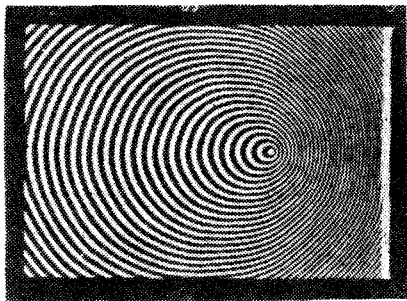


МУАРЕ ФИГУРИ НА ЕКВИЕКСЦЕНТРИЧНИ КРИВИ ОД ВТОР РЕД СО ЕДЕН ЗАЕДНИЧКИ ФОКУС

Ј. Мозер, С. Бахчеванџиев, Љ. Јаниќијевиќ, М. Јоноска

Во овој труд ќе бидат испитани муаре фигурите што се појавуваат кога два системи од еквиексцентрични криви од втор ред со еден заеднички фокус ќе се прекријат така што нивните заеднички фокуси ќе се совпаднат.

Еден таков систем од криви (елипси) прикажан е на сликата 1. Меѓупросторот помеѓу две елипси наизменично е поцрнет така што



Сл. 1.

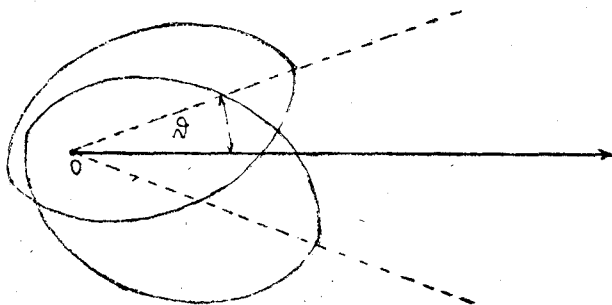
тој е непропустен за светлината, со што се постига подобра видливост на муаре фигурите кога два вакви системи ќе се прекријат.

Математички проблемот го поставуваме во поларен координатен систем со пол во заедничкиот фокус на двата системи, а поларната оска ја избираме така што таа го поделви аголот меѓу оските на двата избрани системи од криви. На слика 2 се нацртани како пример две елипси кои поодделно припаѓаат на по еден од системите што се прекриваат.

Сите криви од едниот систем имаат ист ексцентрицитет e а се разликуваат само по својот параметар. Ако параметарот на најмалата крива од системот е p , параметарот на било која крива од тој

систем е целоброен множител на p . Така за h -тата крива од првиот систем ја имаме равенката во поларни координати

$$r = \frac{hp}{1 - \varepsilon_1 \cos(\varphi + \theta)} \quad h = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$



Сл. 2

Вториот систем од криви има параметар на најмалата крива p' кој е избран така што $\frac{p'}{p} = c$. Тогаш вториот систем од криви ќе биде даден со равенката

$$r = \frac{cpk}{1 - \varepsilon_2 \cos(\varphi - \theta)} \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

Според индексната теорија на муаре фигурите [1], [2] и [3] муаре фигурите на овие два системи се определени со формулата:

$$h \pm k = n \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

Кога од равенките (1), (2) и (3) ќе се елиминираат редните броеви h и k , ќе ја добиеме равенката на муаре фигурите

$$r = \frac{\frac{cpn}{c \pm 1}}{1 - \frac{c\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2}{c \pm 1} \cos \theta \cos \varphi + \frac{c\varepsilon_1 \mp \varepsilon_2}{c \pm 1} \sin \theta \sin \varphi} \quad (4)$$

Во равенката горниот знак одговара на адитивните а долниот на суптрактивните муаре линии. Оваа равенка може да се сведе на

$$r = \frac{np}{1 - \varepsilon \cos(\varphi - \alpha)} \quad (5)$$

каде

$$p = \frac{c p}{c \pm 1} \quad (6)$$

Со развивање на именителот од равенката (5) се добива

$$r = \frac{np}{1 - \varepsilon \cos \varphi \cos \alpha - \varepsilon \sin \varphi \sin \alpha}$$

при што се гледа дека

$$\varepsilon \cos \alpha = \frac{c \varepsilon_1 \pm \varepsilon_2}{c \pm 1} \cos \theta$$

$$\varepsilon \sin \alpha = - \frac{c \varepsilon_1 \mp \varepsilon_2}{c \pm 1} \sin \theta$$

а од тука следува дека е

$$\varepsilon^2 = \frac{c^2 \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 2c \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cos 2\theta}{(c \pm 1)^2} \quad (7)$$

и уште

$$\operatorname{tg} \alpha = - \frac{c \varepsilon_1 \mp \varepsilon_2}{c \varepsilon_1 \pm \varepsilon_2} \operatorname{tg} \theta \quad (8)$$

Очигледно е дека решението (5) пак претставува еден систем од еквицентрични линии од втор ред, чија оска зафаќа агол α со поларната оска. Овој агол е определен со релацијата (8) а параметарот и ексцентрицитетот на муаре системот се дадени со (6) и (7).

Кои криви од втор ред се добиваат во конкретен случај зависи од вредноста на ексцентрицитетот ε . Кога $\varepsilon < 1$ се добиваат елипси, за $\varepsilon > 1$ хиперболи, а за $\varepsilon = 1$ еквицентричните муаре фигури претставуваат систем на параболи. Во посебен случај кога $\varepsilon = 0$ муаре фигурите се кругови. Овој случај се добива кога

$$c^2 \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 \pm 2c \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cos 2\theta = 0$$

односно

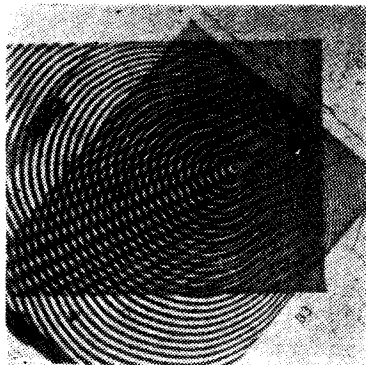
$$c^2 \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right)^2 \pm 2c \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right) \cos 2\theta + 1 = 0$$

од каде се добива

$$c \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \mp \cos 2\theta \pm \sqrt{\cos^2 2\theta - 1} \quad (9)$$

Бидејќи поткорената величина е негативна, останува само посебниот случај кога $\cos 2\theta = 1$ одн. $\theta = k\pi$, $k = 0, 1, 2, \dots$ $\varepsilon_2 = c\varepsilon_1$ заедно со $p' = cp$.

Добиените криви од втор ред (4) одн. (5) дегенерираат во систем од паралелни прави кога е $p = \infty$ и $\varepsilon = \infty$. Формулите (6) и (7) покажуваат дека таков случај се постига кај суптрактивните муаре фигури кога е $c = 1$ односно кога се прекриваат два еднакви системи



Сл. 3

од криви од втор ред. Ваков случај на суперпозиција е илустриран на сликата 3. На фотографијата се добро видливи муаре системот од прави на десната страна, додека до искривување на истите на левата страна од сликата доаѓа поради недоволната прецизност на цртежот од кои се направени мрежичките.

Натамошната дискусија ќе ја спроведеме за специјални вредности на аголот 2θ зафатен меѓу оските од двата системи од криви.

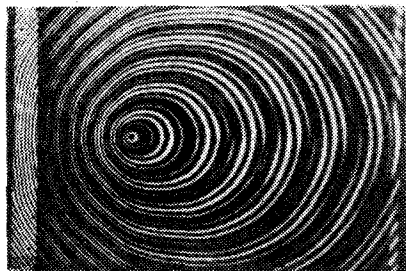
Кај системите со заедничка оска $\theta = 0$, па равенката на муаре фигурите се специјализира на

$$r = \frac{\frac{c p n}{c \pm 1}}{1 - \frac{c \varepsilon_1 \pm \varepsilon_2}{c \pm 1} \cos \varphi} \quad (10)$$

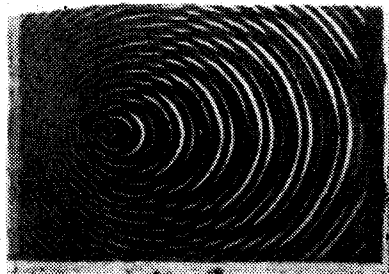
Очигледно е дека оската на муаре фигурите са поклопува со заедничката оска од системите кои се преклопуваат ($\alpha = 0$) што следува од равенката (8) а нивниот ексцентрицитет е

$$\varepsilon = \frac{c \varepsilon_1 \pm \varepsilon_2}{c \pm 1} \quad (11)$$

Еден таков случај на суперпозиција може да се види на сликата 4. Суперпонирани се два системи од елиптични криви со ексцентритетети $\epsilon_1 = 0,5$ и $\epsilon_2 = 0,33$ а параметри $p_1 = 0,275$ mm и $p_2 = 0,473$ mm што значи дека $c = 1,72$. Како што се гледа муаре фигурата претставува систем од елипси. Од равенката (11) се гледа дека во конкретниов случај и суптрактивните и адитивните муаре фигури имаат $\epsilon < 1$, а за тоа кои од нив се гледаат на сл. 4 ќе стане збор подоцна



Сл. 4



Сл. 5

Кај системи со еднакви параметри за $c = 1$ при суперпозиција со $\theta = 0$ за суптрактивните муаре фигури излегува $r \cos \varphi = \frac{pn}{\epsilon_2 - \epsilon_1}$ што претставува систем на паралелни прави.

Посебно интересен е случајот на суперпозиција на два еднакви системи на елипси со различни параметри при $\theta = 0$. Како муаре фигура се добива карактеристичниот „муаре ефект на зголемена слика“ значи системот на еквицентрични елипси во зголемен параметар. На сликата 5 се гледа дека добиената муаре фигура од системи со ексцентритетети $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0,5$ и параметри $p_1 = 0,207$ и $p_2 = 0,255$. Параметарот на муаре фигурата според равенката (6) треба да биде околу 5 пати поголем од параметарот p_1 , што може се види на сликата.

Втор специјален случај на суперпозиција настанува кога аголот меѓу оските на системите што се преклопуваат изнесува $2\theta = \pi$, одн $\theta = \frac{\pi}{2}$. И во овој случај двата системи од криви имаат заедничка оска меѓутоа полот за едниот систем претставува лев а за другиот десен фокус. Муаре фигурата е дадена со равенката

$$r = \frac{\frac{c p n}{c \pm 1}}{1 + \frac{c \epsilon_1 \mp \epsilon_2}{c \pm 1} \sin \varphi} = \frac{\frac{c p n}{c \pm 1}}{1 - \frac{c \epsilon_1 \mp \epsilon_2}{c \pm 1} \cos \left(\varphi \pm \frac{\pi}{2} \right)} \quad (12)$$

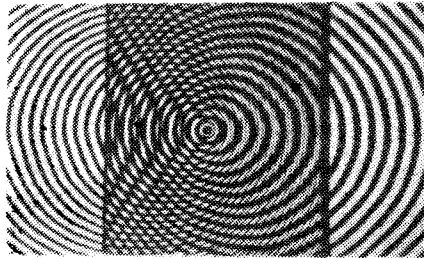
Оската на муаре фигурите исто така гради агли од $\pm \frac{\pi}{2}$ со поларната оска, имено од релацијата (8) имаме дека

$$\operatorname{tg} \alpha = \begin{cases} -\infty & \varepsilon_2 < c \varepsilon_1 \\ \infty & \varepsilon_2 > c \varepsilon_1 \end{cases} \quad \text{односно} \quad \alpha = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \varepsilon_2 < c \varepsilon_1 \\ \frac{\pi}{2} & \varepsilon_2 > c \varepsilon_1 \end{cases}$$

Ексцентритетот на вака добиените криви ќе биде даден со

$$\varepsilon = \frac{c \varepsilon_1 \mp \varepsilon_2}{c \pm 1} \quad (13)$$

Овој случај на преклопување е илустриран на сликата 6. Како муаре фигура е добиен систем од хиперболи. Суперпонирани се мре-



Сл. 6.

жички со $\varepsilon_1 = 0,5$ и $\varepsilon_2 = 0,33$ и $p_1 = 0,275$ мм и $p_2 = 0,473$ мм. Што значи $c = 1,71$. Замената на величините во равенката (13) покажува дека добиената фигура одговара на долните знаци зашто тогаш $\varepsilon > 1$.

Трет специјален случај имаме тогаш кога оските на системите што се суперпонираат стојат ортогонално. Тогаш $\theta = \frac{\pi}{2}$ а за равенката на муаре фигурата наоѓаме

$$r = \frac{\frac{c p_1}{c \pm 1}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{c \varepsilon_1 \pm \varepsilon_2}{c \pm 1} \cos \varphi - \frac{c \varepsilon_1 \mp \varepsilon_2}{c \pm 1} \sin \varphi \right)} \quad (14)$$

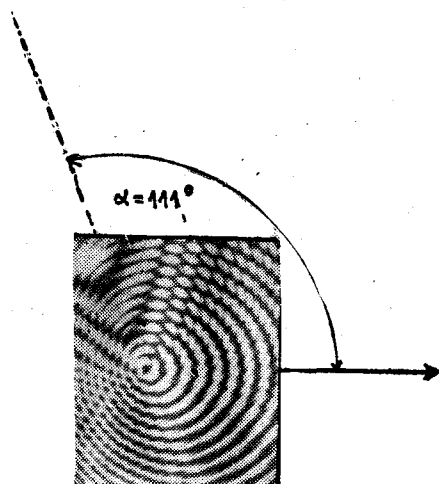
Наклонот на оската на муаре системот ќе биде даден со

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{c \varepsilon_1 \pm \varepsilon_2}{c \varepsilon_1 \pm \varepsilon_2} \quad (15)$$

додека ексцентрицитетот со

$$\varepsilon^2 = \frac{c^2 \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}{(c \pm 1)^2} \quad (16)$$

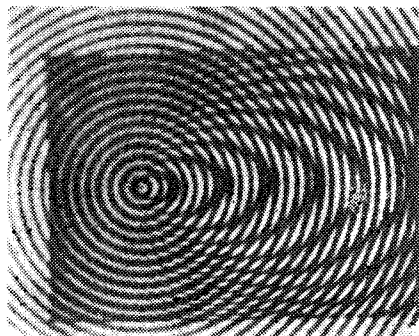
Ваков случај на суперпозиција прикажан е на сликата 7. Суперпонираните се мрежички со ексцентрицитети $\varepsilon_1 = 0,5$ и $\varepsilon_2 = 0,33$ и параметри



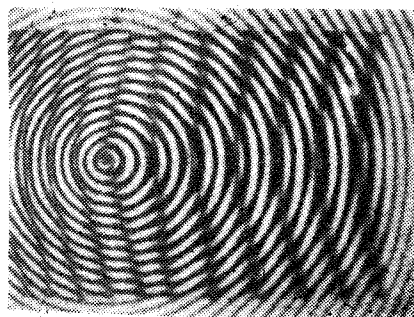
Сл. 7.

$p_1 = 0,27$ мм и $p_2 = 473$ мм ден $c = 1,72$. Замената на овие величини во релацијата (15) со знаците што одговараат на суптрактивните фигури дава за наклонот на оската на муаре системот агол близок до 111° . Муаре фигурата инаку претставува систем од хиперболи. Од сликата се гледа дека постои добра согласност за вредноста на аголот на наклонот на оската на муаре системот.

Како што споменавме понапред системот од кругови може да биде интерпретиран како систем од еквицентрични криви од втор ред со $\varepsilon = 0$. На фотографиите од сликите 8 и 9 се прикажани муаре



Сл. 8



Сл. 9

фигури добиени со прекривање на системи од концентрични кругови и еквицентрични елипси. Кој вид на муаре фигури ќе се добијат зависи од вредноста на ексцентрицитетот на елипсата која ја суперпонираме со системот од кругови. На сликата 8 суперпонирањето е вршено со систем од елипси кои имаат ексцентричност $\varepsilon_1 = 0,5$ и параметар $p_1 = 0,207$ мм додека радиусот (параметарот) на основниот круг е $p_2 = 0,620$ мм. На еликата 9 суперпониран е истиот систем од кругови со систем на елипси со ексцентрицитет $\varepsilon_1 = 0,33$ и вредност на параметарот $p_1 = 0,507$ мм.

Останува уште да се разгледа проблемот за ефективноста на добиените муаре фигури при конфокалното прекривање на двата системи од еквицентрични криви од втор ред.

Според [4] треба да биде испитан знакот на изразот

$$G = \text{grad } \psi_h \cdot \text{grad } \psi_k \quad (17)$$

каде ψ_k и ψ_h се аналитичките равенки на системите што се суперпонираат

$$\psi_h \equiv \frac{r}{p} [1 - \varepsilon_1 \cos(\varphi + \theta)] - h = 0 \quad (18)$$

$$\psi_k \equiv \frac{r}{cp} [1 - \varepsilon_2 \cos(\varphi - \theta)] - k = 0$$

Во подрачјето каде $G > 0$ се гледаат суптрактивните муаре фигури, за $G < 0$ адитивните, а $G = 0$ го дава аналитичкиот израз за комутативната муаре граница.

Во поларни координати изразот (17) преминува во

$$G = \frac{\partial \psi_k}{\partial r} \frac{\partial \psi_k}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_h}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \psi_k}{\partial \varphi} \quad (19)$$

што со замена на (18) во оваа равенка ќе даде

$$G(r, \varphi) = \frac{1}{cp^2} [1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cos 2\theta - \varepsilon_1 \cos(\varphi + \theta) - \varepsilon_2 \cos(\varphi - \theta)] \quad (20)$$

Според тоа комутативната муаре граница е дадена со равенката

$$\varepsilon_1 \cos(\varphi + \theta) + \varepsilon_2 \cos(\varphi - \theta) = 1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cos 2\theta \quad (21)$$

Решението на оваа равенка претставува радијална права

$$\varphi = \varphi_0$$

Според тоа во подрачјето каде $\varphi < \varphi_0$ ефективни ќе бидат суптрактивните муаре фигури, а за $\varphi > \varphi_0$ видливи ќе бидат адитивните муаре фигури.

Може да се најде уште и општа формула за определување на вредноста на граничниот агол φ_0 . Ако ја развиеме левата страна на формулата (21), ќе имаме

$$(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \cos \theta \cos \varphi - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \sin \theta \sin \varphi = 1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cos 2\theta$$

Со супституцијата

$$(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \cos \theta = \alpha \cos \beta \quad (22)$$

$$(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \sin \theta = \alpha \sin \beta$$

овој израз преминува во

$$\alpha \cos(\beta + \varphi) = 1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cos 2\theta \quad (23)$$

чиј решенија се

$$\varphi_1 = \arccos \frac{1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cos 2\theta}{\alpha} - \beta \quad (24)$$

и

$$\varphi_2 = 2\pi - \arccos \frac{1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cos 2\theta}{\alpha} + \beta$$

Ни останува уште да ги определиме величините α и β . Од (22) следува дека

$$\alpha = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cos 2\theta} \quad (25)$$

и

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \operatorname{tg} \theta \quad (26)$$

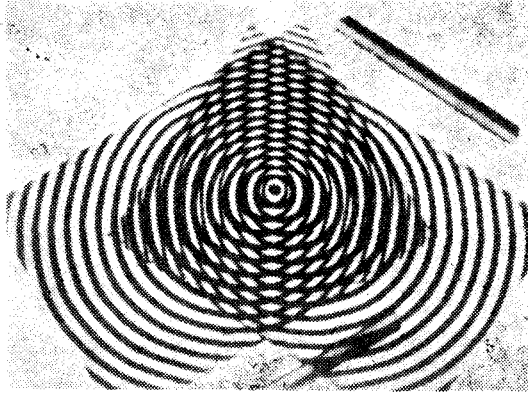
Во агловниот интервал

$$2\pi + \operatorname{arccg} \left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \operatorname{tg} \alpha \right) - \arccos \frac{1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cos 2\theta}{\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cos 2\theta}} < \quad (27)$$

$$< \varphi < \arccos \frac{1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cos 2\theta}{\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cos 2\theta}} - \operatorname{arctg} \left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \operatorname{tg} \theta \right)$$

$G(r, \varphi) < 0$ па според тоа видливи се адитивните муаре фигури, а надвор од овој интервал $G(r, \varphi) > 0$ па таму се видливи суптрактивните муаре фигури.

Од изразот (27) може да се заклучи дека постоењето на кому- тивната муаре граница не е задолжително. Имено во сето подрачје на преклопување може да се видливи само суптрактивните или само адитивните муаре фигури. Тоа зависи од вредноста на ϵ_1 , ϵ_2 и θ . На фотографијата на слика 10 дадена е муаре фигурата на два еднакви системи од елипси со ексцентрицитети $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0,33$ суперпонирани под агол меѓу оските $2\theta = 120^\circ$. Замената на овие величини во изра-



Сл. 10

зот (20) покажува дека вредноста на средната заграда изнесува $1 - 1/18 + \sqrt{3}/3 \cos \varphi$, што е за секое φ позитивно, па според тоа во секогашно поле правите што се набљудуваат се систем од суптрактивни муаре фигури.

Во случај на нашите три карактеристични вредности на аголот θ , имаме:

За $\theta = 0$ од релацијата (26) следува дека е $\beta = 0$ и $\beta = \pi$ а од (25) дека $\alpha = (\epsilon_1 + \epsilon_2)$. На тоа одговараат по два агловни интервали во кои се сместени адитивните и суптрактивните муаре фигури. Границите на тие интервали се

$$\varphi_1 = \arccos \frac{1 + \epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}$$

$$\varphi_1 = \arccos \frac{1 + \epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} - \pi$$

и

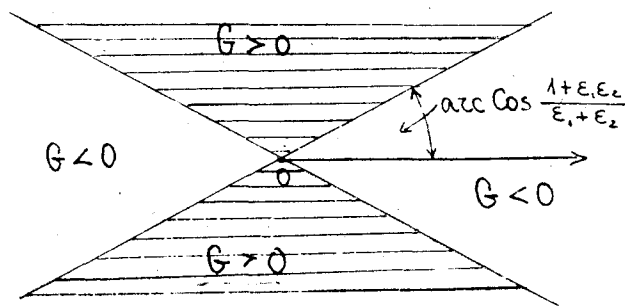
(28)

$$\varphi_1 = 2\pi - \arccos \frac{1 + \epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}$$

$$\varphi_2 = 3\pi - \arccos \frac{1 + \epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}$$

На сликата 11 даден е шематски приказ на видливоста на муаре фигурите во овој случај.

Суперпозицијата при агол $\theta = 0$ е дадена на нашата слика 4. Муаре фигурата што таму се гледа е суптрактивна бидејќи кога во



Сл. 11

изразот (20) ќе се заменат вредностите на ексцентрицитетите, изразот во средната заграда изнесува $7/6 - 5/6 \cos \varphi$ што е за секое φ поголемо од нула.

За $\theta = \pi/2$ од изразите (26) и (27) имаме

$$\beta = \frac{\pi}{2} \quad \text{за} \quad \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} > 0 \quad \text{и} \quad \beta = \frac{3\pi}{2} \quad \text{за} \quad \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} < 0$$

$$\text{додека} \quad a = \epsilon_1 - \epsilon_2$$

Во првиот случај адитивните муаре фигури ќе бидат видливи во аголниот интервал

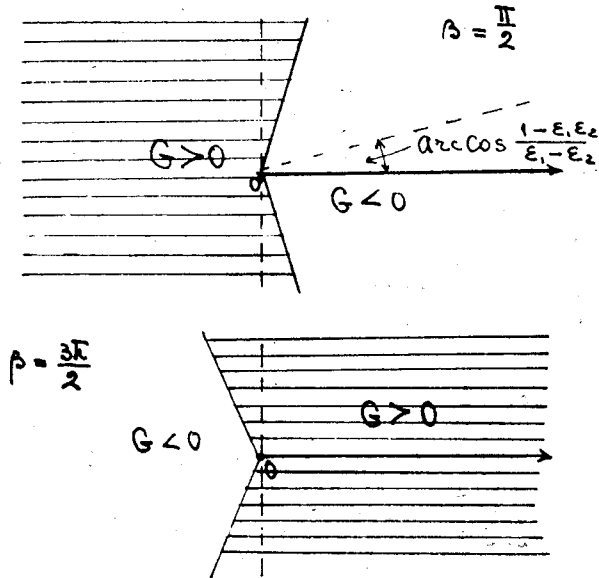
$$\frac{5\pi}{2} - \arccos \frac{1 - \epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 - \epsilon_2} < \varphi < \arccos \frac{1 - \epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 - \epsilon_2} - \frac{\pi}{2} \quad (29)$$

а останатиот дел од видното поле е исполнет со суптрактивните муаре фигури.

За вториот пак случај кога е $\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} < 0$ во интервалот

$$\frac{7\pi}{2} - \arccos \frac{1 - \epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 - \epsilon_2} < \varphi < \arccos \frac{1 - \epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 - \epsilon_2} - \frac{3\pi}{2} \quad (30)$$

се сместени адитивните муаре фигури, а надвор од него ги имаме суптрактивните. На сликата 12 шематски се скицирани овие полиња на видливост. Оваков случај на суперпозиција беше илустриран на сликата 7. Замената на вредностите за ексцентрицитетите во равенката



Сл. 12

(30) покажува дека во конкретниот случај во сето поле се видливи само суптрактивните муаре фигури.

За $\theta = \pi/4$ имаме

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \quad a = \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2}$$

па следува дека адитивните муаре фигури, во колку се јават, ќе бидат сместени во агловниот интервал

$$2\pi + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} - \operatorname{arc} \cos \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2}} < \varphi < \operatorname{arc} \cos \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2}} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \quad (31)$$

а надвор од него би се наоѓале суптрактивните муаре фигури. Случајот илустриран на сликата 6 има вредност на средната заграда од изразот (20) $1 - 5\sqrt{2}/12 \cos \varphi + \sqrt{2}/12 \sin \varphi$ што е позитивно за било

која вредност на φ , па затоа и во овој случај видливи се само суптрактивните муаре фигури

Случаите на суперпозиција на системи од кругови и елипси кои се илустрирани на сликите 8 и 9 за G од равенката (20) имаат вредност која е секојпат позитивна. Според тоа без оглед на вредноста на ексцентрицитетот на елиптичниот систем муаре фигурите кои се набљудуваат во видното поле се суптрактивни.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. G. Oster, M. Wasserman and C. Zwerling, J. Opt. Soc. Am. 54, 169/1964
2. Мозер, Сл. Бахчеванџиев, М. Јоноска, Љ. Јаниќиевиќ, Годишен зборник на ПМФ Скопје А, 17)18 (57) (1966-1967).
3. Theocaris P. „Moirè Fringes in Strain Analysis“ (Pergamon Press, London 1969)
4. J. Мозер и Љ. Јаниќиевиќ Годишен зборник на ПМФ Скопје, А, 23, 27-35 (1973)

J. Moser, S. Bahčevandžidv Lj. Janičijević, M. Jonoska

MOIRÈ FRINGES OF SYSTEMS OF EQUIEXCENTRAL SECOND ORDER CURVES HAVING ONE COMMON FOCUS

S u m m a r y

The aim of this article is to study the moirè fringes obtained by overlapping the gratings which represent systems of equiexcentral second order curves (1) having one common focus.

The polar coordinates are used as the most convenient and the examination of the moirè curves (4) is based on the well known indicial representation. The existence of commutation moirè boundary (21) was examined as well as the efficiency of the subtractive and additive moirè curves (27). The separate cases are illustrated by photographs.