МАТЕМАТИЧКИ ОМНИБУС, 1 (2017), 127 – 136

СЛУЧАЈНИТЕ ПРОЦЕСИ ВО НЕЖИВОТНОТО ОСИГУРУВАЊЕ

Анета Гацовска-Барандовска [1]

Во време во кое неизвесноста на финансиските пазари е секогаш пред сигурноста, кога компанискиот профит води пред сигурните инвестиции и кога преземањето на ризикот е тоа што го носи посакуваниот поврат на инвестициите, математиката конечно ја одигрува својата главна улога како применета наука, наспроти вековната споредна улога на теориска наука. Применувајќи математички вештини, знаења и статистички методи, математичарите денес ги моделираат процесите и ги решаваат проблемите кои вклучуваат ризик и несигурност. На полето на осигурувањето, намалувањето на неизвесноста е заслуга на професијата актуар, т.е. на математичарите кои преку своите модели ги предвидуваат финансиските ефекти кои би се јавиле во иднина, а се резултат на случувањата денес. Професијата актуар се развива години station наназад, а софистицираноста на финансиските услуги и инвестициите постојано поставуваат нови барања пред неа. Историски, актуарите имале различни улоги, но нивната главна цел денес е исполнувањето на преземените обврски кон клиентите по даден ризик и избегнување на пропаста на осигурителните компании кога се во прашање големи штети.

Во осигурувањето секојдневно се јавуваат различни елементи на предвидување и тоа: неизвесноста наспроти сигурноста, кога се очекува да се оцени веројатноста да настане одреден осигурен случај и да се процени големината на евентуалната штета која би требало да се покрие; изградувањето на математичките модели наспроти економските појави кои се составен дел на осигурителниот процес; проценувањето на потенцијалниот ризик и финансиската спремност тој да се преземе при поединечни видови на осигурување. Еден од приоритетните елементи е исполнувањето на обврските кон клиентите наспроти очекуваниот профит, правејќи го осигурувањето достапно за клиентот, а притоа оценувајќи како бараниот профит да се вклучи во цената на осигурувањето без да ја загрози очекуваната бројка на осигурителни полиси. Основни елементи на моделите, пак, се математичките гранки: веројатност, статистика и стохастичките процеси, потоа финансиските инструменти кои се главни при инвестирањето и обезбедувањето на профитот, но и добра оцена на сите претходно наведени елементи со цел да не се загрози солвентноста и ликвидноста на компанијата.

Ќе се задржиме само на математичките аспекти на осигурувањето и тоа само на моделите кои се користат во неживотното осигурување. Во основата стои поимот за случајна променлива со која ќе го опишуваме и бројот на настанати штети во одредено портфолио и износите на поединечните настанати штети. Од интерес ни е да го предвидиме вкупниот износ на настанати штети во одредено портфолио, со цел да се определи поединечната премија за секоја од полисите.

1. МОДЕЛИ НА ВКУПНИ ШТЕТИ

Основна задача ни е да ја процениме вкупната штета која настанува во некој временски интервал (најчесто краток период на кој има важност полисата), се разбира при одредени услови кои треба да ги задоволуваат поединечните штети. Постојат два основни модели за пресметување на вкупните штети:

а) *Модел на индивидуален ризик*

Нека портфолиото на осигурителот има точно n корисници со поединечни штети $Y_1, Y_2, ... Y_n$. Вообичаено се претпоставува дека штетите Y_i се независни идентично распределени случајни променливи (анг. independent identically distributed random variables и во понатамошниот текст iid случајни променливи). Тогаш, вкупната штета се изразува преку сумата $S = \sum_{i=1}^{n} Y_i$, со математичко очекување $ES = nEY_i$ и дисперзија $DS = nDY_i$.

Моделот претпоставува дека е позната распределбата на поединечните штети.

б) *Модел на колективен ризик*

Со N го означуваме случајниот број на осигуреници кои пријавуваат штети (и самиот број на осигуреници е случајна променлива), а со $Y_1, Y_2, ... Y_N$ износите на штетите на истите тие осигуреници, па вкупната штета се опишува со $S = \sum_{i=1}^{N} Y_i$, при што за број на штети

$N=0$ по дефиниција сметаме дека вкупниот износ на штети е $S=0$. Вообичаено се претпоставува дека бројот на штети и износите на штети $N, Y_1, \ldots Y_N$ се меѓусебно независни променливи, додека $Y_1, Y_2, \ldots Y_N$ се уште и идентично распределени случајни променливи. Нека функцијата на распределба на променливите Y_i е $F(x)=P(Y_i \le x)$. Ќе ја разгледаме функцијата на распределба на S, $G(x)=P(S\le x)$ која зависи и од бројот на штети N. Тогаш,

$$P(S \le x)=\sum_{n=0}^{\infty} P(S\le x, N=n)=\sum_{n=0}^{\infty} P(S\le x \mid N=n)\cdot P(N=n)$$

односно

$$G(x)=\sum_{n=0}^{\infty} P(Y_1+\ldots+Y_n \le x)\cdot P(N=n)=\sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(x)\cdot P(N=n),$$

каде што $F^{n*}(x)$ е $n-$тата конволуција на $F(x)$ (прецизна дефиниција може да се види во [3] и во [5]).

Главната цел при поставувањето на моделите на колективен ризик не е точно да се определи распределбата на случајната променлива S, туку да се проценат математичкото очекување и дисперзијата како мерки за нето премијата и евентуалното отстапување. Така,

$$E(S \mid N=n)=E\Big(\sum_{i=1}^{N} Y_i \,\Big|\, N=n\Big)=E\Big(\sum_{i=1}^{n} Y_i\Big)=n\cdot EY_i .$$

Тогаш, $E(S \mid N)=N\cdot EY_i$. Според тоа,

$$ES=E(E(S\mid N))=E(N\cdot EY_i)=EN\cdot EY_i .$$

Од друга страна, за дисперзијата важи равенството

$$DS = E(D(S\mid N))+D(E(S\mid N)),$$

при што $D(E(S\mid N))=D(N\cdot EY_i)=DN\cdot (EY_i)^2$.

Сега имаме дека $D(S\mid N=n)=D\Big(\sum_{i=1}^{N} Y_i \,\Big|\, N=n\Big)=D\Big(\sum_{i=1}^{n} Y_i\Big)\overset{iid}{=}n\cdot DY_i$, од каде што следува дека $D(S\mid N)=N\cdot DY_i$.

Тогаш $E(D(S\mid N))=E(N\cdot DY_i)=EN\cdot DY_i$. Со замена во збирот, за дисперзијата добиваме $DS = EN\cdot DY_i + DN\cdot (EY_i)^2$.

2. СЛУЧАЈНИ ПРОЦЕСИ

За да се земе во предвид дека и бројот на потенцијални штети (настанати осигурени случаи) и нивните износи се случајни променливи, најлесно е да се воведе поимот за случаен процес и преку него, во одреден временски момент, да се изврши проценка на вкупниот износ на штети.

Дефиниција 1. Нека $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ е простор на веројатност и T е непразно множество. Ако за секое $t \in T$, X_t е случајна променлива на $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, тогаш фамилијата $\{X_t \mid t \in T\}$ се нарекува *случаен процес*.

За нас од интерес е посебна класа случајни процеси, а тоа се процесите со независни и стационарни прираснувања (повеќе за нивните својства може да се види во [3] и во [5]).

За да го одредиме процесот на вкупен износ на штети, потребни ни се процесот на број на штети и процесот на поединечни износи на штети.

2.1. ПРОЦЕСИ НА ПРЕБРОЈУВАЊЕ

Дефиниција 2. Случаен процес $\{N(t) \mid t \geq 0\}$ се нарекува *процес на пребројување* (counting process), ако $N(t)$ го претставува вкупниот број на еднородни настани кои се појавиле до моментот на време *t*, т.е. на интервалот $(0, t]$.

Процесот на пребројување ги задоволува следниве својства:

(i) $N(t) \geq 0$;

(ii) $N(t)$ прима целобројни вредности;

(iii) Ако $s < t$ тогаш $N(s) \leq N(t)$;

(iv) За $s < t$, $N(t) - N(s)$ е бројот на настани кои се појавиле на временскиот интервал $(s, t]$.

Самото име на процесот дефиниран погоре укажува на фактот дека точно таков вид процес е добро да се искористи за да се моделира бројот на штети. Низ праксата се покажало дека процесот на број на штети во неживотното осигурување најчесто е Пуасонов процес, односно процес дефиниран на следниот начин.

Дефиниција 3. Случаен процес $\{N(t) \mid t \geq 0\}$ со вредности во множество $S = \{0,1,2,....\}$ е *Поасонов процес со интензитет* $\lambda > 0$ ако важи:

(1) $N(0) = 0$ и ако $s < t$ тогаш $N(s) \leq N(t)$;

(2) $P(N(t+h) = n+m \mid N(t) = n) = \begin{cases} \lambda h + o(h), & m = 1 \\ o(h), & m > 1 \\ 1 - \lambda h + o(h), & m = 0 \end{cases}$;

(3) За $s < t$, бројот $N(t) - N(s)$, кој означува број на настани кои се појавиле на временскиот интервал $(s,t]$, е независен од бројот на настани на интервалот $[0,s]$.

Уште поважно е што за ваквиот процес е позната и распределбата, а таа е определена со следната теорема.

Теорема 1. *Поасонов процес* $\{N(t) \mid t \geq 0\}$ *со интензитет* λ, *има Поасонова распределба со параметар* λt *односно*

$$P(N(t) = j) = \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t}, \quad j = 0,1,2,\dots .$$

(Доказот на теоремата може да се види во [4].)

3. ОСНОВЕН МОДЕЛ НА КОЛЕКТИВЕН РИЗИК

Основите на модерната теорија на ризик ги поставил шведскиот актуар Филип Лундберг (Filip Lundberg, 1876 – 1965) уште во 1903 година, како синоним на математиката на неживотно осигурување, почнувајќи со изучување на модел за процесот на број на настанати штети *N*. Во 1930 година, Харалд Крамер (Harald Cramèr, 1893 – 1985), шведски статистичар и пробабилист работел на развој на колективен ризик, користејќи процес на вкупен износ на штети *S*, со времиња на настанок на штетите определени со низа (T_i), а генерирани со Поасонов процес.

Основната идеја на Lundberg која постојано се развива се однесува на воведување наједноставен модел во кој важат три основни претпоставки:

(П1) Штетите настануваат во временски моменти T_i, $0 \le T_1 \le T_2 \le \ldots$ кои се нарекуваат *времиња на настанок на штети* (анг. arrival times, claim times, claim arrivals).

(П2) i-тата штета се појавува во време T_i и е штета со износ X_i. (X_i) е низа од iid ненегативни случајни променливи. Независноста директно влијае на хомогената структура на портфолиото, а и многу го олеснува моделот.

(П3) Процесот на штети (X_i) и процесот на времиња на настанок на штети (T_i) се меѓусебно независни.

При вакви услови се дефинира процес на број на штети $N(t) = card\left\{i \ge 1 \,\middle|\, T_i \le t\right\}, t \ge 0,$ кој всушност претставува бројач на штети настанати на временскиот интервал $\left[0, t\right]$. Преку овој процес се дефинира и процес на вкупен износ на штети

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i = \sum_{i=1}^{\infty} X_i I_{[0,t]}(T_i),\ t \ge 0$$

кој претставува сложен процес. За овој и за други модели на вкупниот модел на штети може да се погледаат [2] и [4].

Како што веќе напоменавме, наједноставниот и најчесто користен модел за бројот на штети е, се разбира, Поасоновиот процес. Неговото својство на независни прираснувања овозможува лесно да се користат конечнодимензионалните распределби на процесот. Ако го специфицираме процесот на број на штети како хомоген Поасонов процес, моделот кој ги поврзува износите на штетите и времето на појавување на истите се нарекува *Cramèr-Lundberg-ов модел* (понатаму само *C-L модел*). Притоа се исполнети сите три услови од основниот модел. Процесот на вкупни штети во C-L моделот е сложен Поасонов процес.

Дефиниција 4. Случаен процес $\{X(t) \,|\, t \ge 0\}$ е *сложен Поасонов процес*, ако може да се претстави во облик $X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$, каде што

$\{N(t) \mid t \geq 0\}$ е Поасонов процес, а $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ е низа од iid случајни променливи, независни од $\{N(t) \mid t \geq 0\}$.

Сега вкупниот износ на штети го добиваме преку процесот $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i,\ t \geq 0$, каде износите на поединечните штети X_i се iid случајни променливи, независни од процесот на број на штети N. Се разбира се претпоставува дека $X_i > 0$ скоро сигурно. За различен избор на N, се добиваат различни процеси за $S = \{S(t) \mid t \geq 0\}$. За N хомоген Поасонов процес, се добива C-L моделот. Со оглед на тоа што е скоро невозможно да се добие распределбата на вкупниот износ на штети, од интерес е да се добие асимптотиката на процесот, од аспект на пресметување на премии, моделирање големи штети, реосигурување и слично.

Сложениот Поасонов процес има убави својства кои овозможуваат да се разгледува едно портфолио низ повеќе години или пак повеќе портфолија во текот на една година. И во двата случаи C-L моделот има можности да се предвидат (пресметаат) соодветните очекувани премии, математичките резерви за непријавените штети, да се предвиди можниот профит и да се процени ризикот ([2]).

За да се добие груба слика за процесот, потребно е барем да се пресметаат $ES(t), DS(t)$. Основен пример за илустрација е утврдувањето на премијата на соодветното осигурување. Повеќе за примената на основниот модел може да се прочита во [1].

4. ПРИНЦИПИ НА УТВРДУВАЊЕ НА ПРЕМИЈА

Утврдувањето на соодветна премија е основен интерес на осигурувањето. Имено, насобраната премијата ги претставува расположливите средства за покривање на побарувањата за исплата на штети. Урамнотежувањето на прибраните премии и исплатените штети лежи во основа на осигурувањето. Се разбира, овде не зборуваме за интересот за профит, начинот на остварување на профит, туку само за фер соодност меѓу осигуреникот и осигурителот, односно за исполнување на преземените обврски од страна на осигурителот.

Ќе ја користиме ознаката $p(t)$ како премија по полиси во портфолиото, односно премија за покривање на вкупните штети опишани со процесот $S(t)$. Првичната апроксимација на премијата е направена со $ES(t)$, но отстапувањата од очекувањето се реалност, па за очекување е износот на премијата да ја надминува очекуваната вредност $ES(t)$, па вообичаено се користи додаток за сигурност $\rho > 0$. Тогаш, за премијата добиваме $p(t) = (1+\rho)ES(t)$.

Успехот во процесот на урамнотежување на премиите и обврските се заснова на јакиот закон на големи броеви, односно потребни се голем број полиси за постигнување на што подобра рамнотежа. Во пракса се користат повеќе принципи за пресметување на премија:

(1) *Принцип на нето премија* или уште познат како *принцип на еквивалентност* според кој вредноста на очекуваните уплати е еднаква со вредноста на очекуваните исплати $p_{Net}(t) = ES(t)$.

Но, отстапувањата на $S(t)$ од $ES(t)$, од редот на стандардната девијација, не се за занемарување, па овој принцип теориски вреди да се споредува, но од практичен аспект се избегнува ([1]). Имено, неговата примена некогаш може да доведе и до пропаст (ова е прашање на теоријата на пропаст). За разлика од неживотното, во животното осигурување овој принцип има поголема важност.

(2) *Принцип на очекувана вредност* кој вклучува додаток за сигурност $p_{EV}(t) = (1+\rho)ES(t)$.

(3) *Принцип на дисперзија*

$$p_{VAR}(t) = ES(t) + \alpha DS(t), \alpha > 0.$$

(4) *Принцип на стандардна девијација*

$$p_{SD}(t) = ES(t) + \alpha\sqrt{DS(t)}, \alpha > 0.$$

Оправдување за употребата на овој принцип се наоѓа во примена на Централната гранична теорема. Имено,

$$\begin{aligned} P(S(t) - p_{SD}(t) \le x) &= P\left(\frac{S(t)-ES(t)}{\sqrt{DS(t)}} - \alpha \le \frac{x}{\sqrt{DS(t)}}\right) \\ &= P\left(\frac{S(t)-ES(t)}{\sqrt{DS(t)}} \le \alpha + \frac{x}{\sqrt{DS(t)}}\right) \end{aligned}$$

односно,

$$P(S(t) - p_{SD}(t) \leq x) \to \Phi(\alpha), \qquad t \to \infty,$$

каде што $\Phi(x)$ е функцијата на распределба на стандардно нормално распределена случајна променлива.

(5) *Модифициран принцип на дисперзија*

$$p_{MVAR}(t) = \begin{cases} ES(t) + \alpha \dfrac{DS(t)}{ES(t)}, & ES(t) > 0 \\ 0, & ES(t) = 0 \end{cases}, \qquad \text{за } \alpha > 0.$$

(6) *Експоненцијален принцип* $p_{EXP}(t) = a^{-1} \ln E^{aX}$, за $\alpha > 0$.

Дефинирани се и други принципи за пресметување на премија, како на пример принцип на нулта корисност, принцип на квантили, принцип на прилагоден ризик, принцип на апсолутна девијација, но најчесто од интерес се првите четири принципи. Некои соодноси меѓу нив се илустрирани во текстот подолу.

Нека процесот на вкупен износ на штети е зададен со C-L моделот во кој $DX_1 < \infty$. Тогаш, заради асимптотското однесување на очекуваната вредност на вкупниот износ на штети (повеќе може да се види во [5]),

$$\frac{p_{Net}(t)}{P_{SD}(t)} = \frac{ES(t)}{ES(t) + \alpha\sqrt{DS(t)}} = \frac{\dfrac{ES(t)}{t}}{\dfrac{ES(t)}{t} + \alpha\sqrt{\dfrac{DS(t)}{t^2}}} \xrightarrow{t\to\infty} 1.$$

Значи за големи временски интервали t, во C-L моделот, принципите на нето премија и на стандардна девијација се совпаѓаат, а со нив се наплаќа помала премија отколку согласно принципите на очекувана вредност и дисперзија.

Во секој случај, пресметувањето на математичкото очекување и дисперзијата се неопходни за утврдување на премијата.

ЛИТЕРАТУРА

[1] C.D. Daykin, T. Pentikaien, M. Pesonen, *Practical Risk Theory for Actuaries*, Chapman and Hall, 1994.

[2] P. Embrechts, C. Kluppelberg, T. Mikosch, *Modelling Extermal Events for Insurance and Finance*, Springer,1997.

[3] G. R. Grimmett, D. R Stirzaker, *Probabilily and Random Processes*, Oxford University Press, 2001.

[4] T. Mikosch, *Non-life Insurance Mathematics*, Springer, 2004.

[5] П. Младеновић, *Вероватноћа и статистика*, Математички факултет, Београд, 2005.

[1] Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје
Природно-математички факултет,
Институт за математика
ул. Архимедова 3, 1000 Скопје, Р. Македонија
e-mail: aneta@pmf.ukim.mk

Примен: 22.07.2017
Поправен: 22.08.2017
Одобрен: 25.08.2017