Математички Билтен
26 (LII)
2002 (109–116)
Скопје, Македонија

ISSN 0351–336X

ДВЕ КОНЦИЗНИ ФОРМИ НА РЕШЕНИЕТО НА ОСНОВНАТА РАВЕНКА ВЕКУА

Борко Илиевски

Абстракт

Во оваа работа општото решение (9) на основната равенка (8), кое што е добиено во трудот [6], е сведено на две концизни форми (12) и (20).

1. Вовед

С. Фемпл во трудовите [1] и [2], со помош на операторот **B** на А. Билимовиќ [3] дефиниран со

$$\mathbf{B}(W) = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{1}$$

воведува одредени класи обопштени аналитички функции $W(z) = u(x,y)+iv(x,y)$, $z = x+iy$. Ова се неаналитички функции, во смисла на класичната теорија на аналитичките функции, чиешто прво, односно второ отстапување од аналитичност е аналитичка функција.

Во монографијата [4] на Г. Н. Положий дефинирани се четири класи на обопштени аналитички функции како решенија на равенката Векуа

$$\frac{\hat{d}W}{d\,\overline{z}} = AW + B\,\overline{W} + C\,, \tag{2}$$

во зависност од коефициентите $A = A(z)$, $B = B(z)$ и $C = C(z)$. При ова $\frac{\hat{d}}{d\overline{z}}$, дефинирано со

$$\frac{dW}{d\overline{z}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right], \tag{3}$$

е т.н. операторен извод по $\overline{z} = x - iy$ или ареоларен извод на функцијата $W(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Една од тие класи е класата на $\mu = r + is$-аналитичките функции, определена со специјалната равенка Векуа

$$\frac{\hat{d}W}{d\overline{z}} = \mu\overline{W}. \tag{4}$$

Во трудот [6], со метод на ареоларни редови

$$W = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} C_{pq} z^p \overline{z}^q \tag{5}$$

е најдено решение

$$W = \sum_{k=0}^{\infty} W_k, \tag{6}$$

а со тоа и низа $\{W_k\}$ од решенија

$$W_k = C_{k0} z^k \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k!\,(z\overline{z})^n}{(n!)^2(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}\right] + \tag{7}$$
$$+ \overline{C}_{k0}\,\overline{z}^k \left[\frac{1}{k+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k!\,(z\overline{z})^n}{(n!)^2(n+1)(n+2)\cdots(n+k)(n+k+1)}\right]$$

на основната (непотполната) равенка Векуа

$$\frac{\hat{d}W}{d\overline{z}} = \overline{W}, \tag{8}$$

дефинирани во целата комплексна z-рамнина. Притоа, C_{k_0}, $k = 0, 1, 2, \ldots$ се произволни комплексни константи.

Со замена на (7) во (6) и прегрупирање на членовите во соодветни групи, решението (6) се запишува во обликот

$$\begin{aligned} W = \phi(z) &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\overline{z}^k}{k!} \int\int\cdots\int \phi(z)\,(dz)^k + \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \int\int\cdots\int\int \overline{\phi}(z)\,(d\overline{z})^{k+1}, \end{aligned} \tag{9}$$

при што експлицитно е одделена произволна аналитичка функција

$$\phi(z) = \sum_{p=0}^{\infty} C_{p0} z^p \tag{10}$$

во улога на интеграциона константа. Значи, (9) е општо решение на основната равенка Векуа (8).

Во оваа работа е поставен следниот проблем. Дали може општото решение (9) на равенката (8) да се запише во поконцизна форма?

За таа цел ја користиме формулата Cauchy

$$\int\int\cdots\int \phi(z)\,(dz)^k = \begin{cases} \dfrac{1}{(k-1)!}\displaystyle\int (z-\xi)^{k-1}\,\phi(\xi)\,d\xi, & k \geq 2 \\ \displaystyle\int \phi(\xi)\,d\xi\,, & k = 1\,, \end{cases} \tag{11}$$

според која повеќекратна интеграција се сведува на еднократна интеграција со параметар, а чијашто веродостојност лесно се проверува.

Согласно со (11), општото решение (9) добива облик:

$$W = \phi(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\overline{z}^k}{k!}\,\frac{1}{(k-1)!}\int (z-\xi)^{k-1}\,\phi(\xi)\,d\xi +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\,\frac{1}{k!}\int \left(\overline{z-\xi}\right)^k\,\overline{\phi}(\xi)\,d\,\overline{\xi}$$

или, со внесување на $\overline{z}^k$ и z^k под знакот на интегралите

$$\begin{aligned} W = \phi(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \int \frac{\overline{z}^k (z-\xi)^{k-1}}{k!\,(k-1)!}\,\phi(\xi)\,d\xi + \\ + \sum_{k=0}^{\infty} \int \frac{z^k (\overline{z}-\overline{\xi})^k}{(k!)^2}\,\overline{\phi}(\xi)\,d\,\overline{\xi}\,. \end{aligned} \tag{12}$$

Користејќи ја теоремата на Ваерштрас лесно се покажува дека редовите

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\overline{z}^k (z-\xi)^{k-1}}{k!\,(k-1)!}\,\phi(\xi) \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k (\overline{z}-\overline{\xi})^k}{(k!)^2}\,\overline{\phi}(\xi)\,,$$

со непрекинати членови, во секоја затворена подобласт од областа на холоморфноста на функцијата $\phi(\xi)$, се рамномерно конвергентни редови. Поради ова може да се примени теоремата за интеграција на редови член по член, т.е. можна е комутација на сумите и интегралите во формулите (12)

$$\begin{aligned} W = \phi(z) + \int \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\overline{z}^k (z-\xi)^{k-1}}{k!\,(k-1)!}\right] \phi(\xi)\, d\xi + \\ + \int \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k(\overline{z}-\overline{\xi})^k}{(k!)^2}\right] \overline{\phi}(\xi)\, d\overline{\xi}. \end{aligned} \tag{13}$$

Така, решението (9) на основната равенка (8) е претставено преку еднократни интеграли со параметар.

Теорема 1. *Основната равенка Векуа* (8) *има општо решение* (13), *дадено преку интеграл со параметар, при што* $\phi(z)$ *е произволна холоморфна функција во улога на интеграциона константа.*

Сега да ги проучиме двата реда во формулата (13). Согласно со D'Alambert-овиот критериум, за вториот ред, имаме

$$\left| \frac{\dfrac{z^{k+1}(\overline{z}-\overline{\xi})^{k+1}}{(k+1)!^2}}{\dfrac{z^k(\overline{z}-\overline{\xi})^k}{(k!)^2}} \right| = \frac{|z|\cdot|\overline{z}-\overline{\xi}|}{(k+1)^2} \to 0$$

при $k \to \infty$ за секое конечно z и ξ, што значи дека редот апсолутно конвергира. Со S да ја означиме неговата сума т.е.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left[z(\overline{z}-\overline{\xi})\right]^k}{(k!)^2} = S.$$

Ставајќи

$$z(\overline{z}-\overline{\xi}) = u$$

имаме

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{(k!)^2} = S(u). \tag{14}$$

Редот (14) е степенски ред по степените на u, што значи дека истиот може да се диференцира член по член. Имаме

$$S'(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ku^{k-1}}{(k!)^2}$$

$$u\, S'(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ku^{k}}{(k!)^2}$$

$$\left(u\, S'(u)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2u^{k-1}}{(k!)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^{k-1}}{(k-1)!^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^{k}}{(k!)^2} = S(u)\,,$$

односно

$$u\, S''(u) + S'(u) - S(u) = 0\,. \tag{15}$$

Равенката (15) е диференцијална равенка за сумата на редот (14).

Наоѓаме резултат во Камке [7] стр. 401: Равенката

$$x^2y'' + axy' + (bx^m + c)y = 0$$

за $m \neq 0$ и $b \neq 0$ има решение

$$y = x^{\frac{1-a}{2}}\, Z_\nu\left(\frac{2}{m}\sqrt{b}\, x^{\frac{m}{2}}\right), \qquad \nu = \frac{1}{m}\sqrt{(1-a)^2 - 4c}\,.$$

Специјално, за $m = 1$, $a = 1$, $b = -1$ и $c = 0$ ја имаме диференцијалната равенка

$$xy'' + y' - y = 0 \tag{16}$$

и нејзиното решение

$$y = Z_0(2i\sqrt{x})\,,$$

каде што Z_0 е т.н. цилиндрична функција од нулти ред.

Бидејќи нашата диференцијална равенка (15) е всушност равенка (16), тоа равенката (15) има решение

$$S(u) = Z_0(2i\sqrt{u})\,. \tag{17}$$

Со тоа извршивме сумирање на редот (14), т.е. на вториот ред во формулата (13).

$$S=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[z(\overline{z}-\overline{\xi})]^k}{(k!)^2}=Z_0\left(2i\sqrt{z(\overline{z}-\overline{\xi})}\right). \tag{18}$$

Што се однесува до првиот ред во (13) имаме

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\overline{z}^k(z-\xi)^{k-1}}{k!(k-1)!}&=\sum_{k=1}^{\infty}\overline{\frac{z^k(\overline{z}-\overline{\xi})^{k-1}}{k!\,(k-1)!}}\\&=\overline{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k(\overline{z}-\overline{\xi})^{k-1}}{k!\,(k-1)!}}=\overline{\frac{\partial S}{\partial\overline{z}}}=\\&=\overline{\frac{\partial}{\partial\overline{z}}Z_0\left(2i\sqrt{z(\overline{z}-\overline{\xi})}\right)}.\end{aligned} \tag{19}$$

Конечно, со оглед на формулите (18) и (19) решението (13) на основната равенка (8) може да се запише во концизен облик

$$\begin{aligned}W=\phi(z)&+\int\overline{\frac{\partial}{\partial\overline{z}}Z_0\left(2i\sqrt{z(\overline{z}-\overline{\xi})}\right)}\,\phi(\xi)\,d\xi+\\&+\int Z_0\left(2i\sqrt{z(\overline{z}-\overline{\xi})}\right)\overline{\phi}(\xi)\,d\overline{\xi}.\end{aligned} \tag{20}$$

Теорема 2. *Основната равенка Векуа* (8) *има решение во затворен облик* (20), *при што $\phi=\phi(z)$ е произволна холоморфна функција во улога на интеграциона константа и Z_0 е цилиндрична функција од нулти ред по променливата $u=z(\overline{z}-\overline{\xi})$.*

Забелешка 1. Функциите $W(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, $z=x+iy$, дефинирани со формулите (9), т.е. (12), т.е. (20) се т.н. обопштени аналитички функции од четврта класа со карактеристика $\mu=1$.

Забелешка 2. Согласно врската

$$\mathbf{B}=2\frac{\hat{d}}{d\overline{z}}$$

што постои помеѓу операторот на Билимовиќ (1) и ареоларниот извод (3), функциите (9), т.е. (12), т.е (20) можат да се интерпретираат како неаналитички функции чиешто отстапување од аналитичноста е двапати поголемо од нејзината комплексно-конјугирана вредност.

Забелешка 3. Основната равенка Векуа (8) е комплексен запис на системата парцијални диференцијални равенки

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y} = 2u \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = -2v, \end{cases}$$

што значи дека со

$$u = \operatorname{Re} W \quad \text{и} \quad v = \operatorname{Im} W ,$$

при што W е определено со (9), т.е. (12), т.е. (20), е најдено решението на споменатата система парцијални диференцијални равенки.

Литература

[1] S. Fempl: *О неаналитичким функцијама чије је одступање од аналитичности аналитичка функција*, GLAS CCLIV – Odeljenje prirodno matematichkih nauki, knj. 24, Beograd, 1963.

[2] S. Fempl: *О неаналитичким функцијама чије је друго одступање од аналитичности аналитичка функција*, Bilten DMF SR Srbije, V. XV, 1-4, Beograd, 1963.

[3] A Bilimovich: *Sur la mesure de déflexion d'une fonction non analytique por rapport á une fonction analytique*, C.R. Acad. Sci. Paris, 237 (1953), 694.

[4] Г. Н. Положий: *Обобшение теории аналитических функций комплесного переменного*, Киев, 1965.

[5] D. Dimitrovski, B. Ilievski: *L'equation differentielle aréolaire analytique*, Contributions MANU, V 1-2, Section of mathematical and technical sciences, Skopje, 1984.

[6] Б. Илиевски: *Некои аналитички решенија на една класа равенки Векуа*, Математички Билтен, 14 (XL), Скопје, 1990, 79-86, Југославија.

[7] Камек: *Спровочник*, IV издание, Москва, 1971.

TWO CONCISE REPRESENTATIONS OF THE SOLUTION OF BASIC VEKUA EQUATION

Borko Ilievski

S u m m a r y

The basic Vekua equation (8), by Polozil [4], defined so-called generalized analytic functions of third class with characteristic $\mu = 1$, but Fempl [1] defined so-called nonanalytic functions which outgoing of analyticity is two times bigger of its complex conjugate value.

In this work the generalized solution (9) of the basic Vekua equation (8), is founded using areolar series [6] and is written in two more concise forms (12) and (20).

University "St. Kiril and Metodij"

Institute of Mathematics

P.O. Box 162

1000 Skopje

Republic of Macedonia