МАТЕМАТИЧКИ ОМНИБУС, 4 (2018), 151 – 170
http://im-pmf.weebly.com/matematicki-omnibus-kniga-4.html

# ГЛОБАЛНА НЕДЕЛА НА МАТЕМАТИКАТА – КОНЦЕПТОТ НА ЕКСПЛОДИРАЧКИ ТОЧКИ

*Адмир Хусеини*[1]

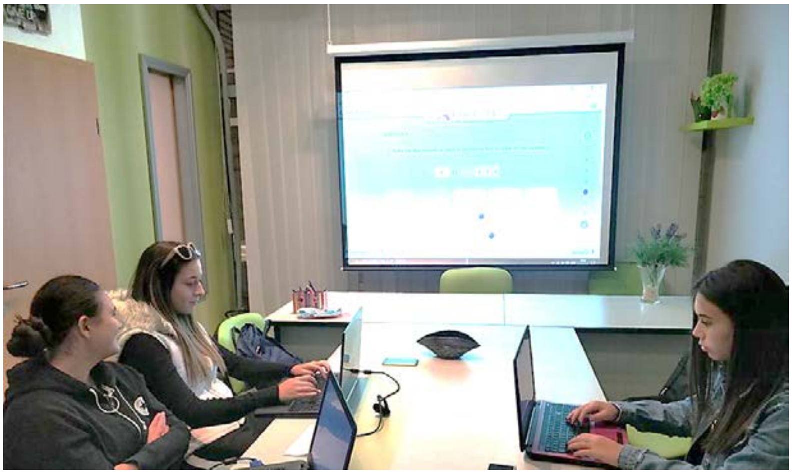
Во овој труд ќе зборуваме за настанот „Глобална недела на математиката“, [4], кој се одржа во текот на октомври 2017 година и за концептот на експлодирачки точки, [3], како централна математичка тема на овој настан. Ќе дадеме кратка презентација на графичкото прикажување на позиционите бројни системи, како и на реализирањето на аритметичките операции во оваа графичка интерпретација. На крајот ќе дадеме и краток опис на официјалната веб страница користена за интерактивни активности со експлодирачките точки, [3].

Најголемиот дел од информациите за настанот „Глобална недела на математиката“, неговата организација и реализација, се преземени од [1] и [2] и дополнети со лични искуства на авторот од неговото учество во настанот.

## 1. ВОВЕД

Во октомври 2017 година над еден милион ученици и наставници од 168 земји и територии делеа заедничко математичко искуство. Учениците цртаа илустрации на табла и истражуваа игри со бројки, користејќи шарени магнетни точки или играа со онлајн верзијата на нивните лаптопи. Две години пред тоа, основачкиот тим на програмата "Hour of Code", [5], си го поставил прашањето: Може ли секој човек на оваа планета да ја гледа математиката како човечка, релевантна, значајна и достапна активност која помага во остварањето на креативност и која носи радост? Така настанала идејата да се прогласи една посебна недела од секоја година како „Глобална недела на математиката“ (ГНМ) и да се побара од наставниците во текот на таа недела со учениците да реализираат математички активности, [1], [2]. Тим на професионалци по математика вложија значителен труд за да ја претворат неделата помеѓу 10.10.2017 и 17.10.2017 година во основачка Глобална недела на математиката. Следните елементи се покажале како клучни за успехот на овој настан:

• интересна математичка тема
• привлечни и достапни ресурси за ангажирање на наставниците и учениците
• глобална мрежа на амбасадори посветена на ширење на настанот
• партнерски организации кои ги поддржуваат активностите на проектот преку финансиски донации.



**Слика 1**. Средношколци кои работат со експлодирачките точки во просториите на Центарот за математичка едукација – „Гаус“во Скопје.

## 2. РЕАЛИЗАЦИЈА НА НАСТАНОТ

### 2.1. ОРГАНИЗАТОРИ И ГЛОБАЛНА МРЕЖА НА АМБАСАДОРИ

Еден од главните основачи и главен двигател на активностите околу ГНМ е австралискиот математичар Џејмс Тантон. Листата на останатите основачи на Глобалниот проект може да се најде на официјалната страница, [4]. Една од активностите на основачите на „Глобалниот проект за математика“ беше водење разговори со голем број меѓународни едукаторски друштва за математика кои сакаа да помогнат во ширењето на идејата и споделување фотографии и видеа од наставници и ученици од целиот свет кои веќе играат со експлодирачките точки.

Партнерските организации од „Глобалниот проект за математика“ придонесуваа во основната структура на проектот, на пример преку: развивање на онлајн апликации и алатки, преведување на материјали, промоција на настанот за наставниците и јавноста, одржување на јавни настани, обезбедување финансиска поддршка.

Домаќин на проектот е Американскиот институт за математика (АИМ), кој е поддржан од Националната научна фондација на Америка и чија мисија е да ја унапреди математиката преку заедничко решавање на проблеми. Проектот е поддржан и од страна на други партнерски организации, кои може да се најдат на официјалната веб страница [4]. Иако обезбедените финансиски средства не биле многу големи, проектот создаде голем интерес и одзив кај партнерските организации.

Глобалната мрежа на амбасадори-волонтери играше клучна улога во ширењето на веста за ГНМ и обезбедување на пристап до наставниците од целиот свет преку објавување на информации за ГНМ во социјалните медиуми, помагање при формирањето на партнерства со клучните организации на наставници ширум светот, превод на содржините на ГНМ, итн.

Постоеа повеќе начини на кои математичарите можеа да се вклучат во ГНМ, на пример, преку воведување на експлодирачките точки, централната математичка тема на ГНМ, во својата наставна програма, практични активности, споделување на информации за проектот со колегите од училиштата и организирање на јавен настан за ГНМ во нивната заедница.

## 2.2.АКТИВНОСТИ И УЧЕСТВО

За време на самата недела на настанот, изградената веб-страница служеше како портал каде што беа достапни повеќе верзии на активности со експлодирачки точки, почнувајќи од едноставни активности без значително користење на технологија, до активности целосно спроведливи на компјутер. Активностите без значително користење на технологија се состојат од преземање на .pdf - датотеки со наставни планови за водењето на дискусија за експлодирачки точки без специјализирана технологија во училница.

Активностите со користење на повисока технологија користат веб апликација со привлечен кориснички интерфејс претставен во облик на „острови“ каде што во секој остров се обработува конкретна тема (Слика 2). Секој остров содржи три елементи:

- кратко видео објаснување,
- водич за дискусија за наставниците, и
- интерактивна веб-апликација.


**Слика 2.** Островите во веб апликацијата, [3].

За оние кои сакаат да истражуваат подлабоко, има дополнителни материјали кои се создадени од тимот на проектот, како и од заинтересираните членови на математичката заедница и се бесплатно достапни на веб-страницата на ГНМ, [3]. Овие материјали го поддржуваат понатамошното истражување на позиционите бројни системи, аритметички алгоритми, негативни броеви, бази со произволна основа, полиноми, бесконечни суми и многу повеќе.

Се разбира дека целата тема на експлодирачки точки не може да се заврши во еден краток период. Надежта е дека наставниците и учениците ќе бидат инспирирани да истражуваат надвор од првите неколку часови и можеби да присвојат дел од лекциите за експлодирачки точки во нивните наставни планови во текот на годината. До крајот на ГНМ, беа регистрирани повеќе од 13500 наставници од 168 земји и територии, кои работеа со 1,77 милиони ученици.


**Слика 3.** Ученици од О.У. „Лирија“ кои работат со експлодирачките точки во просториите на Центарот за математичка едукација – „Гаус“ во Тетово.

Исто така, беше спроведена анкета за да се разбере до кој степен учеството во ГНМ ги збогати перцепциите на учениците и наставниците за математиката. Повеќе од 90% од наставниците кои беа анкетирани, се согласија дека темата за експлодирачки точки на ГНМ им помогнала на учениците да ја сметаат математиката за попристапна и попривлечна. Наставниците сметаа дека учениците станале позаинтересирани за математиката. Со извонредно успешна прва година од реализација на настанот ГНМ, следните чекори се да се обезбедат средства за да се пренесе настанот на следното ниво, т.е. да се преведе содржината на повеќе јазици, да се достигне бројот од преку 10 милиони ученици и наставници и понатаму да ѝ се радуваме на математиката низ целиот свет. Многу инспирирачко е што првата Глобална недела на математиката беше поттикната речиси целосно од волонтерски напори и придонеси. Безбројните волонтерски часови реализирани од луѓе ширум светот за да успее Глобалната недела на математиката 2017, претставуваат навистина извонредна посветеност.

Секоја година е планирано да се претставува нова тема за ГНМ со прекрасна приказна релевантна за наставната програма, а исто така да се чуваат претходните теми за понатомошно користење. Така, ГНМ 2018 ќе ги покани учениците и наставниците и професионалните математичари од целиот свет да пробаат нова втора возбудлива тема или да ги доживеат експлодирачките точки. За 2019 година ќе биде додадена трета тема и така натаму.

## 3. ЕКСПЛОДИРАЧКИТЕ ТОЧКИ

Организаторите на „Глобалниот проект за математика“ идентификуваа неколку математички приказни кои добро би ѝ служеле на целта на овој настан и се решија да презентираат една од нив, имено „Експлодирачките точки“ (ЕТ) како тема за прво искуство.

Експлодирачките точки претставуваат извонреден портал за развивање на умствените математички способности:

- истражување, откривање и објаснување на модели и структури;
- искористување на новото знаење за понатамошно истражување и откривање;
- развивање упорност при спроведувањето на активностите, а не решавање со полуформирани објаснувања;
- работа со апстрактни и конкретни поими;
- ангажирање во интересна интелектуална потрага

Експлодирачките точки се истовремено и естетски и корисни. Тие се комбинација на убава математика достојна за истражување како цел за себе како и за практично учење на конкретни вештини за имплементација и примена. Математиката ги има и двете страни и ЕТ е едно средство за демонстрирање на тие страни.

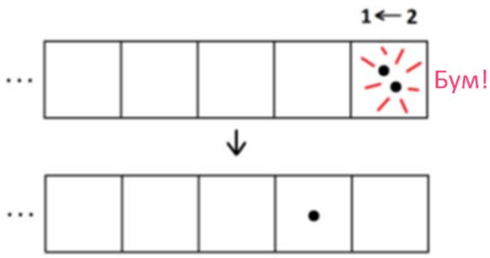
Замислете машина која не е ништо повеќе од низа кутии што може да содржат точки. И овие точки после одредени дејства ќе експлодираат. Со помош на овие кутии може да се разбере аритметиката која се учи во основно училиште како и полиномната алгебра која се учи во средно училиште. Овој концепт е развиен во 2005 година од страна на основачот на Глобалниот проект за математика Џејмс Тантон. Главна инспирација за ЕТ е моделот на "чип со отпуштање" (“chip firing” model, [2]), развиен од германскиот едукатор Артур Енгел во 1970-тите за да ги објасни основните концепти на веројатност за учениците, како и математичарот Џејмс Проп кој ја популаризирал идејата на Енгел. Едноставни примери на конфигурации на моделот на Енгел се совпаѓаат со работата на абакусот и ја илустрираат механиката на позиционипот броен систем во произволна база. Тантон ги претвори овие модели на абакуси во кутии и механизми за да ги поврзе со наставната програма на основните и средните училишта.

## 3.1. ОПИС НА МАШИНИТЕ

Да ја погледнеме "машината два - еден" која што се состои од кутии во кои се ставаат точки.

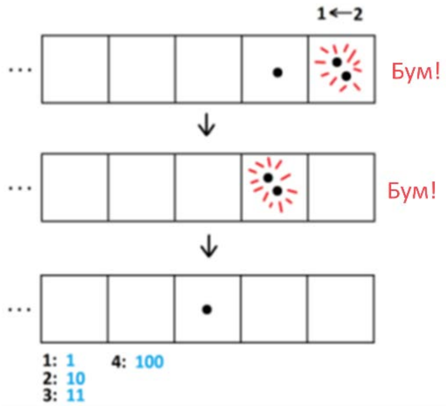

Во оваа машина секогаш се ставаат точки само во најдесната кутија.


Ако ставите и втора точка во најдесната кутија,тогаш и двете точки експлодираат и исчезнуваат и се заменуваат со една точка во соседната кутија налево.

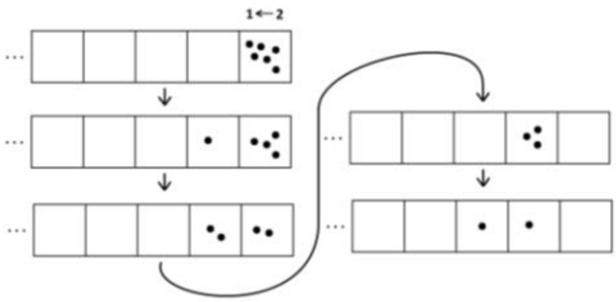



Гледаме дека две точки ставени во машината даваат една точка проследена со нула точки. Ставањето на трета точка ја дава подолната слика.

Оваа машина дава кодови за броеви. Само една точка ставена во машината, останува како една точка. Да речеме дека во 1 ← 2 машината, кодот за број еден е 1. Две точки поставени во машината, даваат една точка во полето проследено со нула точки, па велиме дека во 1 ← 2 машината, кодот за бројот два е 10. Ставањето на трета точка во машината го дава кодот 11 за бројот три. Со ставање на четврта точка во машината, добиваме повеќе експлозии!



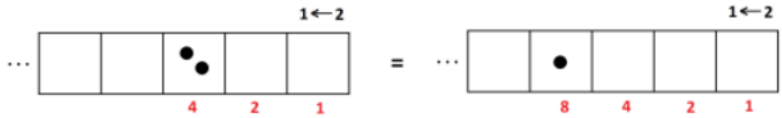

Кодот во 1 ← 2 машината за бројот четири е 100. На пример, поставувањето на шест точки во машина 1 ← 2 дава четири експлозии, со конечна распределба на точки што може да се прочитаат како 110.



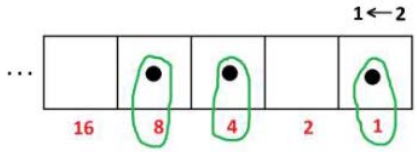

## 3.2. ШТО ПРАВАТ ОВИЕ МАШИНИ НАВИСТИНА?

Машината 1 ← 2 е дефинирана така што точките во најдесната кутија секогаш имаат вредност еднаква на еден. Со експлозија, две точки во десната кутија се еднакви на една точка во соседната кутија од лево. И бидејќи секоја точка во најдесната кутија е со вредност еднаква на 1, секоја точка од кутијата лево од најдесната мора да биде со вредност 2. И две точки во оваа втора кутија мора да вредат двапати по

2, т.е. 4. И 2 по 4 прават 8, што е вредноста на точката од следната кутија.

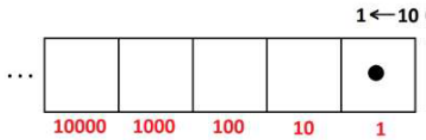



Можеме да видиме дека кодот за бројот тринаесет во 1 ← 2 машината е 1101, проверуваме со помош на вредностите на точките т.е. 8 + 4 + 1 = 13 што е точно.

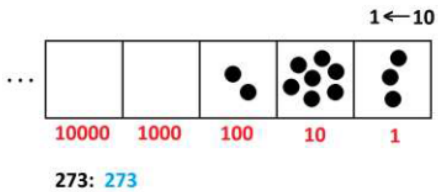



Машинските кодови 1 ← 2 се нарекуваат бинарно претставување на броевите (префиксот би- значи „два“). Кога се пишуваат броеви во бинарен броен систем, се користат само двата симболи 0 и 1. Компјутерите се изградени со електрични прекинувачи кои се вклучени или исклучени. Значи, многу е природно во компјутерската наука целата аритметика да се кодира во код кој користи само два симболи: 1 за вклучено и 0 за исклучено.

Слично, за 1 ← 10 машината можеме да видиме дека десет единици прават 10, десет десетки прават 100, десет стотки прават 1000 и така натаму. Машината 1 ← 10 има еден, десет, сто, илјада и така натаму, како вредности на точки.




На пример, кодот за бројот 273 во машината 1 ← 10 е 273:




Значи, преку оваа машина на точки и кутии може да се објаснат вредностите на броевите: во броен систем со основа два, три, десет, и така натаму.

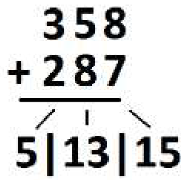
## 3.3. АРИТМЕТИЧКИ ОПЕРАЦИИ

### 3.3.1. СОБИРАЊЕ И МНОЖЕЊЕ

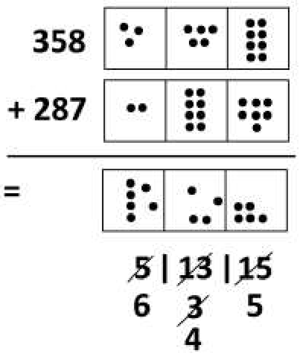
Да разгледаме една вообичаена задача со собирање:

Пресметај го збирот 251 + 124. Оваа задача лесно е да се пресмета: 2 + 1 = 3, 5 + 2 = 7 и 1 + 4 = 5. Па, одговорот е 375.

Сега да се обидеме со друга задача, на пример 358 + 287. Ако одиме од лево кон десно, ќе добиеме 3 + 2 = 5, 5 + 8 = 13 и 8 + 7 = 15.

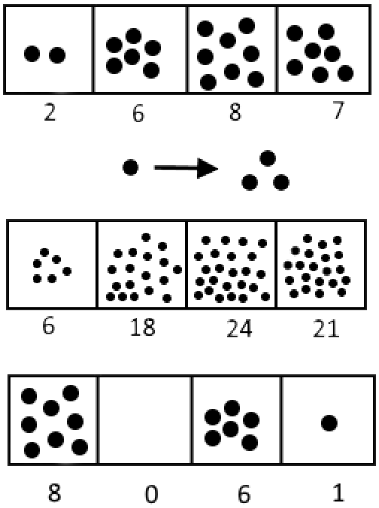



И овој одговор е апсолутно математички точен! Можете да видите дека  во 1 ← 10 машина резултатот се претвара во 645, што е точната вредност.




Да разгледаме една задача со множење.

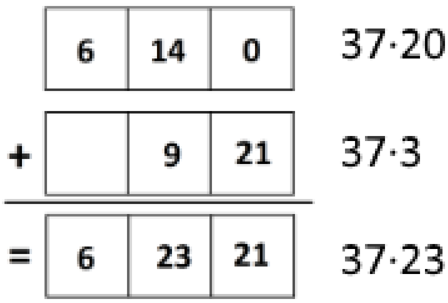
Пресметај го производот 2687 · 3. Оваа задача исто така лесно е да се пресмета, 2 · 3 = 6, 6 · 3 = 18, 8 · 3 = 24, 7 · 3 = 21. Ако ги запишеме овие броеви на соодветните позиции, и ако ги префрлиме десетките, а потоа и стотките, се добива 6 |18 |24 |21 = 7 |10 |6 |1 = 8 |0 |6 |1. Значи, точниот резултат е  2687 · 3 = 8061. Илустративно, овој резултат се добива кога во сите дадени кутии, секоја точка се заменува со три. Па така, бројот на точки во кутиите станува 6 |18 |24 |21. После експлодирањето на точките се добива конечниот резултат 8061.




3.3.2. МНОЖЕЊЕ НА ПОВЕЌЕЦИФРЕНИ БРОЕВИ

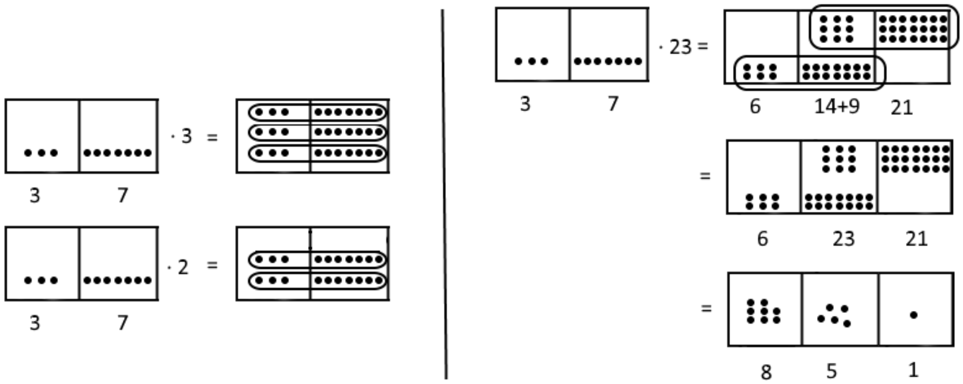
Да видиме како може да се пресмета, на пример, 37 · 23, со точки и со кутии. Значи, треба да множиме три десетки по 23 и седум единици по 23. Ова множење ќе даде резултат 3 · 23 = 69 десетки и 7 · 23 = 161 единици. Одговорот е 69 | 161 според симболочниот запис на точките во кутии. После неколку експлозии се добива бројот 851.

Но, овој пристап изгледа напорен бидејќи се бара да знаете да множите со 23. Ако се размисли малку повеќе околу 37 · 23, може да се развие следниот пристап. Очигледно 37 · 20 = 6 | 14 | 0 и 37 · 3 = 0 | 9 | 21, затоа може да се нацрта долниот дијаграм:



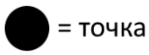

Значи, добивме дека 37 · 23 = 6 | 23 | 21 = 8 | 3 | 21 = 851.

Истиот резултат може да се добие и на малку поинаков начин:

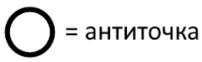



3.3.3. НЕГАТИВНИ БРОЕВИ. ОДЗЕМАЊЕ

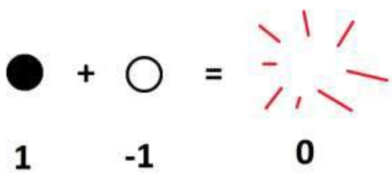
До сега ги објаснивме собирањето и множењето, но го прескокнавме одземањето. Да ја разгледаме машината 1 ← 10. Таму работиме со точки, кои беа нацртани како исполнети точки.



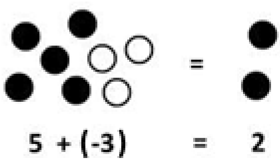

Ќе ја нацртаме спротивната точка како празен круг и ќе ја наречеме антиточка.

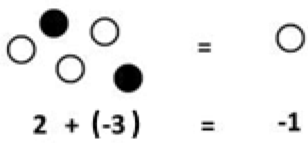



Како материја и антиматерија, или како 1 и -1, кои секогаш се уништуваат еден со друг кога ќе се соберат заедно. Точката и антиточката исто така треба да се уништат, кога ќе се спојат и нема да остават ништо зад себе.

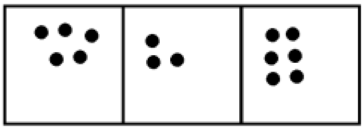



Сега може да се извршат основните аритметички операции со точки и антиточки, исто како што постапувавме порано.

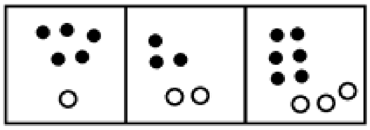


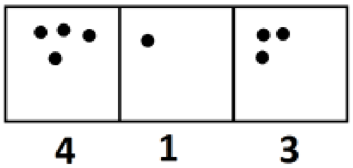
Да ја разгледаме следната задача со одземање, 536 -123.Првиот број, 536, изгледа вака во машината 1 ← 10:



На ова го додаваме спротивното од 123. Односно, додаваме една анти-стотка, две анти-десетки, и три анти-единици.

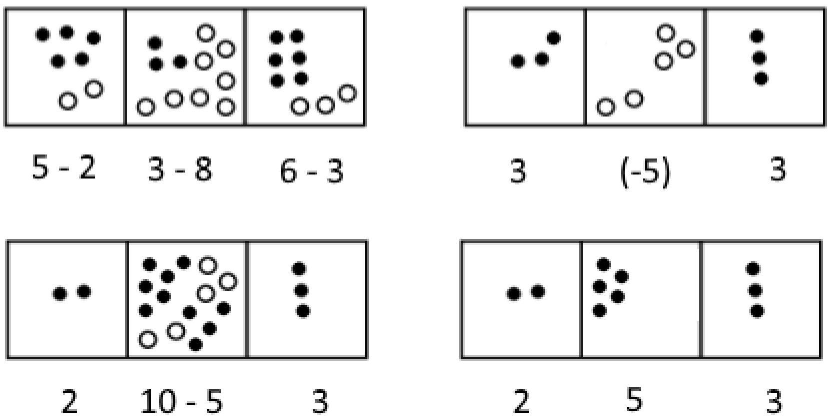


После уништувањата се добива:




Одговорот е 413.

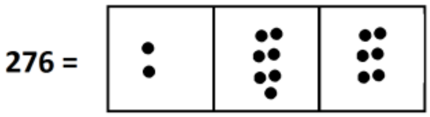
Да дадеме уште еден пример со одземање, 536 – 283. На 536 го додаваме негативното на 283 и ги уништуваме точките и антиточките. Во овој случај добиваме како резултат 3 | (-5) | 3.



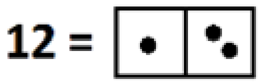

За да го добиеме крајниот резултат, треба да земеме една точка од стотките, која што ќе експлодира во десет точки на десетки. Потоа, по уништувањето на точките и антиточките кај десетките, се добива крајниот резултат 2 | 5 | 3, т.е 253.

3.3.4. ДЕЛЕЊЕ

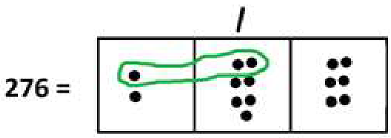
После собирањето, множењето и одземањето, на ред е и делењето. Еве еден пример за задача со делење: Пресметај 276 : 12. Еве слика одбројот 276 во машината 1 ← 10:



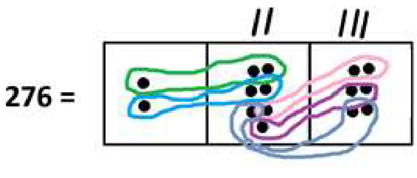

Следно, бараме групи од дванаесет во оваа слика од 276. Еве како изгледа дванаесет:




А, еве како изгледа група од 12 во нашата слика за 276:

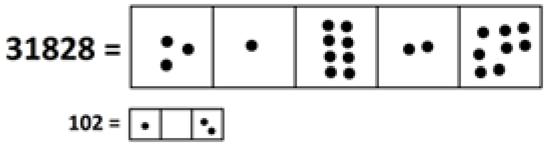



Меѓутоа, има повеќе групи од дванаесет.

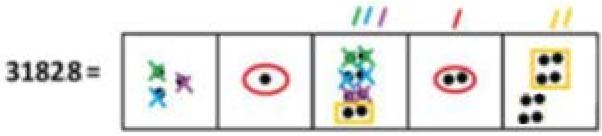



Гледаме вкупно две групи од 12 на ниво на десетки, а три 12 на ниво на единици, па одговорот е 276 : 12 = 23.

Да разгледаме уште еден пример. Да пресметаме 31828 : 102. Еве ја сликата:




Сега бараме групи од една точка - нула - две точки во нашата слика за бројот 31828. Можеме да забележиме неколку од овие групи и некој остаток на крајот, кој не припаѓа на никоја група.

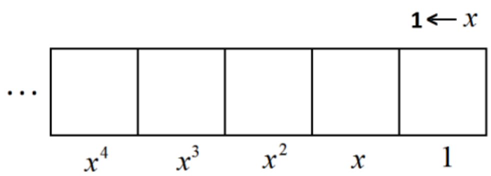



Одговорот е 31828 : 102 = 312 (остаток 4) или 31828 = 312 · 102 + 4.

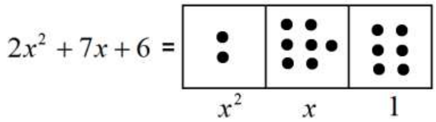
## 3.4. ОПЕРАЦИИ СО АЛГЕБРАСКИ ИЗРАЗИ

Првите поглавја од оваа приказна нè однесоа низ поголем дел од училишната математика. Сега се упатуваме кон напредната алгебра од средно училиште. Единствено што треба да сфатиме е дека нема ништо посебно за машината 1 ← 10. Можевме да ја направиме целата училишна аритметика во машината 1 ← 2 ако сакаме, или 1 ← 5, или дури и во машината 1 ← 37. Математиката не се грижи во која машина го изведуваме сметањето. Единствената причина е човечката предиспози-ција за бројот десет што нè привлекува кон машината 1 ← 10.

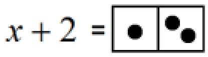
Да ја разгледаме повторно задачата 276 : 12 која претходно ја решивме со помош на машината 1 ← 10. Го добивме одговорот 23. Да ја решиме истата задача со делење во друга база. Може да работиме со 1 ← $x$ машината каде буквата $x$ претставува некој број чија вистинска вредност не ја знаеме. Така, во 1 ← $x$ машината, вредностите на точките во кутиите ќе бидат степените на $x$.



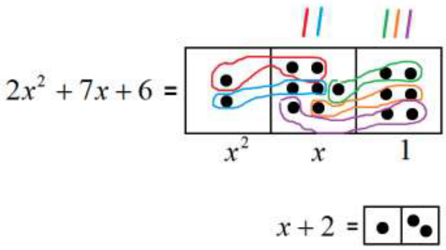
Да пресметаме $(2x^2 + 7x + 6) : (x + 2)$. Еве како изгледа $(2x^2 + 7x + 6)$ во 1 ← x машината. Тоа е два $x^2$ -и, седум $x$ - ови и шест 1-ци.




И еве како изгледа $x + 2$.

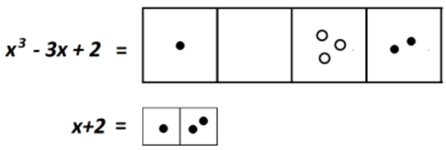



Задачата на делење $(2x^2 + 7x + 6) : (x + 2)$ бара од нас да пронајдеме копии од $x + 2$ на сликата за $2x^2 + 7x + 6$.

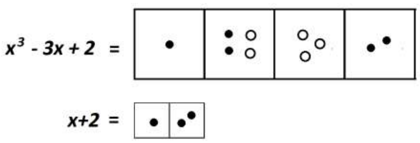



Гледаме две копии од $x + 2$ на нивото $x$ и три копии на нивото 1. Значи, одговорот е $2x + 3$.

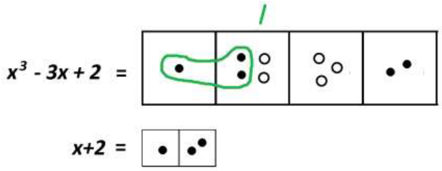
Сега, да го разгледаме следниов пример $(x^3 - 3x + 2) : (x + 2)$. Еве што гледаме во машината 1 ← x.



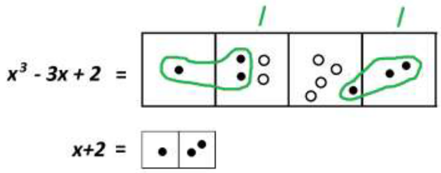

Ние бараме една точка покрај две точки на сликата за $x^3 - 3x + 2$. Погледнете ја единствената точка во најлевото поле.Зарем не би било убаво да има две точки во полето до него за да може да направиме копија од $x + 2$ ? Па, ајде да ставиме две точки во таа празна кутија! Но, постојат последици: тоа поле треба да биде празно. И за да обезбедиме полето да е празно, мора да ставиме и две антиточки!



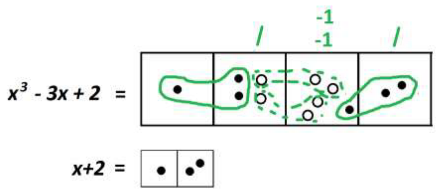
Сега имаме една копија од она што го бараме.




Можете ли да креирате уште една копија од $x + 2$ некаде? Добро е да има една точка лево од парот точки во најдесната кутија. Затоа, во втората кутија вметнуваме еден пар од точка и антиточка. Со тоа наоѓаме друга копија од x + 2.




Постојат и две копии од една антиточка покрај две антиточки (заокружени со испрекинати линии).




Останува да го прочитаме одговорот, па добиваме дека $(x^3 - 3x + 2) : (x + 2) = x^2 - 2x + 1$.

## 4. ВЕБ АПЛИКАЦИЈАТА

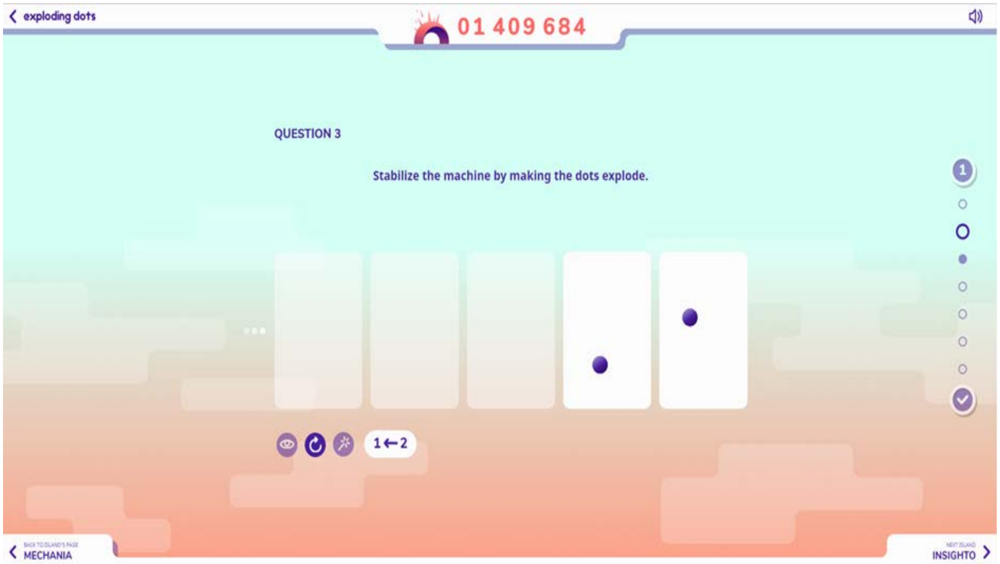
Експлодирачките точки имаат и своја платформа – веб апликација, преку која едукаторите може да комуницираат и да соработуваaат. Веб апликацијата е поделена на девет „острови“ со растечко ниво на тежина и единствени имиња како Механија, Инсајто, Аритмос, Атидотија и така натаму (види Слика 2). Со кликнување на една од иконите, се доаѓа до контролната табла на „островите“.

На контролната табла на „островот“ има приказна, линк до видео каде што се објаснува активноста, поглавје со активности во вид на .pdf

- документи, прирачници за наставници, материјали за ученици и преводи (види Слика 4). Секој „остров“е поделен на станици преку кои постепено се изработува предвидената содржина како и опционални станици за дополнителна работа.

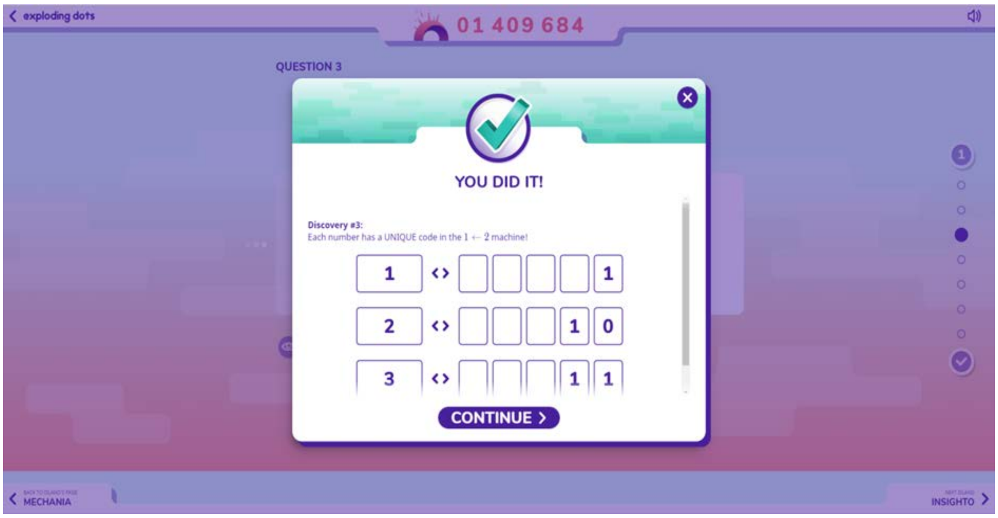

**Слика 4** Почетна страница на островот Механија, [3]

На Слика 5 е прикажан вовед во машината 1 ← 2, каде што учениците можат да поставуваат точки во полињата со кликнување на нив и да ги експлодираат.




**Слика 5** Вовед во машината 1 ← 2 во островот Механија, [3].

Ако ученикот ја заврши активноста точно, му се појавува дијалог прозорецот "Ти успеа" (You did it!), кој го објаснува новото откритие до кое може да се дојде при решавање на задачата (Слика 6).




**Слика 6.** Дијалог прозорецот "Ти успеа" (You did it!) по успешно завршена активност, [3].

Активностите на веб-апликацијата се бесплатни и достапни за секого. Тие можат да се реализираат во секое време без никакви ограничувања.

## 5. ЗАКЛУЧОК

Може да се заклучи дека се работи за многу интереснатна и сериозна иницијатива за популаризација на математика на глобално ниво, која на учениците и наставниците им дава можност да реализираат часови со модерни, современи  и интересантни математички содржини. Исто така треба да се истакне дека инвестицијата во време и ресурси потребна за успешна реализација на настан во рамки на ГНМ е скромна.

Иако имаше заинтересирани наставници од целата земја за реализација на локални настани, англискиот јазик се покажа како главна бариера. Би било убаво повеќе наставници да аплицираат како амбасадори и да се направи некоја активност за заедничко преведување на материјалите за 2018 година. Ако се преведат релевантните материјали од англиски на македонскии и албански јазик, тогаш оваа година може да се очекува уште поголем одзив и успех.

ЛИТЕРАТУРА

[1] J.Tanton, *The Global Math Project: Uplifting mathematics for All*, January 17, 2018.

[2] J. Tanton, B. Donaldson, *The Global Math Project: Uplifting Mathematics for All*, Notices of the AMS,Volume 64, Number 7, August 2017, 712-716.

[3] The Exploding Dots Experience – The Global Math Project https://www.explodingdots.org/

[4] The Global Math Project https://www.globalmathproject.org/

[5] Code.org https://code.org/learn

[1] Центар за математичка едукација „Гаус“,
Ул. 19 Ноември, лок.33, 1200 Тетово, Р. Македонија
*e-mail*: admir@gauss-school.com

Примен: 01. 03. 2018
Поправен: 10. 08. 2018
Одобрен: 05. 09. 2018

Објавен на интернет: 24.09.2018