависност од степенот на зафатеност на паркингот, да се почне со барање на слободно место дури по одреден број на поминати празни места. Интересно е што тој одреден број е измерлив број и изнесува 37%, [9].

2. ПРАВИЛОТО НА 37%

Да претпоставиме дека го знаете бројот на станови кои се моментално достапни на пазарот, односно позната ви е зафатеноста на паркингот, т.е. вкупниот број слободни места за паркирање. Според правилото на 37%, треба да разгледате 37% од достапните станови, а потоа да го одберете првиот стан кој е подобар од разгледаните станови. Во случајот со места за паркирање, треба да поминете 37% од слободните места и да паркирате на првото слободно место на кое ќе најдете (Слика 1).

Да забележиме дека, овој начин не гарантира дека сте го избрале најдобриот стан, односно најблиското паркинг место до влезот на зградата, туку дека сте ја максимизирале веројатноста да го направите најдобриот избор, што од своја страна може да биде задоволителен резултат.

тат и да ве зачува од понатамошно трошење на времето во пребарување. Правилото на 37% ќе го покажеме во следниот дел.



Слика 1. Правилото на 37%.

2.1. ЗАДАЧАТА НА НАЈДОБАР ИЗБОР НА СЕКРЕТАРКА

Ќе разгледаме модел на проблемот кој најчесто се среќава во литературата кога се објаснува правилото на 37%, т.е. *задачата за најдобар избор на секретарка* (Secretary Problem), [3].

Задачата за најдобар избор на секретарка во нејзиниот наједноставен облик се состои од следните претпоставки:

1. Постои само едно слободно работно место за секретарка.
2. Познат е бројот n на кандидати за тоа работно место.
3. Кандидатите се интервјуираат еден по еден по случаен редослед, со еднакви шанси за избор на секој од случајните редоследи.
4. Претпоставуваме дека постои начин за рангирање на секој од кандидатите од најлош до најдобар. Одлуката за прием на кандидатот се прави во однос на рангирањата на веќе интервјуираните кандидати.
5. Еднаш одбиен кандидат не може повторно да биде повикан.
6. Целта е да се одбере најдобриот кандидат.

Стратегијата за решавање на овој проблем е следната: се одбиваат првите $(r - 1)$ кандидати, а потоа се избира првиот кандидат кој е најдобар во однос на веќе интервјуираните и одбиени $(r - 1)$ кандидати и процесот на интервјуирање завршува. Ако таков кандидат нема, тогаш се избира последно интервјуираниот n -ти кандидат. Да ја најдеме вредноста на r ($r \geq 1$) за која веројатноста $\phi_n(r)$ за избор на најдобриот

кандидат од сите n кандидати, кога сме ги одбиле првите $(r-1)$ кандидати е најголема. Да ја пресметаме веројатноста $\phi_n(r)$.

За $r=1$, имаме дека $\phi_n(r)=1/n$, а за $r>1$ имаме дека

$$\begin{aligned}\phi_n(r) &= \sum_{j=r}^n P\left(\begin{array}{l} j\text{-тиот кандидат е најдобар} \\ \text{и ние го избираме} \end{array}\right) = \\ &= \sum_{j=r}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{r-1}{j-1} = \frac{r-1}{n} \sum_{j=r}^n \frac{1}{j-1}.\end{aligned}$$

Имено, ако дефинираме настани A_j – j -тиот кандидат е најдобар и настан B_j – избран е j -тиот кандидат, тогаш од теоремата за множење на веројатности имаме:

$$P\left(\begin{array}{l} j\text{-тиот кандидат е најдобар} \\ \text{и ние го избираме} \end{array}\right) = P(A_j B_j) = P(A_j)P(B_j | A_j).$$

Веројатноста j -тиот кандидат да е најдобар е $P(A_j)=1/n$, а условната веројатност да го избереме j -тиот кандидат, при услов тој да е најдобар е еднаква со веројатноста да најдобро рангираме кандидатот од првите $(j-1)$ кандидати е меѓу првите $(r-1)$ кандидати, односно $P(B_j | A_j)=(r-1)/(j-1)$, затоа што, според нашата стратегија, само тогаш сме продолжиле да го интервјуираме j -тиот кандидат и ако j -тиот кандидат е најдобриот, тогаш го избираме.

Да забележиме дека за мали вредности на n , барањето на r којшто ја максимизира веројатноста $\phi_n(r)$ е лесно пресметливо. Оптималното r може да се добие од следните две неравенства:

$$\phi_n(r-1) < \phi_n(r) \quad \text{и} \quad \phi_n(r) > \phi_n(r+1).$$

Оттука се добива дека

$$1 < \sum_{j=r}^n \frac{1}{j-1} \quad \text{и} \quad 1 > \sum_{j=r+1}^n \frac{1}{j-1}$$

или

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r+1} + \dots + \frac{1}{n-1} < 1 < \frac{1}{r-1} + \frac{1}{r} + \dots + \frac{1}{n-1}.$$

Последното неравенство може да се искористи за наоѓање на оптималната вредност на r за дадено n . Во Табела 1 се дадени оптималните вредности за r за првите $n \leq 20$. Во истата табела во последниот ред е пресметан и процентот од вкупниот број кандидати кој одговара на отфрлените $(r-1)$ кандидати.

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
r	2	2	3	3	3	3	4	4	5	5	6	6	6	7	7	7	8	8
$r-1$	1	1	2	2	2	2	3	3	4	4	5	5	5	6	6	6	7	7
%	33	25	40	33	29	25	33	30	36	33	38	36	33	37	35	33	37	35

Табела 1. Оптимални вредности за r т.е. првиот кандидат кој може да се избере, ако е подобар од првите $(r-1)$ кандидати.

Подоцна ќе видиме дека барањето на оптималната вредност на r на овој начин со сумирање на дропките сè до првото надминување на сумата над 1 лежи во основата на алгоритмот на Брус за оптимално запирање, [1] (види 3.2).

Од Табела 1 може да воочиме и дека со зголемување на вредноста на n , процентот од вкупниот број на кандидати којшто одговара на отфрлените $(r-1)$ кандидати, како да се приближува кон 37%. Ќе покажеме дека таа гранична вредност навистина е приближно 37%, [3]. Да ја означиме со x границата на $(r-1)/n$ кога n се стреми кон бесконечност. Тогаш, сумата во формулата за $\phi_n(r)$ може да се интерпретира како Риманова сума, а со тоа и Риманова апроксимација на следниот интеграл:

$$\phi_n(r) = \frac{r-1}{n} \sum_{j=r}^n \frac{1}{j-1} = \frac{r-1}{n} \sum_{j=r}^n \frac{n}{j-1} \cdot \frac{1}{n} \longrightarrow x \int_x^1 \frac{1}{t} dt = -x \ln x,$$

кога $n \rightarrow \infty$. Со изедначување на првиот извод на нула, добиваме дека вредноста на x која ја максимизира последната функција (вториот

извод е секогаш негативен за позитивни x , па затоа стационарната точка е точка на максимум) е $x = 1/e = 0,367879... \approx 37\%$, а воедно и максималната веројатност е $-x \ln x = 1/e = 0,367879... \approx 37\%$.

Значи, за големи вредности на n , приближно оптимално е да се чека да се интервјуираат околу 37% од кандидатите, а потоа да се одбере првиот кандидат кој е подобар од интервјуираните кандидати. Веројатноста дека на тој начин е одбран најдобриот кандидат исто така е околу 37%.

Задачата на најдобар избор на секретарка е еден од најпроучуваните проблеми на оптимално запирање и постојат многу нејзини варијанти, [5, 8, 10].

2.2. ИГРАТА ГУГОЛ

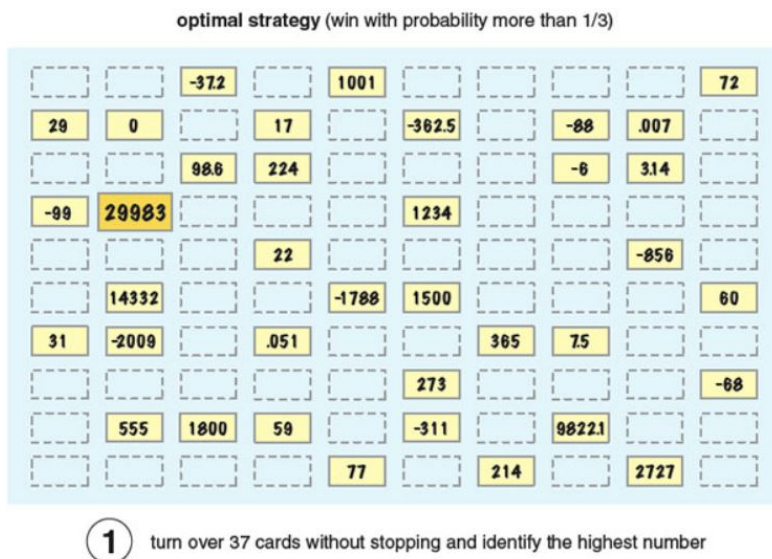
Историските белешки кажуваат дека првиот пишан извор во кој се среќава проблемот на оптимално запирање и најдобар избор е во прилогот на Мартин Гарднер во *Scientific American* во февруари 1960 година, [3]. Но, и самиот Мартин Гарднер се повикува на други научници од кои го слушнал овој проблем, тие на други итн. Проблемот на оптимално запирање на Мартин Гарднер од 1960 година е со поинаков текст од задачата на најдобар избор на секретарка, тој проблем е познат како *Играта Гугол* и гласи вака:

Побарај од пријателот да земе колку сака картички и на секоја картичка да запише различен позитивен број. Опсегот на броевите може да биде од многу мали дропки близу нулата до многу големи броеви од типот на гугол (единица со 100 нули), а може и поголеми. Овие картички се поставени на масата со лицето надолу. Ти треба да ги вртиш картичките една по една. Целта е да одлучиш кога да престанеш со вртењето на картичките и да прогласиш дека си го нашол најголемиот број запишан на картичките. Не можеш да се вратиш назад и да одбереш број од картичка која претходно е свртена. Ако ги свртиш сите картички, тогаш ја одбираш последно свртената картичка.

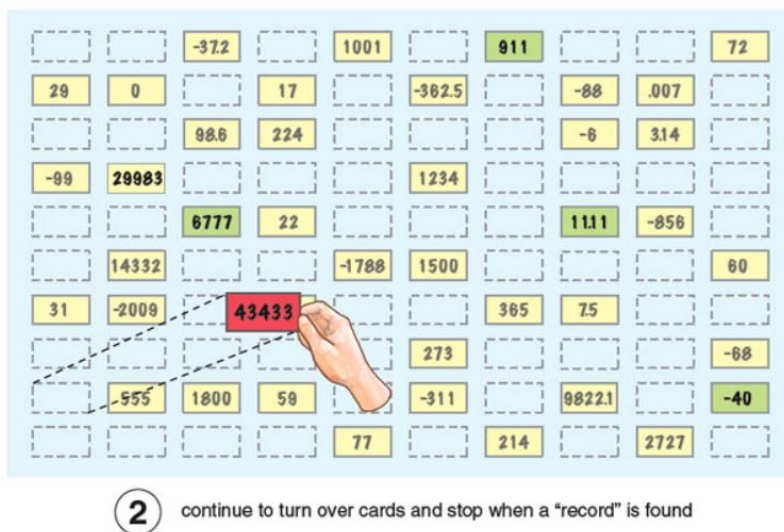
На Слика 2 и Слика 3 е прикажана варијанта на Играта Гугол со 100 картички со позитивни и негативни броеви, [7]. На Слика 2 се

Задача на најдобар избор и оптимално запирање

завртени 37 од картичките и одреден е најголемиот број, тоа е 29983. Потоа, се превртуваат картички, една по една, сè до првото појавување на број поголем од 29983, тоа е бројот 43433 (Слика 3). Веројатноста дека сме го нашле најголемиот број е поголема од $1/3$.



Слика 2. Варијанта на Играта Гугол со 100 картички – Прв чекор: заврти ги првите 37 картички и одреди го најголемиот број, [7].



Слика 3. Варијанта на Играта Гугол со 100 картички – Втор чекор: продолжи да ги вртиш една по една картичките сè до првото појавување на број поголем од најголемиот број меѓу првите 37 броја, [7].

Да забележиме дека Играта Гугол не е задача за најдобар избор на секретарка. Прво, нарушена е претпоставката 4, носителот на одлуки ги дознава вистинските вредности на броевите на картичките, а не нивно-то рангирање и нарушена е претпоставката 3 за случаен избор на броевите кои ќе бидат запишани на картичките, затоа што пријателот е тој кој ги запишува броевите на картичките. Всушност Играта Гугол, според теоријата на игри, е игра со два играчи.

Во литературата постојат многу трудови за Играта Гугол и повеќе понудени решенија, меѓу кои и тоа на Гнедин за постоење на правило на запирање базирано на релативните рангови, при кое се постигнува максимална веројатност за успех, [6]. Можеби токму од овие причини, заради овој резултат на Гнедин, според кој постои оптимално правило на запирање како и кај задачата за најдобар избор на секретарка, Играта Гугол се смета за првиот пишан извор за задачата на најдобар избор.

3. ТЕОРИЈА НА ОПТИМАЛНО ЗАПИРАЊЕ

Во науката секогаш е корисно за разгледуваниот проблем да се конструираат математички модели за на тој начин да се опфати поширока класа проблеми. Тогаш, методот кој ќе го решава разгледуваниот проблем ќе може да се примени и на проблемите од пошироката класа проблеми.

Така, со теоријата на оптимално запирање се моделираат проблеми од областа на статистиката, операционите истражувања, финансиите, осигурувањето и слично, проблеми во кои заради ограниченост на времето, просторот или информациите, носителот на одлуки треба да одбере време кога да изврши одредено дејствие со цел да се максимизира очекуваната исплата или да се минимизира очекуваниот трошок, [4].

Моделот на *задачата на оптимално запирање* се состои од:

i) низа од случајни променливи X_1, X_2, \dots со позната заедничка распределба; и

ii) низа од реално-вредносни функции на исплати

$$y_0, y_1(x_1), y_2(x_1, x_2), \dots, y_n(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, y_\infty(x_1, x_2, \dots).$$

Случајните променливи се набљудуваат една по една и се забележуваат нивните вредности x_1, x_2, \dots соодветно. Доколку набљудувачот одлучи за запре во n -тиот чекор, ќе добие исплата $y_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Ако одлучи воопшто да не набљудува – ќе добие константна исплата y_0 , а ако не сопре никогаш – ќе добие исплата $y_\infty(x_1, x_2, \dots)$. Ќе дозволиме исплатата да може да прими вредност $-\infty$, но ќе претпоставиме дека исплатите се рамномерно ограничени одозгора со случајна променлива со конечно математичко очекување, за подолу дефинираните математички очекувања да имаат смисла. Целта е да се одбере време на запирање, при што ќе се максимизира очекуваната исплата.

Дефинираме *правило на запирање*, како низа од функции

$$\phi = (\phi_0, \phi_1(x_1), \phi_2(x_1, x_2), \dots),$$

каде што $0 \leq \phi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 1$ е веројатноста за запирање во n -тиот чекор на набљудувањето, за дадени набљудувани вредности x_1, x_2, \dots, x_n на првите n случајни променливи X_1, X_2, \dots, X_n . Притоа, ϕ_0 е веројатноста дека нема да има набљудувања, $\phi_1(x_1)$ е веројатноста за запирање по првото набљудување, итн. Ова е пример на рандомизирано правило на запирање. Правилото на запирање ϕ е нерандомизирано, ако за секој n , веројатноста за запирање $\phi_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ во n -тиот чекор е 0 или 1.

Со правилото на запирање ϕ и низата од набљудувања $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots)$ е определено случајното *време на запирање* N , коешто прима ненегативни целобројни вредности $0 \leq N < \infty$ или $N = \infty$, ако запирањето не се случи. Распределбата на N за дадени вредности $\mathbf{X} = \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$ ја означуваме со

$$P(N = n | \mathbf{X} = \mathbf{x}) = \psi_n(x_1, x_2, \dots, x_n), n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$P(N = \infty | \mathbf{X} = \mathbf{x}) = \psi_\infty(x_1, x_2, \dots)$$

и таа е одредена од правилото на запирање на следниот начин:

$$\psi_0 = \phi_0,$$

$$\psi_1(x_1) = (1 - \phi_0)\phi_1(x_1), \dots,$$

$$\psi_n(x_1, \dots, x_n) = \left[\prod_{j=0}^{n-1} (1 - \phi_j(x_1, \dots, x_j)) \right] \phi_n(x_1, \dots, x_n), \dots,$$

$$\psi_\infty(x_1, x_2, \dots) = 1 - \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j(x_1, \dots, x_j),$$

каде што $\psi_\infty(x_1, x_2, \dots)$ е веројатноста набљудувањето да не сопре.

Треба да се одбере правило на запирање ϕ кое ќе ја максимизира очекуваната исплата дефинирана со:

$$V(\phi) = E y_N(X_1, X_2, \dots, X_N) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j(x_1, x_2, \dots, x_j) y_j(x_1, x_2, \dots, x_j) \right) + \psi_\infty(x_1, x_2, \dots) y_\infty(x_1, x_2, \dots).$$

3.1. МОДЕЛИ НА ОПТИМАЛНО ЗАПИРАЊЕ

Во овој дел ќе разгледаме неколку модели на оптимално запирање измоделирани како задача на оптимално запирање, [4]. За секој модел ќе бидат дефинирани низата од случајни променливи X_1, X_2, \dots и низата од функции на исплати.

1) *Проблемот на продажба на куќа е следниот: Понудите за куќата која сакате да ја продадете пристигнуваат секојдневно. Нека X_n е висината на понудата пристигната во n -тиот ден. Вам не ви се познати вредностите на понудите пред да пристигнат, но претпоставувате дека се независни и еднакво распределени со позната распределба на веројатности. Секоја понуда ве чини $c > 0$ парични единици за да ја разгледате (може да сметате на c како на трошок за живеење). Кога ќе ја добиете понудата X_n , мора да одлучите дали да ја прифатите или да чекате подобра понуда. Знаете дека подобра понуда некогаш ќе има, но прашањето е дали сте подготвени да чекате толку долго на сметка на трошоците за секојдневното разгледување на понудите?*

Тука, X_1, X_2, \dots се независни и еднакво распределени случајни променливи со позната распределба. Разгледуваме два случаја за дефинирање на низата од функции на исплати.

а) Во случај да не ви е дозволено да ја прифатите помината понуда, низата од функции на исплати е:

$$y_0 = 0,$$

$$y_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_n - nc, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$y_\infty(x_1, x_2, \dots) = -\infty.$$

б) Во случај да ви е дозволено да ја прифатите помината понуда, низата од функции на исплати е:

$$y_0 = 0,$$

$$y_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \max(x_1, x_2, \dots, x_n) - nc, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$y_\infty(x_1, x_2, \dots) = -\infty.$$

Во економската литература, овој проблем се нарекува и *проблем на барање работа*. Невработено лице бара работа, секое пребарување го чини одредена сума на време и изгубен доход. Кога ќе најде одредена работа, дури тогаш ги дознава условите за работа, вклучително и платата. Проблемот се состои во одредување на бројот на работни позиции кои треба да ги разгледа пред да се одлучи да ја одбере дотогаш најдобро најдената работа.

2) *Проблемот на одредување точка на промена* е следниот: Разгледуваме низа од независни и еднакво распределени случајни променливи X_1, X_2, \dots со позната распределба F_0 . Во некоја точка од времето T , непозната за нас, распределбата на променливите се менува во F_1 . Ние сакаме навремено да алармираме за промената, колку што е можно побрзо по настаната промена. Се претпоставува дека е позната распределбата на T . Трошокот за запирање по промената е изминатото време од настаната промена, а трошокот за лажно алармирање, т.е. запирање пред да настане промената е константата $c > 0$.

Тогаш, вкупниот трошок е

$$Y_n = cI\{n < T\} + (n - T)I\{n \geq T\}, \quad n = 0, 1, \dots \text{ и } Y_\infty = \infty,$$

каде што $I\{\cdot\}$ е индикатор на настан. Бидејќи T е случајна променлива, трошокот може да го замениме со очекуваниот трошок при дадени X_1, X_2, \dots, X_n , т.е.

$$y_n = cP(n < T | \mathbf{F}_n) + E((n - T)^+ | \mathbf{F}_n), \quad n = 0, 1, \dots \text{ и } y_\infty = \infty,$$

при што \mathbf{F}_n е σ - алгебрата генерирана од X_1, X_2, \dots, X_n и $x^+ = \max\{x, 0\}$ е позитивен дел на x .

Овој модел наоѓа примена при: набљудување на промената на пулсот кај срцеви болни, набљудување на промената на квалитетот на некоја производствена линија, набљудување на промената на курсот на проектилите и слично.

3.2. ТЕОРЕМА НА БРУС ЗА ОПТИМАЛНО ЗАПИРАЊЕ

Целта на математичкото моделирање на еден проблем не е само да се даде „математичка слика“ на проблемот, туку и да се најдат математички методи за решавање на проблемот. Во овој дел ќе разгледаме еден од методите на оптимално запирање кој е широко применет, заради неговата едноставност. Тој метод се заснова на теоремата на Брус за оптимално запирање позната како *The Odds Theorem* и алгоритмот базиран на неа, [1].

Проблемот што се разгледува се состои од низа индикатори I_1, I_2, \dots, I_n на независни настани A_1, A_2, \dots, A_n соодветно, дефинирани над ист простор на веројатности (Ω, \mathbf{F}, P) . Се претпоставува дека се познати веројатностите на настаните A_1, A_2, \dots, A_n . (Индикатор на настан A е случајна променлива која прима вредност 1 со веројатност $P(A)$ и вредност 0 со веројатност $1 - P(A)$.) Индикаторите I_1, I_2, \dots се набљудуваат последователно и може да се запре кај било кој од нив и не е дозволено навраќање на поминатите индикатори. Ако $I_k = 1$, тогаш k се нарекува *време на успех*. Целта е да се максимизира веројатноста за избор на последниот успех, односно последниот индикатор со вредност

1. Теоремата на Брус (The Odds Theorem) и алгоритмот базиран на неа нудат начин на конструирање на оптимално правило на запирање за проблемите од овој тип и претставуваат резултат на теоријата на оптимално запирање кој е применлив за многу секвенционални проблеми на одлучување.

Теорема на Брус. (The Odds Theorem, [1])

Нека I_1, I_2, \dots, I_n се низа од независни и еднакво распределени Бернулиеви 0-1 променливи со $p_j = E(I_j)$. Нека $q_j = 1 - p_j$ и $r_j = p_j / q_j$. Тогаш, постои оптимално правило за запирање на последниот успех и се состои во запирање на првиот индекс k со $I_k = 1$ и $k \geq s$, каде што

$$s = \sup \left\{ 1, \sup \left\{ 1 \leq k \leq n : \sum_{j=k}^n r_j \geq 1 \right\} \right\},$$

со $\sup(\emptyset) = -\infty$. Тогаш, оптималната исплата (веројатност за победа)

$$e \text{ } V(n) = \prod_{j=s}^n q_j \sum_{j=s}^n r_j.$$

Теоремата на Брус тврди дека за да се максимизира веројатноста за избор на последниот успех, оптимално е да се запре на првиот успех во низата I_s, I_{s+1}, \dots, I_n , каде s е дефинирано во теоремата, односно треба да се запре кај оној индикатор I_j за кој збирот $r_n + r_{n-1} + \dots + r_j$ прв пат го достигнува или го надминува 1.

Алгоритмот базиран на Теоремата на Брус е следниот:

Чекор 1. Пресметувај ги $q_j = 1 - p_j$, $r_j = p_j / q_j$, $j = n, n-1, \dots$ еден по еден од наназад и за s земи ја онаа вредност за j кога сумата $r_n + r_{n-1} + \dots + r_j$ за првпат ќе достигне или ќе го надмине 1.

Чекор 2. Оптималната веројатност е $V(n) = R_s Q_s$, каде што

$$Q_s = \prod_{j=s}^n q_j \text{ и } R_s = \sum_{j=s}^n r_j.$$

Ќе издвоиме некои примени на алгоритмот на Брус, [2]:

1) *Онлајн оптимизација* – При барање минимум на реално вредносна функција со помош на некој алгоритам за локално пребарување, се испитуват вредностите на функцијата во точки од некоја мрежа во околината на пребарување. Ако функцијата не ја менува драстично својата вредност, тогаш точката во која се достигнала минималната вредност на функцијата може да сметаме дека е точка блиска до точката на вистинскиот минимум. Ако мрежата е многу густа, бројот на точки во кои треба да се пресмета вредноста на функцијата ќе е многу голем и пребарувањето ќе биде неефикасно, па во тој случај потребен е стохастички пристап. Еден таков стохастички пристап е случајното пребарување. Се почнува од една точка x_0 и за следни кандидати се земаат случајни точки од околината на пребарување во надеж дека ќе најдеме на точка во која вредноста на функцијата е помала. Се поставува прашањето, кога да се запре со пребарувањето? Се предлага правилото на запирање да е следното: ако околината на x_k не дава подобри точки, да се вратиме на x_{k-1} , да побараме второ најдобро решение и да ја испитуваме неговата околина. Ако ова испитување даде подобро решение, продолжуваме со алгоритмот, но ако не даде, тогаш x_k го земаме за апроксимација за точка на минимум на функцијата.

2) *Автоматизирано поправање машина* – Со помош на алгоритмот на Брус може да се изработи стратегија за избор на приоритети при автоматизирана замена на деловите на една машина. Алатката за поправка на машината (робот) треба да одлучи кој дел да го замени, ако има повеќе од еден расипан дел. Изборот се прави врз основа на очекуваното време на живот на деловите, времето потребно за замена на делот и веројатноста за расипување. Главен предизвик при примената на алгоритмот на Брус на овој проблем е условот за независност кој не секогаш е задоволен при расипувањето на машините, бидејќи расипувањата на деловите зависат еден од друг.

3) *Оптимизација на софтвер* – Напредните софтверски системи може со помош на алгоритмот на Брус да се реконфигурираат самите

себеси за време на нивното извршување (run time) со тоа што би направиле подобар избор на начин за извршување на одредена функција.

4. ЗАКЛУЧОК

Може да кажеме дека проблемите на оптимално запирање демонстрираат еден општо прифатен принцип во животот, а тоа е дека треба да поминеме одредено време во истражување пред да донесеме некоја одлука, и притоа, за да донесеме што подобра одлука треба да го искористиме тоа што сме го научиле во текот на истражувањето. „Правилото на 37%“ ни дава само груб, но сепак оптимален одговор за тоа кога да сопремене со истражувањето, и притоа да ја максимизираме веројатноста дека одлуката што сме ја донеле врз база на истражувањето, е најдобрата одлука. Во реалноста, животните ситуации се многу посложени, па такви би биле и моделите со кои би ги опишале тие ситуации. Теоријата на оптимално запирање нуди решенија на многу посложени проблеми на оптимално запирање од оние кои се решаваат со „правилото на 37%“.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] F. T. Bruss, *Sum the odds to one and stop*, The Annals of Probability 28 (3) (2000) 1384-1391.
- [2] R. Dendievel, *New developments of the odds theorem*, arXiv:1212.1391v1
- [3] T. S. Ferguson, *Who Solved the Secretary Problem?* Statistical Science 4 (3) (1989) 282-296.
- [4] T. S. Ferguson, *Optimal Stopping and Applications*, <https://www.math.ucla.edu/~tom/Stopping/Contents.html>
- [5] P. R. Freeman, *The Secretary Problem and its Extensions: A Review*, International Statistics Review 51 (1983) 189-206.
- [6] A. V. Gnedin, *A solution to the game of googol*, The annals of Probability 22 (3) (1994), 1588-1595.

- [7] T. P. Hill, *Knowing When to Stop*, American Scientist, Vol. 97, No. 2, March-April (2009), page 126,
<https://www.americanscientist.org/article/knowning-when-to-stop>
- [8] S-R. Hsiau, J-R Yang, *A natural variation of the standard secretary problem*, Statistica Sinica 10 (2000), 639-646.
- [9] D. K. Smith, *Mathematics, marriage and finding somewhere to eat*, Plus Magazine, September 1, 1997,
<https://plus.maths.org/content/os/issue3/marriage/index>
- [10] R. J. Vanderbei, *The Postdoc Variant of the Secretary Problem*,
<https://vanderbei.princeton.edu/tex/PostdocProblem/PostdocProb.pdf>

¹ Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје,
Природно-математички факултет
Архимедова 3, 1000 Скопје, Р. Македонија
e-mail: irenatra@pmf.ukim.mk, irena.stojkovska@gmail.com

Примен: 12.3.2022

Поправен: 18.7.2022

Одобен: 4.8.2022

Објавен на интернет: 16.8.2022

Печатница: Мар-саж, Скопје

Тираж: 300 примероци

<http://im-pmf.weebly.com/petti-seminar-matematika-i-primeni.html>

<http://im-pmf.weebly.com/matematicki-omnibus-kniga-9.html>

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

51(062)

НАУЧНО-популарни трудови од Петтиот семинар "Математика и примени"
[Електронски извори] / [уредници Весна Целакоска-Јорданова, Ирена
Стојковска]. - Текст во ПДФ формат, содржи 206 стр. ; табели, граф.
прикази. - Скопје : Природно-математички факултет, 2022. - (Едиција
Математички омнибус ; кн. 9)

Начин на пристапување (URL):

<http://im-pmf.weebly.com/matematicki-omnibus-kniga-9.html>; -

Библиографија кон трудовите

ISBN 978-608-4762-31-7

а) Математика -- Примена -- Собири

COBISS.MK-ID 58030597

ISBN 978-608-4762-31-7