МАТЕМАТИЧКИ ОМНИБУС, 10 (2021), 169 – 178
http://im-pmf.weebly.com/matematicki-omnibus-kniga-10.html

ПРИМЕНА НА КОМПЛЕКСНИТЕ БРОЕВИ ВО НАСТАВАТА ПО ФИЗИКА

Стојан Манолев [1]

Корелацијата помеѓу наставните содржини по математика и физика отсекогаш претставувала една од клучните алки за ефикасна настава по физика. Во трудот се прикажани наставни единици од физиката во кои може да се користат својствата на комплексните броеви, како на пример, нивното геометриско претставување, разните облици на запишување и модул на комплексен број.

1. ПОЧЕТОЦИТЕ НА ВОВЕДУВАЊЕ НА УЧЕЊЕТО ЗА КОМПЛЕКСНИТЕ БРОЕВИ

Од историска гледна точка првите почетоци за комплексните броеви, [5], започнуваат со трудовите на Џироламо Кардано (Girolamo Cardano, 1501–1576, италијански ренесансен математичар, физичар и пронаоѓач) во неговото дело Арс Магна (Artis Magnae, Sive de Regulis Algebraicis) објавено во 1542 година. Во 1572 година објавена е и книгата L`Algebra од Бомбели (Rafael Bombelli, 1526-1572, италијански математичар), во кој на база на работите опишани во Арс Магна изведува операции со негативни броеви, опишувајќи дури правила за работа со величини под чиј корен се наоѓа негативен број. На пример $x=1$ е очигледно решение на равенката $x^3 = 5x - 4$, но изразена во трудовите на Кардано решението е дадено во обликот:

$$x = \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-17/27}} + \sqrt[3]{-2 - \sqrt{-17/27}}$$

Иако решението на равенката $x^2 + 1 = 0$ е мотивирачко и почетно при објаснување на комплексните броеви денес, главна улога одиграле решенијата на равенките од трет степен.

Првите чекори во развојот на аритметиката на комплексните броеви ги прави Бомбели. Буквата *R* ја користел за квадратен корен, radix quadraticus, а R^3 за кубен корен, radix cubus, p како симбол за собирање, m за одземање, а заградите укажувале на изразот на кој се однесува разгледуваната операција. Така, изразите $\sqrt{4+\sqrt{6}}$; $\sqrt[3]{2+\sqrt{0-121}}$ ги запишувал на следниот начин $R\lfloor 4pR6\rfloor$и $R^3\lfloor 2pR\lfloor 0m121\rfloor\rfloor$ соодветно.

Ознаката $i=\sqrt{-1}$ ја вовел Ојлер (Leonhard Paul Euler; 1707–1783, швајцарски математичар) во 1748 година. Гаус (Johann Carl Friedrich Gauß; 1777–1855, германски математичар) се смета дека прв го вовел името комплексен број.

Денес комплексните броеви имаат примена во теоријата на управување, електромагнетизмот, сигналната анализа, динамиката на флуиди, квантната механика и во други области. Колку е нивната примена важна во учењето на еден инженер по физика или професор по физика, на студентите по физика од прва година на Универзитетот „Ројал Холовеј“ во Лондон почетокот на учебната година ја започнува со химна, [4], посветена на комплексните броеви.

Воведувањето на поимот за комплексен број може да се направи на следнииот начин:

– Еден од почетоците на курсевите, лекциите по математика започнуваат со барањето на решенија на равенката: $x^2+1=0$

– Равенката нема решение во множеството на реалните броеви, [1]. Нејзината трансформација во обликот $x^2=-1$ ни дава информација дека квадратот на ниеден реален број не е негативен.

– Се јавува потреба од проширување на множеството на реални броеви до множество кое треба да содржи елемент чиј квадрат е -1. Поради тоа се воведува нов број кој се означува со симболот i, таков што неговиот квадрат да е -1, т.е $i^2 \overset{\text{def}}{=} -1$, наречен *имагнарна единица*.

– Бројот $a+ib$, каде што a и b се дадени реални броеви, а i е имагинарната единица, се вика *комплексен број*.

– Ако $z=a+bi$, бројот a се вика *реален дел* на комплексниот број z и се означува со Re(z), а бројот b се вика *имагинарен дел* на бројот z и се означува со Im(z).

– Комплексниот број $z=a+bi$ може да се претстави со подредениот пар на реални броеви (a, b) и обратно, секој подреден пар (a, b) може да се запише како комплексен број $z=a+bi$.

– Рамнината чиишто точки претставуваат комплексни броеви се вика *комплексна* или *Гаусова рамнина*. Апцисната оска се вика *реална оска*, а ординатната оска се вика *имагинарна оска*.

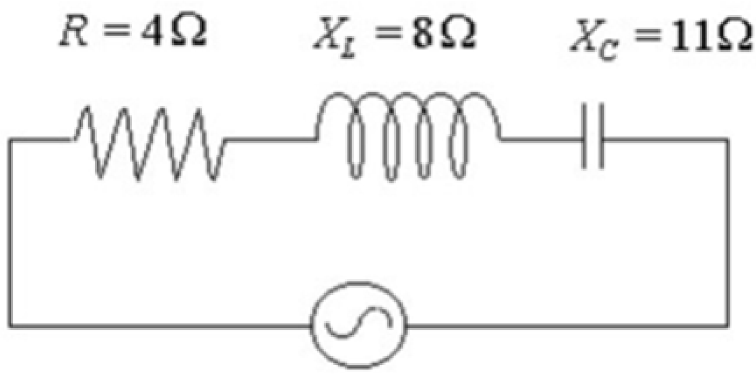
– Поим за *радиус вектор* (насочената отсечка којашто го поврзува координатниот почеток со одредена точка од Гаусовата рамнина).

Помеѓу комплексните броеви и радиус векторите постои заемно еднозначно соодветство.

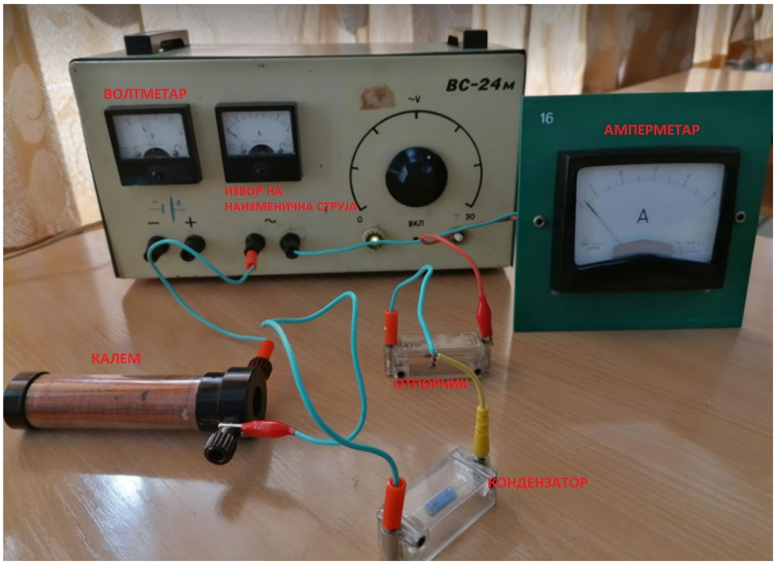
2. ПРИМЕРИ НА ЗАДАЧИ ОД ФИЗИКА ВО СРЕДНОТО ОБРАЗОВАНИЕ СО ПРИМЕНА НА КОМПЛЕКСНИТЕ БРОЕВИ

Во нашето македонско образование првите лекции по математика за комплексни броеви се дадени во втора година средно образование. Во некои учебници по физика од втора и од трета година се опишани и примери за примена на комплексните броеви во објаснување и решавање задачи по физика. Како најчести примери во кои наоѓаат примена комплексните броеви во дизајнирањето на електричните струјни кругови со наизменична струја.

Пример 1. Да се пресмета вкупниот електричен отпор во круг со наизменична струја (импедансата) дaден на Сликата 1 (шематски приказ) и на Сликата 2 реална монтажна шема.

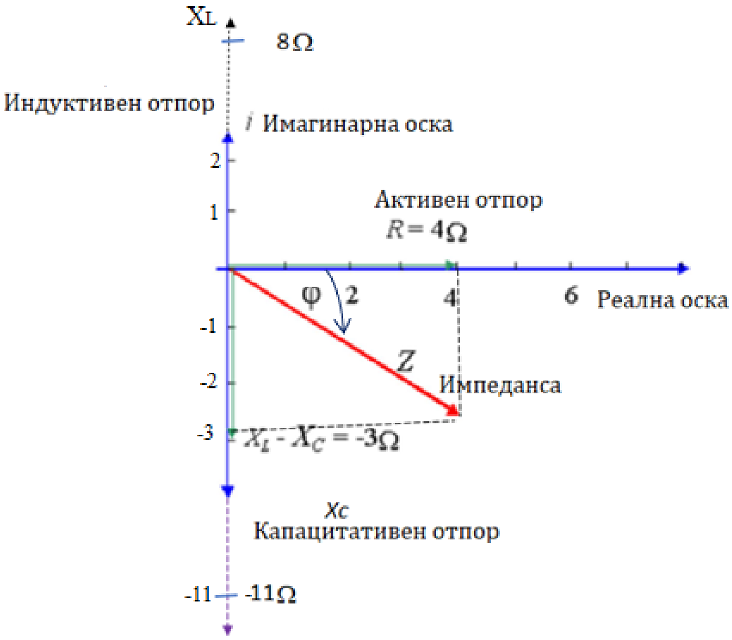


Слика 1. Сериска врска на активен, индуктивен и капацитативен отпор.



Слика 2. Реална реализирана сериска врска на калем со индуктивен отпор, кондензатор со капацитативен отпор и отпорник со термоген (активен) отпор.

Во комплексната рамнина лесно може да се прикажат вредностите на отпорот на кондензаторот (X_C), активниот (термогениот) отпор на отпорникот R и отпорот на калемот (индуктивен отпор) R_L, Слика 3, [2].



Слика 3. Комплексна рамнина – определување на импеданса.

На вертикалната оска позитивниот дел индуктивниот отпор е претставен како вектор. На негативниот дел од имагинарната оска, т.е. негативниот дел, е претставен капацитативниот отпор. Со собирање на овие колинеарни вектори кои имаат спротивна насока се добива разликата $X_L - X_C = -3\Omega$. Разликата е нов вектор кој ја задржува насоката на векторот што има поголем модул, во случајов насоката на капацитативниот отпор. Со собирање на така добиениот вектор со векторот на активниот отпор, по правилото на паралелограм, се добива резултантниот вектор, импедансата како дијагонала на паралелограмот. Вредноста на импедансата (модулот на векторот) се пресметува според Питагоровата теорема:

$$z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = z = \sqrt{4^2 + (8 - 11)^2} = z = \sqrt{16 + 9} = 5\Omega.$$

Посочените физички величини можат да бидат претставени и како комплексни броеви во сите четири нивни записи. Притоа во однос на означувањето на некоја физичка величина како комплексен број, наместо i се користи j. Имено, во физиката i не се користи, туку j, поради тоа што i е искористена за електричната величина јачина на струја. За да се означи дека величината е комплексна, некои автори, користат црта под буквата, а некои црта над буквата. Во смисла да се прави разлика меѓу комплексна физичка величина и комплексно конјугиран број, попрактично е користење на ознаката со црта поставена одоздола. Така, претставувањето на разгледуваните физички величини како комлексни броеви е:

- правоаголен или алгебарски запис (картезијанска форма): $a + j$,
- тригнометриска форма: $|Z| \cdot (\cos\alpha + \sin\alpha)$,
- експоненцијална форма: $|Z| \cdot e^{j\alpha}$ и
- поларна форма: $|Z|, \angle\alpha$.

Импедансата за претставениот случај на векторскиот дијаграм во Гаусовата рамнина (Слика 3) може да биде претставена и како комплексен број (комплексна импеданса):

$$z = 4 - 3j \qquad (1)$$

$$Re = 4,\ Img = -3$$

Активниот отпор може да се претстави и со само реалниот дел на комплексниот број $z_1 = 4$, индуктивниот отпор $z_2 = +8j$ и капацитивниот отпор со $z_3 = -11j$. Со собирање на активниот отпор, капацитивниот и индуктивниот отпор применувајќи ја операцијата собирање на комплексни броеви повторно може да се дојде до истиот резултат за импедансата (равенка 1).

$$z = z_1 + z_2 + z_3 = 4 + 8j - 11j = 4 + j(8 - 11) = 4 - 3j$$

Модулот на комплексниот број или апсолутната вредност на комплексниот број се пресметува со равенката

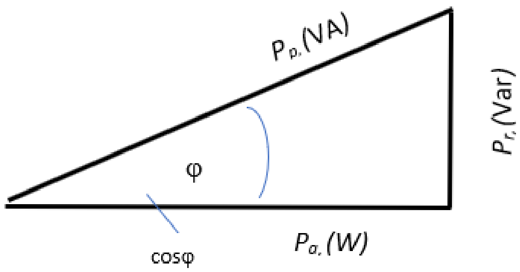
$$|z| = |4 - 3j| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{(4 - 3j) \cdot (4 + 3j)} = \sqrt{Re^2(z) + Jm^2(z)} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$$

Добиеното решение може да се изрази и во:

- поларен облик: $r = 5, \angle\varphi = -36{,}87^o$;
- тригнометриски облик: $z = 5(cos36{,}87^o - jsin36{,}87^o)$ или $z = 5(cos0{,}643328 - jsin0{,}643328)$;
- експоненцијален облик: $z = re^{j\varphi} = 5e^{-j0{,}643328}$.

Аголот φ, [3], изразен во поларниот облик на комплексниот број во степени 36,87° или 0,643328 rad изразен во радијани, ја покажува фазната разлика [3], помеѓу струјата i и напонот u во електричен круг со наизменична струја, (Слика 3).

Косинусната вредност од тој агол го претставува факторот на моќноста ($\cos\varphi$), кој е многу значаен за даден уред, потрошувач на наизменична електрична струја, во однос колкав дел од влезната електрична енергија е полезно искористена. Таа има вредности помеѓу 0 и 1. Колку вредноста е поблиска до 1 (0,85; 0,65; 0,50;........), толку активната моќност е поголема и уредот е поефикасен.



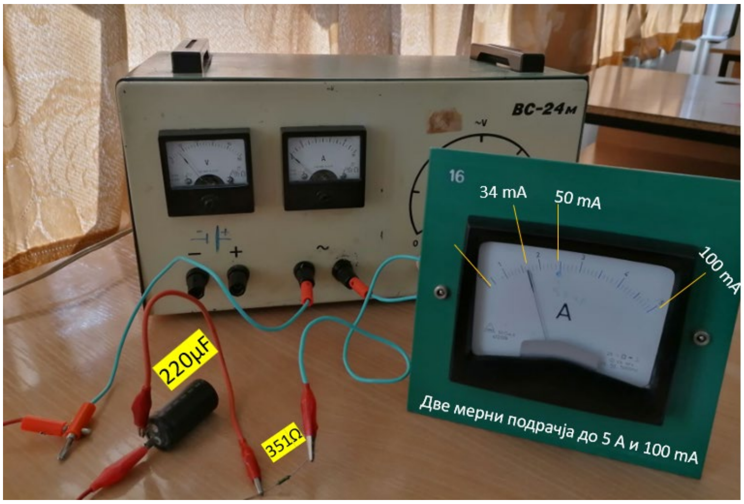
Слика 4. Вкупна, активна и реактивна моќност во круг со наизменична струја

Во следниот пример ќе покажеме експериментално мерење на ефективен напон и јачина на наизменична струја и определување на импедансата.

Пример 2. Да се пресмета импедансата (вкупниот отпор во круг со наизменична струја) и адмитансата на сериско поврзани термоген отпорник од 351Ω и кондензатор со капацитет од 220 μF. Измерените ефективни вредности на напонот и јачината на струјата во кругот се: U=11,1 V и I=34mA.

Дадено е: C=220μF, R= 351Ω, U=11,9V, I=34mA

Се бара: z =? (импеданса) и $^1/_z$ =? (адмитанса).



Слика 3. Практична електрична шема на поврзаност на кондензатор и термоген отпорник.

$z_1 = 351 + 0 \cdot j = 351\Omega$ – активен (термоген) отпор;

$z_2 = 0 - \frac{1}{2\pi f C} j = -\frac{1}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 50 \cdot 220 \cdot 10^{-6}} j \approx -14{,}5j\ \Omega$ – капацитивен отпор.

Импедансата $z = |z_1 + z_2|$ може да ја пресметаме како модул од збирот на два комплексни броеви:

$$z = \sqrt{351^2 + (-14{,}51)^2} = \sqrt{123\,201 + 210{,}54} = \sqrt{123\,411{,}54} = 351{,}3\Omega$$

Знаејќи ги ефективните вредности на напонот и јачината на наизменичната струја (вредности што ги покажуваат амперметар и волтметар за наизменична струја) може да дојдеме до импедансата користејќи го Омовиот закон:

$$i_{ef} = \frac{U_{ef}}{z}$$

$$z = \frac{U_{ef}}{i_{ef}} = \frac{11{,}1\text{V}}{0{,}034\text{A}} = 326{,}4\Omega \ .$$

Забележуваме разлика меѓу теориски пресметаната импеданса како модул од збирот на комплексните броеви и пресметаниот резултат со мерење на ефективните вредности на напонот и јачината на струјата. Таа разлика се должи на фактот што за вредностите на отпорот и капацитетот на кондензаторот се запишани со некоја толерантна вредност, $\pm 5, 10$ или 15% , точноста на мерните инструменти и други објективни субјективни грешки при мерењата.

Адмитансата се пресметува како реципрочна вредност на импеданасата и се мери во единицата сименс, 1S. За конкретниот случај изнесува $\frac{1}{z} = \frac{1}{326{,}4} = 0{,}003S \approx 3\text{mS}$.

Физичките величини: активен, индуктивен и капацитивен отпор се скаларни величини. На величините коишто се скаларни, а им се припишува векторско својство се нарекуваат *фазори*.

Пример 3. Да се пресмета вкупниот отпор на сериско поврзаните отпорник со омски (активен, термоген отпор) $R = 20\Omega$ и калем со индуктивност $L = 240mH$, поврзани на извор од наизменична струја со фреквенција од 50Hz. Да се одреди комплексната импеданса во алгебарски, поларен и експоненцијален облик, Слика 4.

На реалната оска се нанесува активниот отпор, а на имагинарната оска индуктивниот отпор. Комплексните броеви може да се запишуваат и како **подредени** парови. Така, индуктивниот отпор може да се претстави како подреден пар $z_1 = X_L = (0, \omega L)$, а активниот отпор како $z_2 = (R, 0)$.

$$\bar{z} = Re + jIm = R + jX_L = R + j2\pi f L$$

1. $\bar{z} = (20 + 75{,}36j)\Omega$ – алгебарска форма;

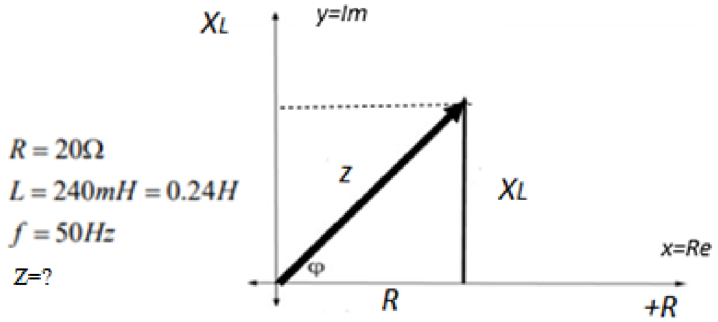
2. $r = |\bar{Z}| = \sqrt{R^2 + {X_L}^2} = \sqrt{20^2 + 75{,}36^2} \approx \sqrt{400 + 5679{,}13} \approx 77{,}9688\Omega$

$\tan\varphi = \dfrac{X_L}{R} \Rightarrow \varphi = \tan^{-1}\dfrac{75{,}36}{20} \approx 1{,}31138, rad \approx 75{,}17^0$

$r = 77{,}97\Omega, \angle 75{,}17^0$ – поларна форма;

3. $|\bar{z}| = r(cos\varphi + jsin\varphi) = 77{,}97(cos75{,}17^0 + jsin75{,}17^0)\Omega$ – тригнометриска форма и

4. $|\bar{z}| = re^{j\varphi} \approx 77{,}97e^{j1{,}31138}\Omega$ – експоненцијална форма.



Слика 4. Претставување на елементите од Пример 3.

Користењето на знаењето за комплексни броеви во наставата по физика овозможува значително олеснување и разбирање на некои физички феномени и обратно, внесувањето примери од физика на часовите по математика се губи „сувопарниот ефект“ од формулите без нивно соодветно значење.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. Миладиновиќ, Т. Ѓорѓиевски, Н. Петрески, *Математика за II година,* Алби, Скопје 2002.

[2] К. Крстевски. *Физика за III година на сите технички струки и IV година општа гимназија,* Просветно дело, Скопје, 1999.

[3] *Representation de Fresnel,* http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Elec/Alternatif/Fresnel_FJ.php

[4] Imaginary Numbers,
https://looneyatoms.com/2012/11/24/imaginary-numbers/

[5] N. Teofanov, *Deset lekcija elementarne matematike (Kompleksni broevi, istoriska perspektiva)*, Novi Sad 2021.
https://pdfslide.net/documents/1-prvo-predavanje-kompleksni-brojevi-istorijska-perspektiva.html

[1] Средно општинско училиште „Гоце Делчев“ - Валандово,
ул. Првомајска бр.3, Валандово, Р. Северна Македонија
e-mail: manolest@gmail.com

Примен: 12.6.2021
Поправен: 19.1.2022
Одобрен: 20.1.2022
Објавен на интернет: 23.1.2022