МАТЕМАТИЧКИ ОМНИБУС, 6 (2019), 183 – 201
http://im-pmf.weebly.com/matematicki-omnibus-kniga-6.html

МАТЕМАТИЧКО МОДЕЛИРАЊЕ И НЕГОВА ПРИМЕНА ВО НАСТАВАТА ПО МАТЕМАТИКА

Игор Богданоски [1]

Моника Богданоска [2]

1. ВОВЕД

Светот околу нас е исполнет со важни, неодговорени прашања. Какви ефекти ќе имаат надоаѓањето на морската вода на крајбрежните реони во светот? Кога целокупната популација на земјината топка ќе надмине 10 милијарди жители? Колку ќе чини студирањето на факултет по 10 години? Ова се само некои од феномените кои сакаме да ги разбереме подобро. Кој е најдобриот начин да се движите низ дожд, а да не се наводените? Дали можеме да креираме тавче во кое рабовите нема да се горат, а во средината се готви? Можните одговори на ваквите прашања се предизвик и за истражувачите и за учениците. Дали тие ќе можат да најдат одговори? Можеби. Единствена работа што со сигурност може да се каже е тоа дека било кој обид да се најде решение побарува да се користи математика, преку креирање, примена и модификација, подобрување и збогатување на математичкиот модел, [1].

Математичкото моделирање е процес кој ја користи математиката за да претстави, анализира и да овозможи увид во феномените на реалниот живот. Математички модел е математичка репрезентација – претставување на систем или сценарио кое се користи за да се добие квалитативно и/или квантитативно разбирање на одредени проблеми од секојдневниот живот и да се предвидат некои идни однесувања. Моделите се користат во различни дисциплини, како на пример биологија, инженерството, компјутерските науки, психологијата, социологијата, маркетингот и многу други. Затоа што моделите се апстракција на реалноста, тие можат да доведат до научни достигнувања, овозможуваат основа за нови откритија и помагаат во донесувањето на научни заклучоци базирани на знаење.

Главна особина на математичкото моделирање е учењето да се донесуваат одлуки. Со помош на математичкото моделирање, понекогаш можат да се предвидат одредени идни трендови, да се донесуваат одлуки во врска со глобални еколошки прашања – проблеми. Математичките модели можат да се користат во уметноста, во креирањето перспективи и композиции. Математичкото моделирање се користи во индустријата за пакување, во економијата, во биолошките системи, во медицинските испитувања, во физиката. Всушност многу е потешко да се најде област каде што работат луѓето, а во која нема употреба на математичките модели.

Во денешниот свет на пазарна економија севкупниот развој на одреден производ денес зависи од успешно моделирање и симулации без разлика дали се работи за автомобили, мобилни телефони, делови за компјутери, медицинска опрема.

2. ТЕКСТУАЛНИ ЗАДАЧИ И ПРОБЛЕМИ НА МАТЕМАТИЧКО МОДЕЛИРАЊЕ

Во текот на математичкото образование, зборот „модел” се користи на многу начини. Некои од нив се: манипулативи демонстрации, играње на улоги и концептуални модели на математиката, кои се корисни алатки за учење и поучување. Но, тие се многу различни од праксата за математичко моделирање. Математичкото моделирање, како во училишното, така и во работното опкружување, ја користи математиката за да одговори на важни, големи, неуредни, хаотични и конфузни прашања поврзани со реалноста.

Да разгледаме еден пример, првенствено наменет за ученици во основно образование, со кој учениците ги учат вештините на собирање. Една задача за собирање, зададена без примена, може да побара од учениците да „пресметаат збир на 6+3”. Една текстуална задача може да ги запраша учениците колку јаболка имаат Тони и Сузана заедно доколку Тони има 6 јаболка, а Сузана има 3, [6].

Иако текстуалната задача поврзува објекти кон собирањето, таа сè уште не е моделирачки проблем од две причини. Прво, таа нема суштинска вредност за учениците, освен одговарање на проблемот како домашна работа, па учениците не би ги интересирало колку јаболка имаат Тони и Сузана. Текстуалниот проблем е затворен и на почетокот и на крајот. И покрај тоа што учениците можеби ќе имаат неколку различни пристапи за да дојдат до одговорот, како на пример цртање слики и броење или пишување и проверување на аритметички израз, сите потребни податоци се јасно понудени и постои само едно точно решение.

Да се обидеме да го трансформираме овој текстуален проблем во математички проблем на моделирање, при што сè уште ќе се задржиме на собирањето на целите броеви. Со цел да се ангажираат учениците нешто повеќе со содржината, ние можеме да ги запрашаме да замислат дека тие треба да помогнат во изборот на ручекот за наредниот пикник за нивното семејство, и на тој начин да определат колку јаболка тие треба да изберат, [5]. Учениците треба да земат во предвид и многу други работи и да се постават многу други прашања. Колку луѓе се во нивното семејство и колку од нив ќе присуствуваат на пикникот? Колку јаболка е веројатно дека ќе изеде секој од нив? Дали има некакви рестрикции во врска со диети кои треба да се земат во предвид? Колку друга храна ќе биде достапна на пикникот?

Додека учениците прават претпоставки и даваат одговори на сите горенаведени прашања, ќе увидат дека со мали промени на влезните информации, го трансформираат прашањето во прашање од отворен тип, а притоа сè уште работат собирање на цели броеви.

Во следниов пример, за повисоките одделенија на основното образование и за средно образование, учениците учат како да напишат равенка на права и графички да ја нацртаат, ако е даден коефициентот на правец и слободниот член. Првично, може да се бара од учениците да нацртаат права со коефициент на правец 5 и пресек со y-оската 2000, а потоа да ја напишат равенката на таа права.

Прв чекор во насока на моделирање можеби би бил да се концептуализира еден сличен проблем, како во [6]: *Емилија работи во колонијал кој ја плаќа 2000 денари неделно, плус 5 денари за секој производ кој таа ќе го продаде. Запишете и нацртајте график на линеарна равенка која ќе ја претставува врската помеѓу неделната плата на Емилија и бројот на производи кои таа ќе ги продаде во текот на една недела.*

Во насока на оправдување на смислата на поставениот проблем, можеме да го трансформираме во поотворен и проблем со поголемо значење на следниов начин: *Се приближуваат празници, па вашата најдоб-*

ра пријателка Каролина сака да заработи одредена сума пари за да може да купи поклони. Таа нашла една работа која ќе ѝ плати 100 денари на час над минималната плата. Друга работа ѝ нудела плата од половина од минималната плата плус додаток во висина од 100 денари по продаден производ. Која работа е подобра?

Учениците треба да направат одредени истражувања за да одговорат на ова прашање. Можеби би требало да побараат колкава е минималната плата. Тие треба да размислуваат во врска со „доведување во рамнотежа" – бројот на производи кои нивниот пријател треба да ги продаде секој час со цел да ја заработи минималната плата. Потоа треба да размислуваат за веројатноста дали Каролина ќе биде во состојба да продаде толку производи што најверојатно зависи од видот на производот и од нејзините лични карактеристики.

Истражувањето во врска со содржината и претпоставките во врска со содржината се компоненти на математичкото моделирање.

Учениците кои не сакаат да ризикуваат можеби ќе ја советуваат Каролина да ја прифати првата работа затоа што платата е задоволителна и е загарантирана. Како алтернатива, учениците кои сакаат да ризикуваат можеби ќе ја советуваат да ја зема втората работа заради можноста што ја нуди да се заработи повеќе пари. Определувањето на точката на израмнување е само еден аспект од ова прашање. Учениците треба да направат избор кога се соочени со неизвесност. Тие сè уште треба да направат одредени математички пресметки со цел да одговорат на прашањето, но се принудени да го стават во рамнотежа со реалноста, правејќи ја математиката порелевантна и поинтересна.

Донесувањето судови за она што е важно и оценувањето на квалитетот на решението се компоненти на математичкото моделирање.

Проблемите за моделирање се комплетно различни од текстуалните проблеми со кои ние многу често се соочуваме во нашата секојдневна работа како наставници. Со цел подобро да се разбере разликата помеѓу математичкото моделирање и текстуални проблеми, ќе ги разгледаме и следните прашања во врска со рециклирањето, [1]:

Прашање 1. Бројот на жители на Струга е 20000 и 35% од неговите жители ги рециклираат нивните пластични шишиња од вода. Ако секој човек користи 9 шишиња вода неделно, колку шишиња се рециклираат секоја недела во Струга?

Прашање 2. Колку пластика се рециклира во Струга?

Решението на првото прашање е прилично едноставно: $0,35 \cdot 20000 \cdot 9 = 63000$ шишиња неделно.

Овој вид прашање може да се појави во учебник по математика со цел да се провери како се трансформира текстот „35% од" во математичкото пресметување „поголемо $0,35$ пати". Се работи за пример на она што ние го викаме <u>текстуален проблем</u>: *проблем кој експлицитно ни ги дава сите информации кои ни се потребни*. Треба само да се определат соодветните математички пресметки со цел да се дојде до еден точен одговор. Текстуалните проблеми можат да се користат за да им помогнат на учениците да разберат зошто е потребно да учиме одреден математички концепт и да ги вежбаме математичките вештини.

Но, второто прашање е сосема поинакво. Кога ќе го прочитате прашање или било кое друго прашање кое е слично на ова, вие можеби ќе размислувате *„јас немам доволно информации за да одговорам на ова прашање"* и за што сте во право! Но, во тоа е и клучната точка: ние вообичаено немаме комплетни информации кога се обидуваме да решаваме проблеми од секојдневниот живот. Навистина, таквите ситуации бараат од нас да користиме математика и креативност. Кога ќе се сретнеме со вакви и слични ситуации каде ние немаме комплетни информации, најчесто велиме дека таквите проблеми се од отворен тип. Математичкото моделирање е совршено за проблеми од отворен тип, а моделирањето ни дозволува математички да ја анализираме ситуацијата и да предложиме решение со кое ќе промовираме рециклирање.

Во текстуалниот проблем на првото прашање се претпоставува дека секој човек во градот користи 9 пластични шишиња неделно и дека 35% од 20000 жители ги рециклираат нивните шишиња вода секогаш кога ќе ги искористат. Дали тоа се разумни претпоставки? Бројот 20000 најверојатно е само претпоставка на бројот на жители на Струга, но од каде доаѓа другата информација? Дали навистина е точно дека секој човек во Струга користи точно 9 шишиња вода секоја недела? Дали е точно дека 35% од луѓето го рециклираат секое шише кое го користат, додека 65% од луѓето никогаш не рециклираат ниту едно од нивните шишиња со вода? Најверојатно не, можеби ова се само просечни вредности кои се базираат на други податоци. Првиот проблем нè поттикнува да провериме дали сценариото е реално; се претпоставува дека ќе ги прифатиме дадените информации како вистинити и ќе ги направиме соодветните пресметки.

Со цел да го одговориме вториот (моделирачки) проблем треба да се направи истражување на ситуацијата, да се направат сопствени разумни претпоставки и стратегии за одговарање на прашањето. Податоците во прашањето не ни обезбедуваат специфични детали во врска со Струга. Вие треба да определите кои се факторите во врска со Струга кои придонесуваат кон зголемувањето на количеството на пластика која се рециклира. Навидум, разумно е да се претпостави дека жителите на Струга се важен фактор, но што друго влијае на степенот на рециклирање? Во прашањето на се спомнува кои видови на пластики треба да ги земеме предвид. Би било многу тешко да се квантифицира целата пластика која се фрла. Реално е да се претпостави дека ќе се земе предвид само пластиката од храната и од пакувањата на пијалоците доколку верувате дека тие се примарни извори на пластичен отпад. Треба да спроведете одредено истражување со цел да направите одредени претпоставки, доколку сакате да постигнете одреден напредок во решавањето на овој проблем.

Ако по вашето истражување го „прочистите" оригиналниот проблем во малку поспецифичен проблем, како на пример, *„Определете го волуменот на пластичен отпад кој градот Струга го фрлил на отпад минатата година?"*, тогаш ќе има само еден точен одговор. За таа цел, ќе развиете модел кој најдобро го проценува одговорот земајќи ги во предвид расположливите информации. Бидејќи никој не го знае точниот одговор на прашањето, вашиот модел на крај е поважен и од самиот одговор, исто како и вашата способност тој да се објасни.

Како контраст на текстуалните задачи, многу често ја користиме фразата *„едно решение"* наместо *„решението"*, кога зборуваме за моделирање на проблемите. Ова е затоа што луѓето кои разгледуваат ист моделирачки проблем можат да имаат различни перспективи кон неговото решение и можат да дојдат до различни, а сепак валидни алтернативни решенија. Добро е да се напомене дека текстуалните проблеми можат всушност да се предаваат како поранешни моделирачки проблеми, во кои мора да определите што е важно и како да ги поврзете деловите заедно.

Прашањата за математичко моделирање овозможуваат да истражувате проблеми од секојдневниот живот и со користење на вашите откритија да креирате ново знаење. Вашата креативност и како размислувате во врска со овој проблем се високо вреднувани и ценети при изнаоѓање на решение на моделирачкото прашање. Ова е делот од она што го прави моделирањето интересно и забавно.

3. РАЗВОЈНИОТ ПАТ НА ЕДЕН МАТЕМАТИЧКИ МОДЕЛ

Математиката може да се искористи за да се моделира функционирањето на реалниот свет. Да го разгледаме следниот пример.

Пример 1. ([7]) *Колкав е просторот во внатрешноста на една картонска кутија?*

Познати се трите димензии на кутијата, должина a, ширина b и висина c, а формулата за волумен на квадар е $V = a \cdot b \cdot c$.

На овој начин добивме еден многу едноставен математички модел на просторот внатре во една картонска кутија. Тука логички се наметнуваат прашањата: Дали сите кутии имаат форма на квадар? Што ако кутијата не е во облик на квадар? Како на тој начин би се променил математичкиот модел? Во овој случај избрана е најстандардната форма на картонска кутија заради поедноставување на моделот. Ако се земат предвид сите или дел од претходните прашања моделот би се усложнил. *Но, што е со точноста на моделот, кога кутијата има форма на квадар?* Моделот не ја отсликува реалната ситуација. Во нашиот пример не ја зедовме предвид дебелината на картонот туку се надеваме дека тоа е доволно добро за да биде корисно.

Доколку плаќаме според волуменот на кутијата која сакаме да ја испратиме по пошта или карго, во тој случај треба да знаеме каква кутија и со која дебелина на ѕидот и која маса треба да избереме, имајќи предвид дека можеби ќе праќаме стотина кутии на ден, па трошоците би се акумулирале и би биле значајни. Па, затоа да видиме како може да се подобри моделот:

Ако картонот е со дебелина d, *и сите мерки се направени на надворешноста на кутијата, се прашуваме каков е просторот внатре во кутијата?*

Внатрешните мерки треба да се намалат за дебелината на секоја страна. Внатрешната должина е $a-2d$, внатрешната ширина е $b-2d$ а внатрешната висина е $c-2d$. Сега, формулата за пресметување на внатрешниот волуменот е

$$V=\left(a-2d\right)\cdot\left(b-2d\right)\cdot\left(c-2d\right)$$

Сега имаме подобар модел, но не е перфектен.

Следно, го модификуваме моделот според потребите. Тоа можеме да го направиме на различни начини.

Компанијата користи кутии со следниве димензии: должина $200\,\mathrm{mm}$, *ширина* $300\,\mathrm{mm}$ *и височина* $400\,\mathrm{mm}$, *а картонот е со дебелина од* $5\,\mathrm{mm}$. *Некој сугерирал дека треба да се користи картон со дебелина* $4\,\mathrm{mm}$. *Дали тоа решение е подобро?*

Да ги споредиме двата волумени

$$V_m=\left(200-2\cdot 5\right)\cdot\left(300-2\cdot 5\right)\cdot\left(400-2\cdot 5\right)=190\cdot 290\cdot 390=21489000\,\mathrm{mm}^3$$

$$V_n=\left(200-2\cdot 4\right)\cdot\left(300-2\cdot 4\right)\cdot\left(400-2\cdot 4\right)=192\cdot 292\cdot 392=21977088\,\mathrm{mm}^3$$

Релативната промена е дадена со:

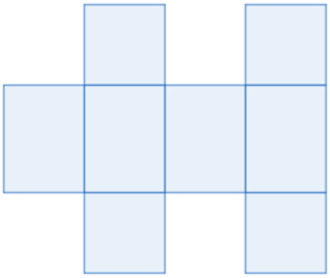
$$\frac{V_n-V_m}{V_m}=\frac{21977088-21489000}{21489000}=\frac{488088}{21489000}=0.02277133824514868\approx 2,277\%$$

Од ова може да се види дека моделот е корисен. Тој ни помогна да видиме дека со промена на дебелината на картонот од само еден милиметар ние добивме нешто повеќе од 2% простор повеќе внатре во кутијата. Но сè уште постојат „работи од реалниот свет“ за кои треба да се размислува, како на пример за тоа „дали картонската кутија во тој случај ќе биде доволно цврста?“. Да ја разгледаме следната модификација.

Компанијата треба да направи сопствено пакување, со волумен $0,02\,\mathrm{m}^3$, *квадратна основа со двојни дно и капак, а притоа картонот чини* $\$0,30$ *за метар квадратен. Откријте ја најекономичната димензија на пакувањето.*

Решението на оваа модификација на моделот ќе го дадеме во неколку последователни чекори.

Чекор 1: Нацртајте скица.



Слика 1. Мрежа на квадар добиена со [8].

Основата е квадрат, па треба да искористиме иста буква a за двете должини. Кутијата има 4 страни, по два капаци и две дна. Мрежата на ваквата кутија изгледа како на Слика 1 и истата треба да се пресече за да се добие саканата форма.

За овој модел ќе ја игнорираме дебелината на материјалот.

Чекор 2: Конструирање формули.

Волуменот на квадарот се пресметува со

$$V = BH = a^2 \cdot c$$

Кажано ни беше дека волуменот на кутијата треба да биде $0,02\,\mathrm{m}^3$, па со замена во формулата за волумен ќе се добие $a^2 \cdot c = 0,02$. Бочната плоштина е $M = L \cdot H = (4a) \cdot c = 4ac$. Плоштина на двојните дно и капак ќе биде $4B = 4a^2$. Вкупната плоштина на картон кој е потребен за да се изработи кутијата е

$$P = 4B + M = 4a^2 + 4ac.$$

Чекор 3: Одредување на формулата за цената

Доколку ги знаеме должината на основата и висината, цената може да се пресмета со

$$C = \$0,30 \cdot P = \$0,30 \cdot \left(4a^2 + 4ac\right).$$

Оваа формула може да се поедностави доколку ја искористиме врската за a и c знаејќи го волуменот т.е. $V = a^2 c = 0,02$. Доколку во оваа функција ја изразиме висината преку волуменот и должината на основата, имаме

$$c = \frac{V}{a^2} = \frac{0,02}{a^2} = \frac{2}{100a^2} = \frac{1}{50a^2}$$

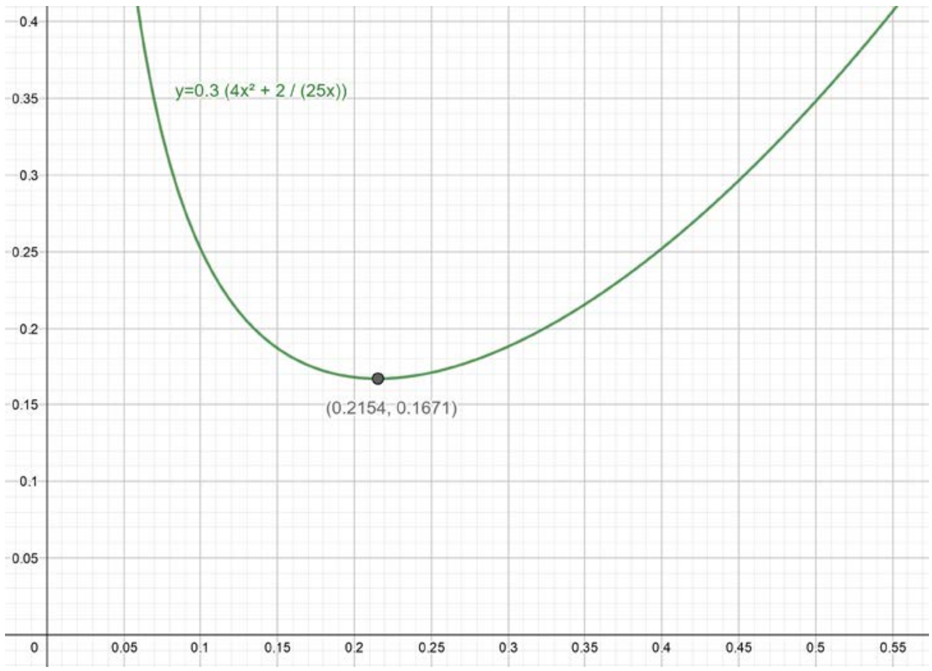
Потоа, со замена во формулата за цената се добива дека функцијата на цената зависи само од должината на кутијата:

$$C = \$0,30 \cdot \left(4a^2 + 4a \cdot \frac{1}{50a^2}\right) = \$0,30 \cdot \left(4a^2 + \frac{2}{25a}\right).$$

Чекор 4: Цртање и наоѓање на минималната цена.

Формулата за цената има смисла за должини на страната поголеми од нула и може да се покаже дека за должини поголеми од $0,5\ \mathrm{m}$ цената станува се поголема и поголема (Слика 2).

Минимумот на функцијата на цената се достигнува во точката $(0,2154; 0,1671)$, која што го претставува темето на параболата $y = 0,3\left(4x^2 + \frac{2}{25x}\right)$, Слика 2. Со други зборови, кога должината е $0,2154\,\mathrm{m}$, минималната цена е $\$0,1671$ по кутија.



Слика 2. График на цената на картонската кутија добиен со [8].

Всушност, само со набљудување на графикот, може да се забележи дека должината може да биде и околу $0,24\,\mathrm{m}\,(0,25\,\mathrm{m})$ без да се има значителна измена на минималната цена.

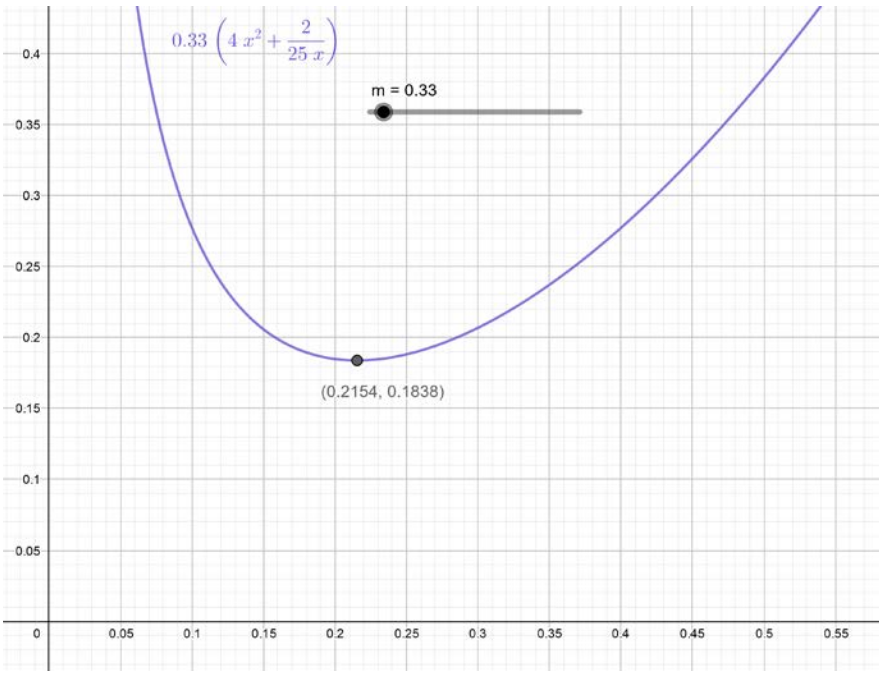
Чекор 5: Препораки.

Со користење на добиениот математичкиот модел, можеме да препорачаме

- Должина на страната на кутијата од $a = 0,2154m$.
- Висина на кутијата од
$$c = \frac{1}{50a^2} = \frac{1}{50 \cdot 0,2154^2} = 0,43106086665649357\,\mathrm{m} \approx 43,1\mathrm{cm}.$$
- Цената е
$$C = \$0,30 \cdot \left(4 \cdot 0,2154^2 + \frac{2}{25 \cdot 0,2155}\right) = \$0,16709720481337048$$

или околу $16,71$ центи по кутија, иако која било должина помеѓу $0,20\,\mathrm{m}$ и $0,24\,\mathrm{m}$ е сосема добра.

Исто така може да предложите подобрување на моделот.

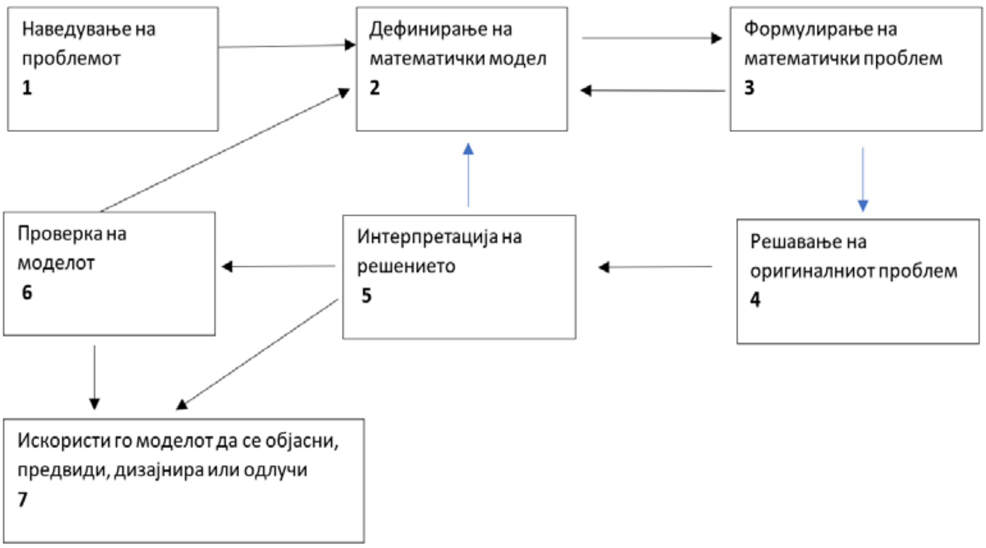


Слика 3. График со лизгач за цената на картонот како параметар во моделот добиен со [8].

Да се вклучи цената на лепилото што се користи при составувањето, да се вклучи и отпадот кој се создава при сечењето на кутијата од картонот, дали оваа кутија има добра форма за пакување, ракување и чување; колкава треба да биде цената на картонот за да цената на кутијата не надмине 1 долар; колкава ќе биде цената на картонот доколку за производство на кутијата ви се потребни 50 центи? Зависноста на цената на една кутија од менувањето на цената на картонот како параметар во моделот, може да се разгледува со вметнување на лизгач за цената на картонот (Слика 3).

4. ПРОЦЕС НА МАТЕМАТИЧКО МОДЕЛИРАЊЕ

Откако направивме споредба на текстуалните и моделирачките проблеми и го проследивме развојниот пат на еден математички модел за решавање на реален проблем, тука ќе се осврнеме на шематскиот приказ на процесот на математичко моделирање, за кој повторно ќе приложиме пример. Кога се опишуваат процесите на математичко моделирање во теоретски рамки, многу често се зборува за одреден круг кој треба да го поминат луѓето кога тие се вклучени во процесите на математичко моделирање, [4]. На Слика 4 е прикажан шематскиот приказ на процесот на математичко моделирање.



Слика 4. Шематски приказ на процесот на математичко моделирање, [2].

Првиот чекор во процесот на математичко моделирање е да се преведе ситуацијата или феноменот на кој се работи или се разгледува во математички проблем со користење на математички изрази (термини). Ова значи дека понекогаш не треба да се дефинираат променливи или да знаеме нешто за врските кои постојат помеѓу променливите. Оригиналниот проблем поминува низ математички процеси, на анализа и потоа се третира за да се види дали решенијата задоволуваат одредени почетни побарувања.

Пример со кој може процесот на математичко моделирање да се направи поразбирлив е проблемот со мечките.

Пример 2. ([2]) *Бројот на мечки во некои региони се зголемува. Во 2000 година имало 2500 мечки, а во 2010 година имало 2700 мечки.*

а) Колку мечки ќе има во 2025 година?

б) Кога бројот на мечки ќе биде 3500?

Ова е добра задача за илустрирање на процесот на математичко моделирање, но треба да се биде многу детален кога истата ќе се презентира во училница. Таа содржи математичко моделирање со линеарни односно експоненцијални функции. Во продолжение ќе дадеме постапно решение на овој пример, по чекори, при што во одредени моменти ќе користиме GeoGebra, [8].

Чекор 1: Избирање и организирање на модел.

На почеток треба да се објасни на каков вид на математички модел сакате вашето одделение да работи.

Доколку во текстот на задачата пишува „Бројот на мечки се зголемува”, еднакво, за еднакво количесто, за 20 мечки, за ист број, линеарно, секоја година (месец, секунда, час) тогаш вие треба да користите **линеарен модел,** кој може да се користи во VIII и IX одделение на основно образование и прва година во средното образование:

$$\text{Бројот на мечки} = B(t) := a \cdot t + b\,.$$

За исто темпо, процент, за 1,5 %, експоненцијално, секоја година (месец, секунда, час) тогаш би требало да се користи **експоненцијалниот модел,** кој може да се користи во втора и трета годна на средно образование:

$$\text{Бројот на мечки} = B(t) := C \cdot r^t$$

Чекор 2: Дефинирање променливи.

Јасно објаснете му на одделението дека променливите се однесуваат за

- t е времето во години започнувајќи од одредена година и $t=0$ е состојбата со бројот на мечки во 2000 година
- B е бојот на мечки (или можеби бројот на илјада мечки)

Чекор 3: Дефинирање на параметрите.

Доколку се одлучиме да го поставиме времето да биде $t=0$ за да ја претставува 2000 година, тогаш пресекот на графикот и y-оската (наоѓање на b односно C) ќе соодветствува на првото мерење. Во овој случај директно можеме да запишеме дека: „Јасно е дека: $b=2500$ (линеарен модел), односно $C=2500$ (експоненцијален модел).“

Вториот параметар бара пресметување. Во линеарниот модел мора да го пресметате коефициентот на правец со:

$$a=\frac{\Delta B}{\Delta t}=\frac{2700-2500}{10}=20 \text{ мечки годишно.}$$

Или пак, можете да ја решите равенката $B=a\cdot t+b$ и во неа да го направите соодветните заменување $2700=a\cdot 10+2500$. Забележете дека оваа равенка се користи за да се определи втората непозната променлива. Годишното зголемување е 20 мечки годишно.

Работејќи со експоненцијалниот модел на сличен начин можете да ја решите равенката за да ја добиете втората променлива: $B=C\cdot r^t$, заменувајќи $2700=2500\cdot r^{10}$. Ако двете страни на равенката се поделат со 2500 ќе се добие $\frac{2700}{2500}=r^{10}$ или ако се направат следниве алгебарски операции

$$\frac{27}{25}=r^{10}, \frac{25+2}{25}=r^{10},\ 1+\frac{2}{25}=r^{10},\ 1+\frac{2\cdot 4}{100}=r^{10},\ 1{,}08=r^{10},$$

од каде што следува дека

$$1.08^{\frac{1}{10}}=\left(r^{10}\right)^{\frac{1}{10}} \Rightarrow r=1{,}08^{\frac{1}{10}}=\sqrt[10]{1{,}08}=1{,}0077258,$$

што значи дека годишното зголемување е околу $0{,}77\%$.

Во GeoGebra точките можат да се дефинираат како $A=(0,2500)$ и $B=(10,2700)$. Линеарниот модел ќе го добиеме со наредбата $\text{FitPoly}[A,B,1]$ или експоненцијлниот модел со наредбата $\text{FitGrowth}[A,B]$.

Чекор 4: Запишување на заклучоците преку формулирање модел.

Запишете: „Открив дека бројот на мечки може да се предвиди со помош на ...

- $B(t)=20\cdot t+2500$ *(линеарен модел),” односно*
- $B(t)=2500\cdot 1{,}0077258^{t}$ (*експоненцијален модел*).”

Чекор 5: Определување на бројот на мечки по одредено време.

Бидејќи го најдовме моделот, сè што треба да направиме е да ја ставиме вредноста за времето во нашиот модел. Бидете внимателни, годината 2025 соодветствува со $t=25$ и поради тоа

$B(t)=20\cdot 25+2500=3000$ мечки (линеарен модел), односно

$B(t)=2500\cdot 1{,}0077258^{25}=3030$ мечки (експоненцијален модел).

Во GeoGebra запишете $x=25$. Последната права е паралелна со y-оската и ги пресекува претходните два графици. Пресеците можат да се добијат со користење на алатката за пресек во GeoGebra (Слика 5).

Чекор 6: Определување кога бројот на мечки ќе достигне одреден број.

На сличен начин можеме да ги решиме равенките:

$B(t)=20\cdot t+2500$ за $B=3500$ (линеарен модел),

што ќе ни ја даде равенката $3500=20\cdot t+2500$, чие решение е

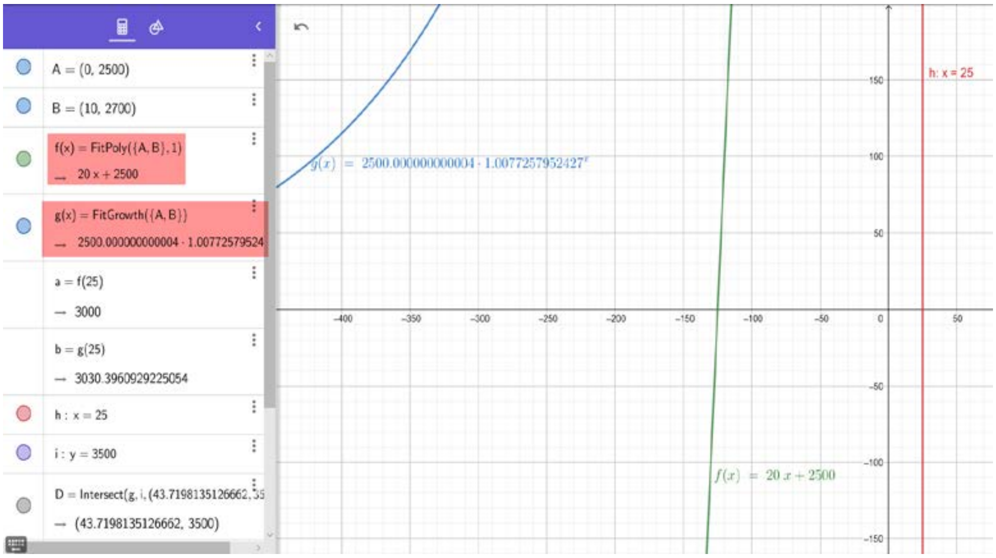
$$t=\frac{3500-2500}{20}=\frac{1000}{20}=50 \text{ години,}$$

што соодветствува на 2050 година, или

$B(t)=2500\cdot 1{,}0077258^{t}$ за $B=3500$ (експоненцијален модел),

што ќе ни ја даде равенката $3500=2500\cdot 1{,}0077258^{t}$ чие решение е $t=\dfrac{\ln 4}{\ln 1{,}0077258}=43{,}7$ години, што соодветствува на 2043 година.

Во GeoGebra запишете $y = 3500$ и определете ги пресечните точки исто како претходно (Слика 5).



Слика 5. Приказ на решението конструирано во GeoGebra [8].

5. МАТЕМАТИЧКО МОДЕЛИРАЊЕ КАКО УЧИЛИШЕН ПРЕДМЕТ

Како училишен предмет математиката повеќе не се однесува само на пресметувања. Некои делови од математиката, се разбира дека мора силно да се поврзани со процедурите и броењето, но сѐ заедно овој дел од наставната програма по математика, има сѐ помало нагласување денес отколку што имал во минатото. Денес, математиката се третира како алатка, како помош, како јазик и како логика. Наставната програма во многу земји денес се искажува во основа на цели поврзани со компетенции. Овие компетенции се општи и не се поврзани со специфична математичка содржина. Но, и покрај тоа, компетенциите се развиваат по нивоа од страна на учениците преку процесирање на одредени содржини. Во Шведска, на пример, математичкото моделирање е една од седумте компетенции кои учениците треба да ги развијат во нивното математичко образование, [2].

Во математичкото образование (основно и средно), наставниците работат со различни репрезентации со цел да им се помогне на учениците да ги разберат математичките објекти и концепти. Моделите како што се геометриските конструкции, графиците на функции, различните видови на дијаграми се користат за да се воведат нови концепти и да се прикажат врски, зависности и промени.

Сметаме дека штом учениците ќе се стекнат со компетенци за моделирање во училниците, сите останати компетенции ќе следат автоматски. Со практикување на математичко моделирање наместо вообичаеното прашање кое го добиваме од учениците „*Зошто го правиме ова и каде ќе го употребам ова?",* тие сè повеќе ќе откриваат дека работата на часовите ќе биде интересна и поврзана со реалноста, а потоа поимите, процедурите, решавањето проблеми, резонирањето и применливоста ќе следат без многу напор. Доколку ние, како наставници, се обидеме да го направиме тоа на друг начин, ќе сфатиме дека премногу работа со рутински пресметки води до немање време да се посветиме на компетенциите за моделирање и интерпретација.

За оние кои предаваат математичко моделирање во повисоките одделенија на основното или пак средното образование можеби добра идеја би била да се започне со веќе постоечки и добро развиени модели. А потоа, како што учениците стануваат сè позапознаени со концептот на математичко моделирање, можат да започнат со конструирање на нивни сопствени математички модели.

Во денешните училишта, наставниците имаат можност да им дозволат на учениците да користат моќни софтверски алатки кои ќе им помогнат во учењето и практикувањето на математиката на начин на кој во минатото не можело ни да се замисли. Учениците можат да се справат со тешки математички проблеми многу полесно со помош на тие алатки, за да можат да ги поврзат поимите и процедурите до одредени пореалистични ситуации и мисловно да се отворат кон поинаков и поразличен облик на комуникација.

6. ЗАКЛУЧОК

Да резимираме. Зошто е важно да се конструираат математички модели? Имено, [3]:

- Со реалните системи е невозможно да се експериментира.

- Реалните системи се премногу скапи за да може да си играме со нив.
- Реалниот систем е премногу опасен за да се експериментира со него. Може да се работи за нов модел на авион или пронаоѓање на точната доза на одреден лек
- Моделирањето ви нуди подобро разбирање на оригиналниот проблем.
- Моделирањето може да ги направи видливи одредени системи кои сè уште не се конструирани.
- Моделирањето може да ни помогне да ја предвидиме иднината и да правиме прогнози.

Јасно е дека, моделирањето не е нешто што се развива лесно во текот на неколку часови и недели. Наместо тоа треба да се прифати моделирачкиот мисловен склоп каде што моделирањето е природна почетна точка на многу ако не на сите модели, лекции или задачи. За да се развијат сите тие моделирачки подкомпетенции, потребно е овој ментален склоп да биде пренесен кон учениците со текот на времето. Како што се акумулираат искуствата на учениците со текот на времето, задача на наставниците е да се исковаат тие искуства заедно кон целина која има смисла. Ако ваквиот ментален склоп се постави да биде централен тогаш ќе откриеме дека компетенциите како на пример способноста да се прави ментална анализа, да се комуницира и да се пресметува ќе следат природно како компетенции при моделирање на проблеми.

ЛИТЕРАТУРА

[1] K. M. Bliss, K. R. Fowler, B. J. Galluzzo, *Math Modeling getting started & getting solutions*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2014.

[2] J. Hall, T. Lingefjard, *Mathematical Modeling – Applications with GeoGebra*, Wiley, 2016.

[3] M. L. Hernández, R. Levy, M. D. Felton-Koestler, R. Mary Zbiek, *Mathematical Modeling in the High School Curriculum,* Mathematics Teacher 110 (5) (2016), 336-342.

[4] Б. Шуминовска, И Стојковска, *Математичко моделирање и задачи на Ферми во наставата по математика*, Математички омнибус 2 (2017), 147-169.

[5] Е. Зеќири, Б. Шуминоска, И. Стојковска, *Што е математичко моделирање?*, Математика +, 13 декември 2017, https://matematika-plus.weebly.com/sto-e-matematicko-modeliranje.html

[6] GAIMME – *Guidelines for assessment & instruction in mathematical modeling education*, Consortium for Mathematics and Its Applications, Society for Industrial and Applied Mathematics, National Council of Teachers of Mathematics, report from April 2016, http://evoq-eval.siam.org/Portals/0/Publications/Reports/gaimme-full_color_for_online_viewing.pdf?ver=2018-03-19-115454-057

[7] *Definition of Model, Mathematical Models*, https://www.mathsisfun.com/definitions/model.html

[8] *GeoGebra, Graphing Calculator – GeoGebra*, *https://www.geogebra.org/graphing*

[1] ООУ Блаже Конески,
Самоилова 15, (7500) Прилеп, Р. Македонија
e-mail: bogdanoskiigor@oublazekoneski.edu.mk

[2] ООУ Климент Охридски,
Кузман Јосифоски бб, 7500 Прилеп, Р. Македонија
e-mail: monika.elim@yahoo.com

Примен: 08. 02. 2019
Поправен: 05. 06. 2019
Одобрен: 06. 06. 2019
Објавен на интернет: 7.06.2019