МАТЕМАТИЧКИ ОМНИБУС, 9 (2021), 191 – 206
http://im-pmf.weebly.com/matematicki-omnibus-kniga-9.html

ЗАДАЧА НА НАЈДОБАР ИЗБОР И ОПТИМАЛНО ЗАПИРАЊЕ

Ирена Стојковска [1]

При барањето соодветен кандидат за работното место, најдобро паркинг место, идеален стан за живеење, па дури и животен партнер од соништата, се соочуваме со последователно носење одлуки. Во секој чекор треба да одлучиме дали да ја запреме потрагата и да го направиме изборот или да ризикуваме да продолжиме со барањето во надеж дека ќе направиме подобар избор. Математичкиот пристап кој го решава овој вид проблеми е познат како оптимално запирање. Проблемите на оптимално запирање се среќаваат и во статистиката при тестирање хипотези и оценување параметри, во операционите истражувања при замена на машина, нарачка на стоки, во економијата при потрага на високо платени работни места или намирници со ниски цени, на финансиските пазари при тргувањето со акции, итн. ([4]).

Во овој труд, ќе го илустрираме оптималното запирање на познати примери од таа област и ќе дадеме преглед на некои резултати од теоријата на оптимално запирање.

1. ПРОБЛЕМИ НА НАЈДОБАР ИЗБОР

Претпоставете дека треба да одберете стан за изнајмување или уште подобро стан за постојано живеење. Сигурно нема да го одберете првиот слободен стан за изнајмување, односно купување и сигурно веќе имате изградено одреден критериум за пребарување според местоположбата, големината или цената. Но, и покрај добро утврдениот критериум и покрај тоа што можеби веќе сте нашле стан кој ги задоволува вашите барања, сепак вие ја продолжувате потрагата со надеж дека ќе најдете уште подобар стан. Многу веројатно во текот на барањето вашите критериуми да се смениле, ослабнале или зајакнале. При тоа, при секое одбивање на стан, преземате ризик дека веќе видениот стан можеби нема да е слободен во иднина, ако некогаш во иднината се одлучите за него. Имено, во текот на вашата потрага, при секое разгледување на стан, вие носите последователни одлуки, одлучувате дали да го земете станот или да продолжите со барањето. Всушност во вашата намера да ги максимизирате шансите за наоѓање на најдобар стан, одлуката нема да се состои во тоа кој стан да го одберете, туку колку станови да разгледате пред да ја донесете одлуката, базирана на дотогаш изградениот критериум. Ова е пример на *проблем на оптимално запирање*.

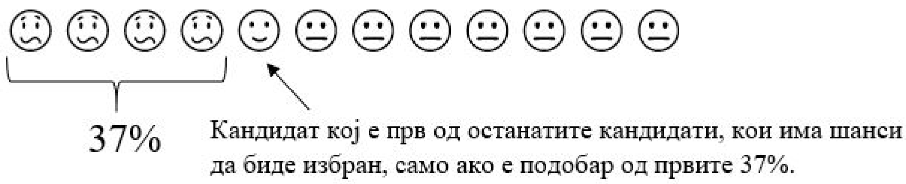
Друг секојдневен проблем со кој се соочуваат возачите е барањето на паркинг место. Влегувате на паркингот и потрагата почнува. На почетокот, на делот од паркингот кој е далеку од влезот на зградата, има слободни места, но како што се приближувате кон влезот на зградата, нивниот број се намалува. И на крај ги снемува. Вие секако, сакате да паркирате што е можно поблиску до влезот на зградата. Затоа, треба да одлучите колку круга да свртите околу паркингот пред да го одберете паркинг местото со најголеми шанси дека е најдобро.

При решавањето проблеми од ваков тип, повеќето од луѓето интуитивно ќе одговорат дека треба да се биде одмерено пребирлив, односно да се погледаат доволен број станови за да се оформи критериумот, а потоа да се одбере станот кој ги задоволува поставените стандарди. Или, пак, во зависност од степенот на зафатеност на паркингот, да се почне со барање на слободно место дури по одреден број на поминати празни места. Интересно е што тој одреден број е измерлив број и изнесува 37%, [9].

2. ПРАВИЛОТО НА 37%

Да претпоставиме дека го знаете бројот на станови кои се моментално достапни на пазарот, односно позната ви е зафатеноста на паркингот, т.е. вкупниот број слободни места за паркирање. Според правилото на 37%, треба да разгледате 37% од достапните станови, а потоа да го одберете првиот стан кој е подобар од разгледаните станови. Во случајот со места за паркирање, треба да поминете 37% од слободните места и да паркирате на првото слободно место на кое ќе наидете (Слика 1).

Да забележиме дека, овој начин не гарантира дека сте го избрале најдобриот стан, односно најблиското паркинг место до влезот на зградата, туку дека сте ја максимизирале веројатноста да го направите најдобриот избор, што од своја страна може да биде задоволителен резултат и да ве зачува од понатамошно трошење на времето во пребарување. Правилото на 37% ќе го покажеме во следниот дел.



Слика 1. Правилото на 37%.

2.1. ЗАДАЧАТА НА НАЈДОБАР ИЗБОР НА СЕКРЕТАРКА

Ќе разгледаме модел на проблемот кој најчесто се среќава во литературата кога се објаснува правилото на 37%, т.е. *задачата за најдобар избор на секретарка* (Secretary Problem), [3].

Задачата за најдобар избор на секретарка во нејзиниот наједноставен облик се состои од следните претпоставки:

1. Постои само едно слободно работно место за секретарка.
2. Познат е бројот n на кандидати за тоа работно место.
3. Кандидатите се интервјуираат еден по еден по случаен редослед, со еднакви шанси за избор на секој од случајните редоследи.
4. Претпоставуваме дека постои начин за рангирање на секој од кандидатите од најлош до најдобар. Одлуката за прием на кадидатот се прави во однос на рангирањата на веќе интервјуираните кандидати.
5. Еднаш одбиен кандидат не може повторно да биде повикан.
6. Целта е да се одбере најдобриот кандидат.

Стратегијата за решавање на овој проблем е следната: се одбиваат првите $(r-1)$ кандидати, а потоа се избира првиот кандидат кој е најдобар во однос на веќе интервјуираните и одбиени $(r-1)$ кандидати и процесот на интервјуирање завршува. Ако таков кандидат нема, тогаш се избира последно интервјуираниот n-ти кандидат. Да ја најдеме вредноста на $r\,(r \geq 1)$ за која веројатноста $\phi_n(r)$ за избор на најдобриот кандидат од сите n кандидати, кога сме ги одбиле првите $(r-1)$ кандидати е најголема. Да ја пресметаме веројатноста $\phi_n(r)$.

За $r=1$, имаме дека $\phi_n(r)=1/n$, а за $r>1$ имаме дека

$$\begin{aligned}\phi_n(r) &= \sum_{j=r}^{n} P\begin{pmatrix} j-\text{тиот кандидат е најдобар} \\ \text{и ние го избираме} \end{pmatrix} = \\ &= \sum_{j=r}^{n} \frac{1}{n}\cdot\frac{r-1}{j-1} = \frac{r-1}{n}\sum_{j=r}^{n}\frac{1}{j-1}.\end{aligned}$$

Имено, ако дефинираме настани A_j – j-тиот кандидат е најдобар и настан B_j – избран е j-тиот кандидат, тогаш од теоремата за множење на веројатности имаме:

$$P\begin{pmatrix} j-\text{тиот кандидат е најдобар} \\ \text{и ние го избираме} \end{pmatrix} = P(A_jB_j) = P(A_j)P(B_j \mid A_j).$$

Веројатноста j-тиот кандидат да е најдобар е $P(A_j)=1/n$, а условната веројатност да го избереме j-тиот кандидат, при услов тој да е најдобар е еднаква со веројатноста да најдобро рангираниот кандидат од првите $(j-1)$ кандидати е меѓу првите $(r-1)$ кандидати, односно $P(B_j \mid A_j)=(r-1)/(j-1)$, затоа што, според нашата стратегија, само тогаш сме продолжиле да го интервјуираме j-тиот кадидат и ако j-тиот кадидат е најдобриот, тогаш го избираме.

Да забележиме дека за мали вредности на n, барањето на r којшто ја максимизира веројатноста $\phi_n(r)$ е лесно пресметливо. Оптималното r може да се добие од следните две неравенства:

$$\phi_n(r-1) < \phi_n(r) \quad \text{и} \quad \phi_n(r) > \phi_n(r+1).$$

Оттука се добива дека

$$1 < \sum_{j=r}^{n}\frac{1}{j-1} \text{ и } 1 > \sum_{j=r+1}^{n}\frac{1}{j-1}$$

или

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{r+1}+...+\frac{1}{n-1}<1<\frac{1}{r-1}+\frac{1}{r}+...+\frac{1}{n-1}.$$

Последното неравенство може да се искористи за наоѓање на оптималната вредност на r за дадено n. Во Табела 1 се дадени оптималните вредности за r за првите $n \le 20$. Во истата табела во последниот ред е пресметан и процентот од вкупниот број кандидати кој одговара на отфрлените $(r-1)$ кандидати.

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
r	2	2	3	3	3	3	4	4	5	5	6	6	6	7	7	7	8	8
$r-1$	1	1	2	2	2	2	3	3	4	4	5	5	5	6	6	6	7	7
%	33	25	40	33	29	25	33	30	36	33	38	36	33	37	35	33	37	35

Табела 1. Оптимални вредности за r т.е. првиот кандидат кој може да се избере, ако е подобар од првите $(r-1)$ кандидати.

Подоцна ќе видиме дека барањето на оптималната вредност на r на овој начин со сумирање на дропките сѐ до првото надминување на сумата над 1 лежи во основата на алгоритмот на Брус за оптимално запирање, [1] (види 3.2).

Од Табела 1 може да воочиме и дека со зголемување на вредноста на n, процентот од вкупниот број на кандидати којшто одговара на отфрлените $(r-1)$ кандидати, како да се приближува кон 37%. Ќе покажеме дека таа гранична вредност навистина е приближно 37%, [3]. Да ја означиме со x границата на $(r-1)/n$ кога n се стреми кон бесконечност. Тогаш, сумата во формулата за $\phi_n(r)$ може да се интерпретира како Риманова сума, а со тоа и Риманова апроксимација на следниот интеграл:

$$\phi_n(r) \quad = \frac{r-1}{n}\sum_{j=r}^{n}\frac{1}{j-1} = \frac{r-1}{n}\sum_{j=r}^{n}\frac{n}{j-1}\cdot\frac{1}{n} \longrightarrow x\int_x^1 \frac{1}{t}dt = -x\ln x \,,$$

кога $n \to \infty$. Со изедначување на првиот извод на нула, добиваме дека вредноста на x која ја максимизира последната функција (вториот извод е секогаш негативен за позитивни x, па затоа стационарната точка е точка на максимум) е $x = 1/e = 0,367879... \approx 37\%$, а воедно и максималната веројатност е $-x\ln x = 1/e = 0,367879... \approx 37\%$.

Значи, за големи вредности на n, приближно оптимално е да се чека да се интервјуираат околу 37% од кандидатите, а потоа да се одбере првиот кандидат кој е подобар од интервјуираните кандидати. Веројатноста дека на тој начин е одбран најдобриот кандидат исто така е околу 37%.

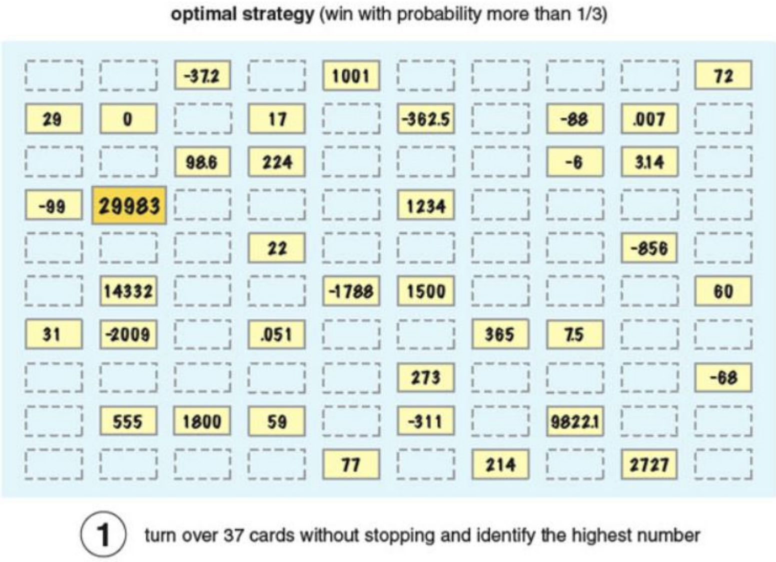
Задачата на најдобар избор на секретарка е еден од најпроучуваните проблеми на оптимално запирање и постојат многу нејзини варијанти, [5, 8, 10].

2.2. ИГРАТА ГУГОЛ

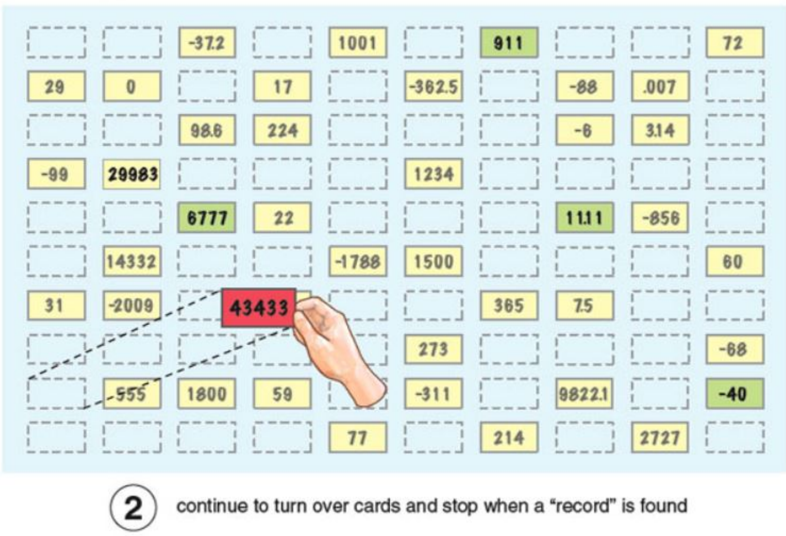
Историските белешки кажуваат дека првиот пишан извор во кој се среќава проблемот на оптимално запирање и најдобар избор е во прилогот на Мартин Гарднер во Scientific American во февруари 1960 година, [3]. Но, и самиот Мартин Гарднер се повикува на други научници од кои го слушнал овој проблем, тие на други итн. Проблемот на оптимално запирање на Мартин Гарднер од 1960 година е со поинаков текст од задачата на најдобар избор на секретарка, тој проблем е познат како *Играта Гугол* и гласи вака:

Побарај од пријателот да земе колку сака картички и на секоја картичка да запише различен позитивен број. Опсегот на броевите може да биде од многу мали дропки блиску нулата до многу големи броеви од типот на гугол (единица со 100 нули), а може и поголеми. Овие картички се поставени на масата со лицето надолу. Ти треба да ги вртиш картичките една по една. Целта е да одлучиш кога да престанеш со вртењето на картичките и да прогласиш дека си го нашол најголемиот број запишан на картичките. Не можеш да се вратиш назад и да одбереш број од картичка која претходно е свртена. Ако ги свртиш сите картички, тогаш ја одбираш последно свртената картичка.

На Слика 2 и Слика 3 е прикажана варијанта на Играта Гугол со 100 картички со позитивни и негативни броеви, [7]. На Слика 2 се завртени 37 од картичките и одреден е најголемиот број, тоа е 29983. Потоа, се превртуваат картички, една по една, сѐ до првото појавување на број поголем од 29983, тоа е бројот 43433 (Слика 3). Веројатноста дека сме го нашле најголемиот број е поголема од 1/3.



Слика 2. Варијанта на Играта Гугол со 100 картички – Прв чекор: заврти ги првите 37 картички и одреди го најголемиот број, [7].



Слика 3. Варијанта на Играта Гугол со 100 картички – Втор чекор: продолжи да ги вртиш една по една картичките сѐ до првото појавување на број поголем од најголемиот број меѓу првите 37 броја, [7].

Да забележиме дека Играта Гугол не е задача за најдобар избор на секретарка. Прво, нарушена е претпоставката 4, носителот на одлуки ги дознава вистинските вредности на броевите на картичките, а не нивното рангирање и нарушена е претпоставката 3 за случаен избор на броевите кои ќе бидат запишани на картичките, затоа што пријателот е тој кој ги запишува броевите на картичките. Всушност Играта Гугол, според теоријата на игри, е игра со два играчи.

Во литературата постојат многу трудови за Играта Гугол и повеќе понудени решенија, меѓу кои и тоа на Гнедин за постоење на правило на запирање базирано на релативните рангови, при кое се постигнува максимална веројатност за успех, [6]. Можеби токму од овие причини, заради овој резултат на Гнедин, според кој постои оптимално правило на запирање како и кај задачата за најдобар избор на секретарка, Играта Гугол се смета за првиот пишан извор за задачата на најдобар избор.

3. ТЕОРИЈА НА ОПТИМАЛНО ЗАПИРАЊЕ

Во науката секогаш е корисно за разгледуваниот проблем да се конструираат математички модели за на тој начин да се опфати поширока класа проблеми. Тогаш, методот кој ќе го решава разгледуваниот проблем ќе може да се примени и на проблемите од поширокaта класа проблеми.

Така, со теоријата на оптимално запирање се моделираат проблеми од областа на статистиката, операционите истражувања, финансиите, осигурувањето и слично, проблеми во кои заради ограниченост на времето, просторот или информациите, носителот на одлуки треба да одбере време кога да изврши одредено дејствие со цел да се максимизира очекуваната исплата или да се минимизира очекуваниот трошок, [4].

Моделот на *задачата на оптимално запирање* се состои од:

i) низа од случајни променливи $X_1, X_2, \ldots$ со позната заедничка распределба; и

ii) низа од реално-вредносни функции на исплати

$$y_0, y_1(x_1), y_2(x_1, x_2), \ldots, y_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, y_\infty(x_1, x_2, \ldots) .$$

Случајните променливи се набљудуваат една по една и се забележуваат нивните вредности $x_1, x_2, ...$ соодветно. Доколку набљудувачот одлучи за запре во n-тиот чекор, ќе добие исплата $y_n(x_1, x_2, ..., x_n)$. Ако одлучи воопшто да не набљудува – ќе добие константна исплата y_0, а ако не сопре никогаш – ќе добие исплата $y_\infty(x_1, x_2, ...)$. Ќе дозволиме исплатата да може да прими вредност $-\infty$, но ќе претпоставиме дека исплатите се рамномерно ограничени одозгора со случајна променлива со конечно математичко очекување, за подолу дефинираните математички очекувања да имаат смисла. Целта е да се одбере време на запирање, при што ќе се максимизира очекуваната исплата.

Дефинираме *правило на запирање*, како низа од функции

$$\boldsymbol{\phi} = (\phi_0, \phi_1(x_1), \phi_2(x_1, x_2), ...),$$

каде што $0 \le \phi_n(x_1, x_2, ..., x_n) \le 1$ е веројатноста за запирање во n-тиот чекор на набљудувањето, за дадени набљудувани вредности $x_1, x_2, ..., x_n$ на првите n случајни променливи $X_1, X_2, ..., X_n$. Притоа, ϕ_0 е веројатноста дека нема да има набљудувања, $\phi_1(x_1)$ е веројатноста за запирање по првото набљудување, итн. Ова е пример на рандомизирано правило на запирање. Правилото на запирање $\boldsymbol{\phi}$ е нерандомизирано, ако за секој n, веројатноста за запирање $\phi_n(x_1, x_2, ..., x_n)$ во n-тиот чекор е 0 или 1.

Со правилото на запирање $\boldsymbol{\phi}$ и низата од набљудувања $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, ...)$ е определено случајното *време на запирање* N, коешто прима ненегативни целобројни вредности $0 \le N < \infty$ или $N = \infty$, ако запирањето не се случи. Распределбата на N за дадени вредности $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ...)$ ја означуваме со

$$P(N = n \mid \boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}) = \psi_n(x_1, x_2, ..., x_n), n = 0, 1, 2, ...,$$
$$P(N = \infty \mid \boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}) = \psi_\infty(x_1, x_2, ...)$$

и таа е одредена од правилото на запирање на следниот начин:

$$\psi_0 = \phi_0,$$
$$\psi_1(x_1) = (1 - \phi_0)\phi_1(x_1), \ldots,$$

$$\psi_n(x_1,...,x_n) = \left[\prod_{j=0}^{n-1}(1-\phi_j(x_1,...,x_j)\right]\phi_n(x_1,...,x_n), \ldots,$$

$$\psi_\infty(x_1,x_2,...) = 1-\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j(x_1,...,x_j),$$

каде што $\psi_\infty(x_1,x_2,...)$ е веројатноста набљудувањето да не сопре.

Треба да се одбере правило на запирање $\boldsymbol{\phi}$ кое ќе ја максимизира *очекуваната исплата* дефинирана со:

$$V(\boldsymbol{\phi}) = \mathrm{E}\, y_N(X_1,X_2,...,X_N) = \\ = \left(\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j(x_1,x_2,...,x_j)y_j(x_1,x_2,...,x_j)\right) + \psi_\infty(x_1,x_2,...)y_\infty(x_1,x_2,...) .$$

3.1. МОДЕЛИ НА ОПТИМАЛНО ЗАПИРАЊЕ

Во овој дел ќе разгледаме неколку модели на оптимално запирање измоделирани како задача на оптимално запирање, [4]. За секој модел ќе бидат дефинирани низата од случајни променливи $X_1, X_2,...$ и низата од функции на исплати.

1) *Проблемот на продажба на куќа* е следниот: *Понудите за куќата која сакате да ја продадете пристигнуваат секојдневно. Нека* X_n *е висината на понудата пристигната во* n*-тиот ден. Вам не ви се познати вредностите на понудите пред да пристигнат, но претпоставувате дека се независни и еднакво распределени со позната распределба на веројатнисти. Секоја понуда ве чини* $c > 0$ *парични единици за да ја разгледате (може да сметате на* c *како на трошок за живеење). Кога ќе ја добиете понудата* X_n*, мора да одлучите дали да ја прифатите или да чекате подобра понуда. Знаете дека подобра понуда некогаш ќе има, но прашањето е дали сте подготвени да чекате толку долго на сметка на трошоците за секојдневното разгледување на понудите?*

Тука, $X_1, X_2, ...$ се независни и еднакво распределени случајни променливи со позната распределба. Разгледуваме два случаја за дефинирање на низата од функции на исплати.

а) Во случај да не ви е дозволено да ја прифатите помината понуда, низата од функции на исплати е:

$$y_0 = 0,$$
$$y_n(x_1, x_2, ..., x_n) = x_n - nc, \quad n = 1, 2, ...,$$
$$y_\infty(x_1, x_2, ...) = -\infty.$$

б) Во случај да ви е дозволено да ја прифатите помината понуда, низата од функции на исплати е:

$$y_0 = 0,$$
$$y_n(x_1, x_2, ..., x_n) = \max(x_1, x_2, ..., x_n) - nc, \quad n = 1, 2, ...,$$
$$y_\infty(x_1, x_2, ...) = -\infty.$$

Во економската литература, овој проблем се нарекува и *проблем на барање работа*. Невработено лице бара работа, секое пребарување го чини одредена сума на време и изгубен доход. Кога ќе најде одредена работа, дури тогаш ги дознава условите за работа, вклучително и платата. Проблемот се состои во одредување на бројот на работни позиции кои треба да ги разгледа пред да се одлучи да ја одбере дотогаш најдобро најдената работа.

2) *Проблемот на одредување точка на промена* е следниот: *Разгледуваме низа од независни и еднакво распределени случајни променливи* $X_1, X_2, ...$ *со позната распределба* F_0. *Во некоја точка од времето T, непозната за нас, распределбата на променливите се менува во* F_1. *Ние сакаме навремено да алармираме за промената, колку што е можно побрзо по настанатата промена. Се претпоставува дека е позната распределбата на T. Трошокот за запирање по промената е изминатото време од настанатата промена, а трошокот за лажно алармирање, т.е. запирање пред да настане промената е константата* $c > 0$.

Тогаш, вкупниот трошок е

$$Y_n = cI\{n < T\} + (n-T)I\{n \geq T\}, \quad n = 0,1,... \text{ и } Y_\infty = \infty,$$

каде што $I\{.\}$ е индикатор на настан. Бидејќи T е случајна променлива, трошокот може да го замениме со очекуваниот трошок при дадени $X_1, X_2, ..., X_n$, т.е.

$$y_n = cP(n < T \mid \mathbf{F}_n) + E((n-T)^+ \mid \mathbf{F}_n), \quad n = 0,1,... \text{ и } y_\infty = \infty,$$

при што $\mathbf{F}_n$ е σ - алгебрата генерирана од $X_1, X_2, ..., X_n$ и $x^+ = \max\{x, 0\}$ е позитивен дел на x.

Овој модел наоѓа примена при: набљудување на промената на пулсот кај срцеви болни, набљудување на промената на квалитетот на некоја производствена линија, набљудување на промената на курсот на проектилите и слично.

3.2. ТЕОРЕМА НА БРУС ЗА ОПТИМАЛНО ЗАПИРАЊЕ

Целта на математичкото моделирање на еден проблем не е само да се даде „математичка слика“ на проблемот, туку и да се најдат математички методи за решавање на проблемот. Во овој дел ќе разгледаме еден од методите на оптимално запирање кој е широко применет, заради неговата едноставност. Тој метод се заснова на теоремата на Брус за оптимално запирање позната како *The Odds Theorem* и алгоритмот базиран на неа, [1].

Проблемот што се разгледува се состои од низа индикатори $I_1, I_2, ..., I_n$ на независни настани $A_1, A_2, ..., A_n$ соодветно, дефинирани над ист простор на веројатности $(\Omega, \mathbf{F}, P)$. Се претпоставува дека се познати веројатностите на настаните $A_1, A_2, ..., A_n$. (Индикатор на настан A е случајна променлива која прима вредност 1 со веројатност $P(A)$ и вредност 0 со веројатност $1 - P(A)$.) Индикаторите $I_1, I_2, ...$ се набљудуваат последователно и може да се запре кај било кој од нив и не е дозволено навраќање на поминатите индикатори. Ако $I_k = 1$, тогаш k се нарекува *време на успех*. Целта е да се максимизира веројатноста за избор на последниот успех, односно последниот индикатор со вредност

1. Теоремата на Брус (The Odds Theorem) и алгоритмот базиран на неа нудат начин на конструирање на оптимално правило на запирање за проблемите од овој тип и претставуваат резултат на теоријата на оптимално запирање кој е применлив за многу секвенционални проблеми на одлучување.

Теорема на Брус. (The Odds Theorem, [1])

Нека $I_1, I_2, ..., I_n$ *се низа од независни и еднакво распределени Бернулиеви 0-1 променливи со* $p_j = E(I_j)$. *Нека* $q_j = 1 - p_j$ *и* $r_j = p_j / q_j$. *Тогаш, постои оптимално правило за запирање на последниот успех и се состои во запирање на првиот индекс* k *со* $I_k = 1$ *и* $k \geq s$*, каде што*

$$s = \sup\left\{1, \sup\left\{1 \leq k \leq n : \sum_{j=k}^{n} r_j \geq 1\right\}\right\},$$

со $\sup(\varnothing) = -\infty$. *Тогаш, оптималната исплата (веројатност за победа) е* $V(n) = \prod_{j=s}^{n} q_j \sum_{j=s}^{n} r_j$.

Теоремата на Брус тврди дека за да се максимизира веројатноста за избор на последниот успех, оптимално е да се запре на првиот успех во низата $I_s, I_{s+1}, ..., I_n$, каде s е дефинирано во теоремата, односно треба да се запре кај оној индикатор I_j за кој збирот $r_n + r_{n-1} + ... + r_j$ прв пат го достигнува или го надминува 1.

Алгоритмот базиран на Теоремата на Брус е следниот:

Чекор 1. Пресметувај ги $q_j = 1 - p_j$, $r_j = p_j / q_j$, $j = n, n-1, ...$ еден по еден од наназад и за s земи ја онаа вредност за j кога сумата $r_n + r_{n-1} + ... + r_j$ за првпат ќе достигне или ќе го надмине 1.

Чекор 2. Оптималната веројатност е $V(n) = R_s Q_s$, каде што $Q_s = \prod_{j=s}^{n} q_j$ и $R_s = \sum_{j=s}^{n} r_j$.

Ќе издвоиме некои примени на алгоритмот на Брус, [2]:

1) *Онлајн оптимизација* – При барање минимум на реално вредносна функција со помош на некој алгоритам за локално пребарување, се испитуват вредностите на функцијата во точки од некоја мрежа во околината на пребарување. Ако функцијата не ја менува драстично својата вредност, тогаш точката во која се достигнала минималната вредност на функцијата може да сметаме дека е точка блиска до точката на вистинскиот минимум. Ако мрежата е многу густа, бројот на точки во кои треба да се пресмета вредноста на функцијата ќе е многу голем и пребарувањето ќе биде неефикасно, па во тој случај потребен е стохастички пристап. Еден таков стохастички пристап е случајното пребарување. Се почнува од една точка x_0 и за следни кандидати се земаат случајни точки од околината на пребарување во надеж дека ќе наидеме на точка во која вредноста на функцијата е помала. Се поставува прашањето, кога да се запре со пребарувањето? Се предлага правилото на запирање да е следното: ако околината на x_k не дава подобри точки, да се вратиме на x_{k-1}, да побараме второ најдобро решение и да ја испитуваме неговата околина. Ако ова испитување даде подобро решение, продолжуваме со алгоритмот, но ако не даде, тогаш x_k го земаме за апроксимација за точка на минимум на функцијата.

2) *Автоматизирано поправање машина* – Со помош на алгоритмот на Брус може да се изработи стратегија за избор на приоритети при автоматизирана замена на деловите на една машина. Алатката за поправка на машината (робот) треба да одлучи кој дел да го замени, ако има повеќе од еден расипан дел. Изборот се прави врз основа на очекуваното време на живот на деловите, времето потребно за замена на делот и веројатноста за расипување. Главен предизвик при примената на алгоритмот на Брус на овој проблем е условот за независност кој не секогаш е задоволен при расипувањето на машините, бидејќи расипувањата на деловите зависат еден од друг.

3) *Оптимизација на софтвер* – Напредните софтверски системи може со помош на алгоритмот на Брус да се реконфигурираат самите

себеси за време на нивното извршување (run time) со тоа што би направиле подобар избор на начин за извршување на одредена функција.

4. ЗАКЛУЧОК

Може да кажеме дека проблемите на оптимално запирање демонстрираат еден општо прифатен принцип во животот, а тоа е дека треба да поминеме одредено време во истражување пред да донесеме некоја одлука, и притоа, за да донесеме што подобра одлука треба да го искористиме тоа што сме го научиле во текот на истражувањето. „Правилото на 37%“ ни дава само груб, но сепак оптимален одговор за тоа кога да сопреме со истражувањето, и притоа да ја максимизираме веројатноста дека одлуката што сме ја донеле врз база на истражувањето, е најдобрата одлука. Во реалноста, животните ситуации се многу посложени, па такви би биле и моделите со кои би ги опишале тие ситуации. Теоријата на оптимално запирање нуди решенија на многу посложени проблеми на оптимално запирање од оние кои се решаваат со „правилото на 37%“.

ЛИТЕРАТУРА

[1] F. T. Bruss, *Sum the odds to one and stop*, The Annals of Probability 28 (3) (2000) 1384-1391.

[2] R. Dendievel, *New developments of the odds theorem*, arXiv:1212.1391v1

[3] T. S. Ferguson, *Who Solved the Secretary Problem?* Statistical Science 4 (3) (1989) 282-296.

[4] T. S. Ferguson, *Optimal Stopping and Applications,* https://www.math.ucla.edu/~tom/Stopping/Contents.html

[5] P. R. Freeman, *The Secretary Problem and its Extensions: A Review*, International Statistics Review 51 (1983) 189-206.

[6] A. V. Gnedin, *A solution to the game of googol*, The annals of Probability 22 (3) (1994), 1588-1595.

[7] T. P. Hill, *Knowing When to Stop*, American Scientist, Vol. 97, No. 2, March-April (2009), page 126, https://www.americanscientist.org/article/knowing-when-to-stop

[8] S-R. Hsiau, J-R Yang, *A natural variation of the standard secretary problem,* Statistica Sinica 10 (2000), 639-646.

[9] D. K. Smith, *Mathematics, marriage and finding somewhere to eat,* Plus Magazine, September 1, 1997, https://plus.maths.org/content/os/issue3/marriage/index

[10] R. J. Vanderbei, *The Postdoc Variant of the Secretary Problem*, https://vanderbei.princeton.edu/tex/PostdocProblem/PostdocProb.pdf

[1] Универзитет „Св. Кирил и Методиј", Скопје,
Природно-математички факултет
Архимедова 3, 1000 Скопје, Р. Македонија
e-mail: irenatra@pmf.ukim.mk, irena.stojkovska@gmail.com

Примен: 12.3.2022
Поправен: 18.7.2022
Одобрен: 4.8.2022
Објавен на интернет: 16.8.2022