МАТЕМАТИЧКИ ОМНИБУС, 9 (2021), 177 – 189
http://im-pmf.weebly.com/matematicki-omnibus-kniga-9.html

НЕТРАНЗИТИВНИ КОЦКИ

Ерблина Зеќири [1]

1. ВОВЕД

Ако Аце е повисок од Бојан и Бојан е повисок од Цветан, може да заклучиме дека Аце е повисок од Цветан. Овој факт доаѓа од тоа што релацијата „е повисок од" е транзитивна релација. Значи, ако првиот елемент е во релација со вториот и вториот е во релација со третиот, тогаш следува дека првиот елемент е во релација со третиот. Многу други релации се исто така транзитивни, на пример: „е поголемо од", „е помало од", „е изоморфен со", „е еднакво со", итн. Секако, ако сите релации беа транзитивни, транзитивноста немаше да биде интересно својство за изучување. Постојат и релаци коишто не се транзитивни: на пример: „не е делител на" не е транзитивна релација затоа тоа што 3 не е делител на 5, 5 не е делител на 12, но оттука не следува дека 3 не е делител на 12. Има голем број на приказни за шаховски мајстори коишто можат да победат секого во шах, освен некои одредени непријатели. И тие непријатели се најчесто играчи коишто не се најдобри или губат од други играчи коишто шаховските мајстори ги победуваат. Значи имаме случај каде што A (мајсторот) го победува B, потоа B го победува C (некој играч што не е играчот A), но C го победува A (мајсторот).

Ќе разгледаме една игра меѓу двајца играчи со три коцки. Секој играч избира една коцка и ја фрла, а потоа се разгледува паднатиот број на коцката. Играчот на чија коцка паднал поголем број победува. Коцките се специјално направени и на секоја страна на коцките е напишан еден број. Интересно е што оваа игра која на прв поглед изгледа доста фер (т.е. двата играчи имаат подеднакви шанси за победа, т.е. еднакви веројатности за победа), може да се направи така да по изборот на коцка од страна на првиот играч, вториот играч секогаш да може да избере коцка со која би имал поголема веројатност за победа над првиот играч. Ваквите коцки всушност ги нарекуваме нетранзитивни коцки.

Нетранзитивните коцки се фасцинантна тема во применетата веројатност. Тие за прв пат доаѓаат во центарот на вниманието како резултат на трудот на Мартин Гарднер ([5]) и претставуваат еден проблем од поголемата класа на нетранзитивни „парадокси“, кои го вклучуваат и добро познатиот Кондорсов парадокс на гласање [7].

2. ПРИМЕРИ ЗА НЕТРАНЗИТИВНИ КОЦКИ

Постојат различни видови нетранзитивни коцки. Во овој дел ќе наведеме неколку карактеристчни примери за нетранзитивни коцки и ќе ги разгледаме нивните својства.

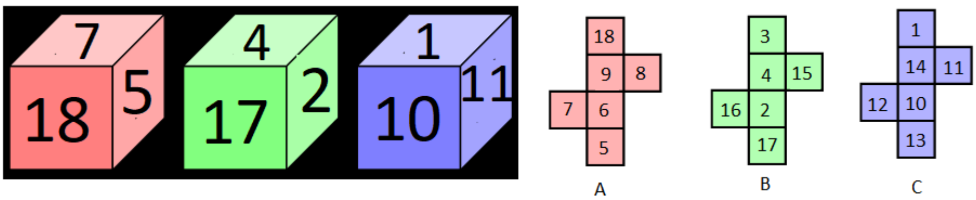
2.1 КОЦКИ СО БРОЕВИТЕ ОД 1 ДО 18

Да претпоставиме дека двајца пријатели ја играат следната игра, [6]. Дадени се три 6-страни коцки (црвена, зелена и сина) на чиишто страни се напишани броевите од 1 до 18. Првиот играч избира една коцка од трите дадени коцки, а по него избира и вториот играч. Тие ги фрлат коцките и го забележуваат паднатиот број. Играчот на чија коцка е паднат поголем број победува и добива еден бод. Ја повторуваат играта неколку пати, да речеме 20 пати. И на крај забележуваат кој има повеќе бодови, тој победува. Броевите од 1 до 18 се запишани на коцките на следниот начин:

ЦРВЕНА (A): 18, 9, 8, 7, 6, 5

ЗЕЛЕНА (B): 17, 16, 15,4,3,2

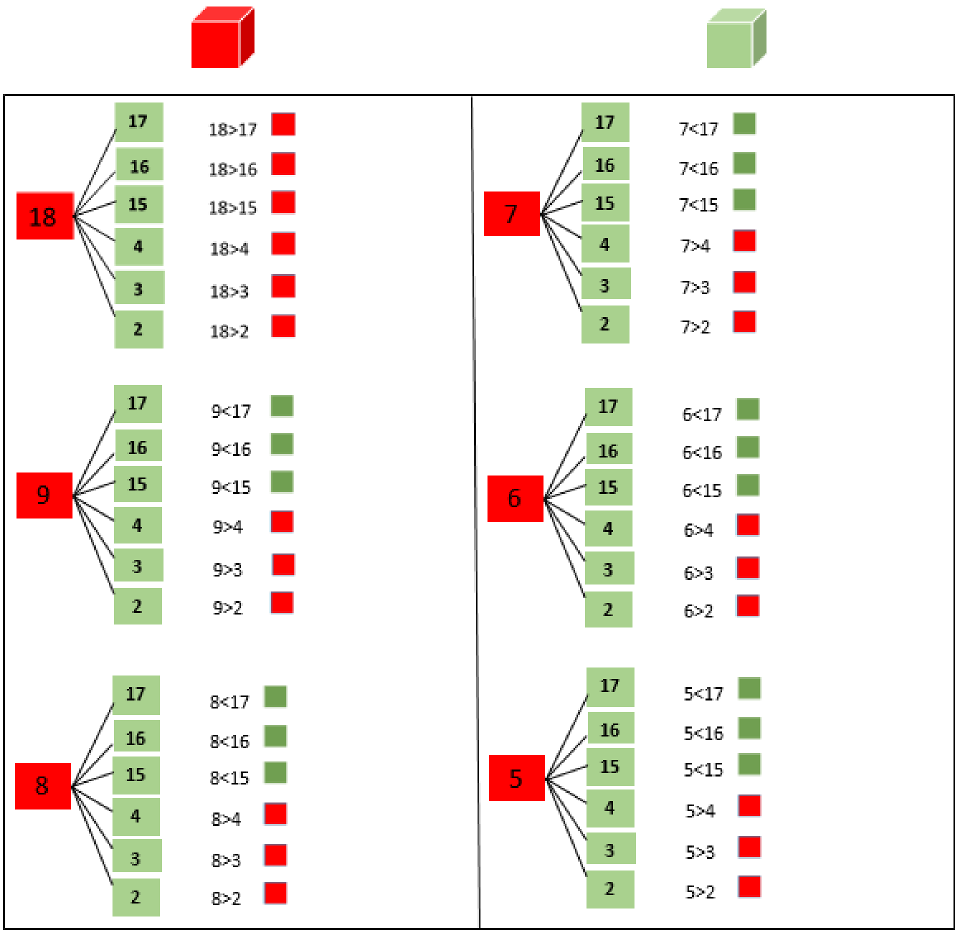
СИНА (C): 14,13,12,11,10,1



Слика 1. Три нетранзитивни коцки и нивните мрежи.

Оваа игра не е фер, иако можеби изгледа дека е фер. Имено, ако првиот играч избере една коцка, тогаш вториот секогаш може да избере „подобра коцка“, т. е. коцка со поголема веројатност за победа во играта.

Ќе покажеме дека веројатноста да се појави поголем број на коцката А (црвената коцка) отколку на коцката В (зелената коцка) е поголема од $\frac{1}{2}$, т. е. $P(A>B)>\frac{1}{2}$, а со тоа играчот кој ја одбрал коцката А има поголема веројатност за победа, отколку играчот што ја одбрал коцката В.



Слика 2. Веројатноста дека $P(A>B)>\frac{1}{2}$, [8].

Од Слика 2 забележуваме дека црвената коцка победува во 21 од вкупно 36 можни случаи т.е. $P(A>B)=\frac{(6+3+3+3+3+3)}{36}=\frac{21}{36}>\frac{1}{2}$.

Слично се добива и дека $P(B>C)>\frac{1}{2}$ и $P(C>A)>\frac{1}{2}$. Имено,

$$P(B > C) = \frac{(6+6+6+1+1+1)}{36} = \frac{21}{36} > \frac{1}{2} \text{ и}$$

$$P(C > A) = \frac{(5+5+5+5+5+0)}{36} = \frac{25}{36} > \frac{1}{2}.$$

Значи коцката А е „подобра“ од коцката В, коцката В е „подобра“ од коцката С и тоа со веројатност поголема од $\frac{1}{2}$. Но, коцката А не е „подобра“ од коцката С. За овие коцки не важи транзитивноста на оваа релација. Затоа, овие коцки ги нарекуваме нетранзитивни коцки.

Во горниот пример, која било коцка да ја избере противникот ние секогаш можеме да избереме коцка од останатите две за да имаме поголема веројатност за победа од него. На пример, ако противникот ја избере црвената коцка (А), ние ќе ја избереме сината коцка (С) и на овој начин веројатноста да победиме е $\frac{25}{36}$.

Нетранзитивните коцки спаѓаат во општата категорија на нетранзитивни парадокси. Најпознатиот нетранзитивен парадокс е „парадоксот на гласање“ кој за прв пат бил проучуван од Кондорс. Овој парадокс покажува дека ако три кандидати А, В и С конкурираат за една позиција, тогаш постои група гласачи кои го сакаат кандидатот А повеќе од В, го сакаат кандидатот В повеќе од С и го сакаат кандидатот С повеќе од А, [8]. Друг познат парадокс што ќе го објасниме во следниот дел е парадоксот на Штајнхаус-Трибула.

2.2 КОЦКИ НА ШТАЈНХАУС-ТРИБУЛА

Повторно ќе разгледаме една едноставна игра со двајца играчи (но, како што ќе видиме подоцна, не е толку забавна за еден од играчите). Играта се игра со три шестстрани коцки X, Y, Z чии страни се означени на следниот необичен начин, [4].

Двајца играчи, играчот U и играчот I ја играат следната игра. Секој играч избира различна коцка и ја фрла – играчот со поголема вредност на коцката е победник. Играчот I му дава предност на играчот U прв да избере една од која било од трите коцки.

Коцка	Броевите означени на страните на коцката					
X	1	1	4	4	4	4
Y	3	3	3	3	3	3
Z	2	2	2	2	5	5

Табела 1. Коцките од парадоксот на Штајнхаус-Трибула.

Да речеме дека U ја избира коцката X. По малку размислување, играчот I ја избира коцката Z, а потоа и двајцата играчи ги фрлаат своите коцки. Кои се можностите? Бидејќи и двете коцки имаат по 6 страни, имаме вкупно 6×6=36 можности, но поради повторувањата на броевите на страните на коцките, многу од овие исходи не се разликуваат. Во следната Табела 2, во првата колона се вредностите на шесте страни на коцката X, а во првата редица се вредностите на страните на коцката Z. Во табелата пишуваме X ако вредноста на коцката X во таа редица е поголема од вредноста на коцката Z во таа колона и обратно, пишуваме Z, ако вредноста на коцката Z во таа колона е поголема од вредноста на коцката X во таа редица. Ја добиваме табелата:

	2	2	2	2	5	5
1	Z	Z	Z	Z	Z	Z
1	Z	Z	Z	Z	Z	Z
4	X	X	X	X	Z	Z
4	X	X	X	X	Z	Z
4	X	X	X	X	Z	Z
4	X	X	X	X	Z	Z

Табела 2. Пример на игра.

Во табелата гледаме дека 20 пати се јавува буквата Z од вкупно 36 можни полиња, односно коцката Z победува во 20 од вкупно 36 можности. Добиваме дека веројатноста коцката Z да ја победи коцката X е $P(Z > X) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$. На сличен начин добиваме дека $P(X > Y) = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$ и $P(Y > Z) = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$. Ова навидум невозможно сценарио е *парадоксот на Штајнхаус-Трибула*:

„*Постојат три независни случајни променливи X, Y, Z така што секоја од веројатностите* $P(X>Y), P(Y>Z), P(Z>X)$ *е поголема од една половина.*“

Парадоксот може да се толкува и на многу други начини. На пример, може да се користи за објаснување на различни ситуации во натпреварувачките спортови и игри каде што еден тим (или играч) има добар резултат за победа против вториот тим, кој пак има добар победнички резултат против трет тим, кој пак има победнички резултат против првиот тим.

Или, на пример, нека три автобуси (да речеме, A, B и C) минуваат покрај одредена автобуска постојка секој ден во исто време. Парадоксот Штајнхаус-Трибула покажува дека поверојатно е автобусот A да пристигне на автобуската постојка пред автобусот B, а автобусот B е поверојатно да пристигне пред автобусот C, додека автобусот C е поверојатно да пристигне пред автобусот A.

За да се наведат други примери, корисно е да има коцки со повеќе страни, не само со 6. Под коцка со n страни (или n-страна коцка) мислиме на некој предмет со n страни и кој може да се фрли (или врти) на рамна површина така што во положба на мирување, точно една од n-те страни лежи на рамната површина и секоја од n-те различни вредности подеднакво веројатно може да се падне да лежи на рамната површина.

Во стандардните шестстрани коцки коцки ја читаме вредноста од страната свртена нагоре, но за нестандардните коцки со повеќе страни може да не постои таква страна. Во таков случај ја читаме вредноста на страната што лежи на рамната површина.

Оригиналното истражување на парадоксот на Штајнхаус-Трибула воопшто не спомнува коцки, туку целото истражување се однесува на случајни променливи. Во нивните статии се спомнуваат три случајни променливи X, Y и Z за кои е исполнето дека секоја од веројатностите $P(X>Y)$, $P(Y>Z)$ и $P(Z>X)$ е поголема од $1/2$.

Еден интересен резултат е дека барем една од овие веројатности мора да биде најмногу $\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0,61803\ldots$, што е таканаречениот златен пресек (golden ratio), [3]. Златниот пресек е сеприсутна математичка константа која се појавува како граница на низата $\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{5},\frac{5}{8},\frac{8}{13},\ldots$ каде што броевите $1,1,2,3,5,8,13,21,\ldots$ се членови на низата на Фибоначи, но и како верижна дропка $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}$.

Теорема 1. ([6]) Нека броевите $1,2,\ldots,3n$ се наредени на n-страните коцки A, B и C. Тогаш барем една од веројатностите $P(A>B)$, $P(B>C)$ или $P(C>A)$ е помала од $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Доказ: Ќе ги поставиме броевите на n-страните коцки на систематски начин. Прво ставаме еден или повеќе од најголемите броеви на коцката А. Во следниот чекор се ставаат најголемите броеви што останале (еден или повеќе) на коцката В. Потоа се преминува на коцката С и се ставаат најголемите броеви што останале на коцката С. Во наредните чекори се враќаме пак на коцката А. Ја продолжуваме постапката сè додека не се стават сите броеви. Ја формираме низата $x_1,x_2,\ldots,x_{3k}$ каде што x_1 е бројот на броеви ставени на коцката А во првиот круг, x_2 е бројот на броеви ставени на коцката В во првиот круг, x_3 е бројот на броеви ставени на коцката С во првиот круг, x_4 бројот на броеви ставени на коцката А во вториот круг и така натаму.

Во примерот од 2.1 може лесно да се провери дека $x_1=1, x_2=3$, $x_3=5, x_4=5, x_5=3, x_6=1$.

Забележуваме дека низата $x_1,x_2,\ldots,x_{3k}$ ги има следните својства:

i) $$\sum_{i=1}^{k} x_{3i}=\sum_{i=1}^{k} x_{3i-1}=\sum_{i=1}^{k} x_{3i-2}=n; \qquad (1)$$

ii) Броевите x_i се ненегативни цели броеви. (2)

Додека бараните веројатности $P(A>B), P(B>C)$ и $P(C>A)$ се дадени со:

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{k} x_{3i-2}\left(\sum_{j\geq i} x_{3j-1}\right), \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{k} x_{3i-1}\left(\sum_{j\geq i} x_{3j}\right), \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{k} x_{3i}\left(\sum_{j\geq i} x_{3j+1}\right), \qquad (3)$$

соодветно. Да претпоставиме дека низата $\{x_i\}$ е низа од ненегативни реални броеви наместо само ненегативни цели броеви. Со тоа веројатностите во (3) се непрекинати функции по променливите x_i и затоа ако ја дефинираме функцијata F да биде минимумот од трите веројатности, тогаш F е непрекината функција:

$$F\left(\{x_i\}\right) = \min\left\{\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{k} x_{3i-2}\left(\sum_{j\geq i} x_{3j-1}\right), \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{k} x_{3i-1}\left(\sum_{j\geq i} x_{3j}\right), \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{k} x_{3i}\left(\sum_{j\geq i} x_{3j+1}\right)\right\}$$

Од тоа што F е дефинирана на компактно множество, F мора да достигне максимум на тоа множество. За $x_j \neq 0$, но $x_m = 0$, кога $m > j$, ќе покажеме дека должината на низата е j. Нека со α го означиме бројот $\alpha = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. Доказот на Теорема 1 ќе го поделиме во три чекори.

Чекор 1. Покажуваме дека ако $\{x_i\}$ е низа со должина поголема или еднаква на 6, тогаш постои низа $\{z_i\}$ со иста должина во која еден од членовите е нула и за која секоја од веројатностите во (3) е барем толку голема како за низата $\{x_i\}$ т.е. $F(\{z_i\}) \geq F(\{x_i\})$.

Чекор 2. Покажуваме дека од низа во која еден член е нула може да се конструира нова низа која е пократка и за која минимумот на веројатностите во (3) е најмалку еднаков на минимумот на веројатностите за оригиналната низа.

Чекор 3. Ако се комбинираат чекорите 1 и 2 добиваме дека за да ги максимизираме веројатностите што ни се потребни, доволно е да земаме само низи чија должина е помала или еднаква на 5. Овој максимум се пресметува во овој чекор покажувајќи дека броевите $x_1 = \alpha^2 n$, $x_2 = \alpha n,\ x_3 = n,\ x_4 = \alpha n,\ x_5 = \alpha^2 n$ го максимизираат F.

Доказ на чекор 1*:* Да забележиме дека со повторно означување на броевите на коцките, доколку е потребно, може да претпоставиме дека $x_1 \neq 0$ и $x_2 \neq 0$. Ако некој $x_m = 0$ за $m \geq 3$, при што m е помал од должината на низата, тогаш може да продолжиме на чекор 2. Ако не, ќе најдеме нова низа за која некој член е нула. За да ја добиеме саканата низа $\{z_i\}$ само ќе ги смениме првите 6 члена од низата $\{x_i\}$. Затоа, ако

$i \geq 7$, дефинираме $x_i = z_i$. Дефинираме $z_3 = \lambda x_3$, каде што $\lambda > 0$. Од (1) следува дека мора $z_6 = x_6 + (1-\lambda)x_3$. Го избираме z_4 така што третата веројатност од веројатностите во (3) е непроменета. Лесно се проверува дека $z_4 = \frac{1}{\lambda}x_4$. Потоа, од (1) повторно мора да имаме $z_1 = x_1 + \left(1-\frac{1}{\lambda}\right)x_4$. Исто така сакаме првата веројатност во (3) да биде непроменета. По кратка пресметка добиваме $z_2 = \lambda x_2$ и затоа $z_5 = x_5 + (1-\lambda)x_2$. Добивме дека првата и третата веројатност се исти како за низата $\{x_i\}$ така и за низата $\{z_i\}$. Сега, споредувајќи ја втората од веројатностите во (3), за низата $\{z_i\}$ со онаа за $\{x_i\}$ добиваме:

$$\sum_{i=1}^{k} z_{3i-1}\left(\sum_{j\geq i} z_{3j}\right) - \sum_{i=1}^{k} x_{3i-1}\left(\sum_{j\geq i} x_{3j}\right) = (z_2 - x_2)n + z_5(n-z_3) - x_5(n-x_3)$$

$$= x_3x_5 - \lambda x_3\left[\left(1-\lambda\right)x_2 + x_5\right] = (1-\lambda)x_3(x_5 - \lambda x_2) \qquad (4)$$

Ако $x_2 \geq x_5$, тогаш изразот во (4) се зголемува по λ, за $\lambda \geq 1$. Оттука, со соодветно избирање на λ, можеме да формираме низа од ненегативни реални броеви таква што или $z_5 = 0$ или $z_6 = 0$ и за кои $F\left(\{z_i\}\right) \geq F\left(\{x_i\}\right)$.

Од друга страна, ако $x_2 < x_5$, тогаш изразот (4) се намалува за $\lambda < 1$. Избираме λ така што $z_1 = 0$. Повторно имаме $F\left(\{z_i\}\right) \geq F\left(\{x_i\}\right)$.

Доказ на чекор 2*:* Ако $x_2 < x_5$ така што $z_1 = 0$, тогаш тривијално е дека низата $\{y_i\}$ дефинирана со $y_i = z_{i+1}$ е пократка и ги има истите веројатности. Во другиот случај имаме $z_m = 0$ за $m \geq 3$. Ако должината на првичната низа беше 6 и $m = 6$, ја најдовме нашата барана низа. Ако не, дефинираме нова низа $\{y_i\}$ со $y_j = z_j$ ако $j < m-2$, $y_{m-2} = z_{m-2} + z_{m+1}$, $y_{m-1} = z_{m-1} + z_{m+2}$, $y_m = z_m + z_{m+3}$ и $y_j = z_{j+3}$ ако $j > m$. Може да се провери дека два од трите збирови во дефиницијата за F се исти за $\{z_i\}$ како и за $\{y_i\}$. Збирот што вклучува $y_{m-2}y_{m-1} = (z_{m-2} + z_{m+1})(z_{m-1} + z_{m+2})$ има дополнителен член $z_{m+1}z_{m-1}$, па е поголем или еднаков од збирот за

$\{z_i\}$. Значи, во овој случај добиваме низа $\{y_i\}$ пократка од $\{x_i\}$ со $F(\{y_i\}) \geq F(\{x_i\})$. Како илустрација на оваа идеја, нека $\{x_i\}$ е низа со $x_3 = 0$ и ја формира низата $x_1 + x_4, x_2 + x_5, x_6, x_7, \ldots$ Очигледно, веројатноста дека A го победува B е зголемена додека другите веројатности се непроменети.

Доказ на чекор 3: Трите изрази што се разгледуваат во овој чекор се $\left[x_1 n + (n - x_1)(n - x_2)\right]/n^2$, x_2/n, $(n - x_1)/n$. Првиот израз е растечка функција како функција од x_1 додека третиот е опаѓачка. Од друга страна првиот израз е опаѓачка функција како функција од x_2 додека вториот е растечка. Така, за низа што го максимизира F, трите изрази мора да бидат еднакви бидејќи ако не беа, може да го зголемиме најмалиот (или двата помали изрази) и притоа ќе се намали поголемиот. Поставувајќи еднаквост меѓу трите изрази се добива $x_2 = n - x_1$, и по соодветни алгебарски трансформации добиваме дека $x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} n = \alpha^2 n$ и $x_2 = \alpha n$. Формулите за x_4 и x_5 се добиваат аналогно.

Забелешка. Доказот на теоремата за m n-страни коцки се изведува аналогно. На пример, во чекор 3, низите што треба да се разгледаат се со должина од $2m - 1$.

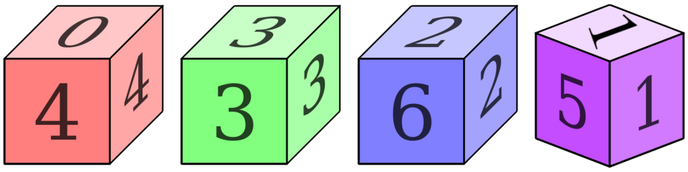
2.3 КОЦКИТЕ НА ЕФРОН

Во овој дел ќе разгледаме уште еден карактеристичен вид нетранзитивни коцки, таканаречени балансирани коцки.

Дефиниција. Нека $X_1, X_2, \ldots, X_n$ се n нетранзитивни коцки. Една група од n нетранзитивни коцки се нарекува *балансирана* ако $P(X_1 > X_2) = P(X_2 > X_3) = \cdots = P(X_n > X_1)$.

Еден пример на балансирани нетранзитивни коцки се коцките на Ефрон, именувани по Бредли Ефрон, човекот кој ги открил, [2]. Коцките на Ефрон се група од 4 шестстрани коцки на кои се напишани броевите 0,1,2,3,4,5,6 на следниот начин:

Црвена (A):	0 0 4 4 4 4	Зелена (B):	3 3 3 3 3 3
Сина (C):	2 2 2 2 6 6	Виолетова (D):	1 1 1 5 5 5



Слика 3. Коцките на Ефрон.

Резултатот од коцките на Ефрон е парадоксален циклус, токму заради тоа што:

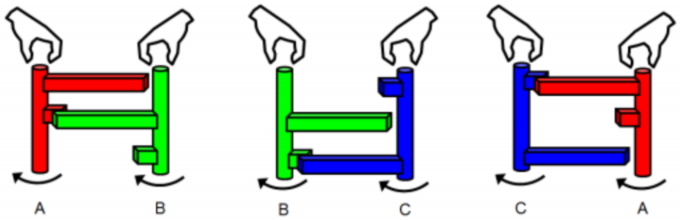
- Коцката A ја победува коцката B со веројатност $P(A > B) = \frac{2}{3}$.
- Коцката B ја победува коцката C со веројатност $P(B > C) = \frac{2}{3}$.
- Коцката C ја победува коцката D со веројатност $P(C > D) = \frac{2}{3}$.
- Коцката D ја победува коцката A со веројатност $P(D > A) = \frac{2}{3}$.

Значи, сите веројатности се еднакви, па коцките на Ефрон се балансирани нетранзитивни коцки.

3. ПРИМЕНА НА НЕТРАНЗИТИВНОСТА

Постојат и многу други примери на нетранзитивни коцки и примена на нетранзитивноста во секојдневниот живот. Како илустрација за крај ќе го наведеме следниот пример да видиме каде може да се користи нетранзитивноста освен кај нетранзитивни коцки, [1].

Три вертикални стапчиња се фиксираат во земја така да можат да се вртат околу фиксирана точка и имаат по 2 хоризонтални стапчиња на нив со различни должини (види слика 4). Стапчињата се со различни бои и оваа игра се игра со двајца играчи така што првиот играч избира еден стап, а потоа и вториот играч избира стап и стапчињата се ставаат во земја блиску едно до друго за да хоризонталните стапчиња можат да се допираат. Победник на играта е играчот кој ќе успее да го помести стапчето на противникот.



Слика 4. Трите стапчиња потребни за играта.

Конкретно, на сликата 4 играчот кој го избрал стапчето А ќе го победи играчот со стапчето В, заради тоа што должината на вертикалниот дел од стапот до првиот хоризонтален стап во кој се допираат е пократка во стапот А отколку во стапот В и на тој начин поголема сила се пренесува во стапчето А па стапчето А ќе го помести стапчето В и така играчот кој игра со стапот А ќе го победи играчот кој игра со стапот В. Аналогно, од исти причини играчот со стапот В ќе го победи играчот со стапот С и играчот со стапот С ќе го победи играчот со стапот А.

Значи, без разлика кој стап го избира првиот играч, противникот секогаш може да избере стап со кој ќе го победи првиот играч.

Последниот пример покажува дека нетранзитивноста може да се примени и во механиката. Останува отворено прашањето дали може нетранзитивноста како својство да се користи и во други области.

ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Poddiakov, *Intransitive Machines,* National Research University Higher School of Economics. https://arxiv.org/abs/1809.03869

[2] B. Conrey, *Intransitive Dice,* Mathematics Magazine, 2016. https://aimath.org/~kaur/publications/89.pdf

[3] D. J. Butler, *Predictably Intransitive Preferences*, Judgment and Decision Making, Vol.13, No.3 (2018), 217–236. http://journal.sjdm.org/17/17912b/jdm17912b.html

[4] M. Jackson, *Paradoxes with dice and elections*, La Trobe University,
https://w.mav.vic.edu.au/files/conferences/2004/Jackson.pdf

[5] M. Gardner, *Wheels, life, and other mathematical amusements,* (40-50).
https://bobson.ludost.net/copycrime/mgardner/gardner10.pdf

[6] R. P. Savage, *The Paradox of Nontransitive Dice*, The American Mathematical Monthly 101 (1994), 429-436.

[7] William V. Gehrlein, *Condorcet's Paradox and the Condorcet Efficiency of Voting Rules,* Mathematica Japonica 45, No 1 (1997) 173–199.

[8] *Intransitive Dice*, Data Genetics.
https://datagenetics.com/blog/july12012/index.html

[1] Универзитет "Св. Кирил и Методиј", Скопје
Природно-математички факултет,
Институт за математика
Архимедова 3, 1000 Скопје, Р. Северна Македонија
e-mail: erblina_zeqiri@hotmail.com

Примен: 9.2.2022
Поправен: 28.2.2022
Одобрен: 3.3.2022
Објавен на интернет: 11.3.2022