Sur une équation différentielle,

Bulletin de l'Académie royale de Belgique (Classe des Sciences)
Bruxelles, 1953, Série 5, t. 39, 179-182

Résumé. — M. Popov généralise les résultats établis par Görtler et Craig concernant l'équation différentielle ordinaire.

Plusieurs mémoires de M. Mitrinovitch (1), nous ont suggéré de donner la généralisation des résultats établis par Görtler (2), Craig (3) et d'autres, concernant l'intégration de l'équation différentielle (*).

$$y'' + (ae^x + b)y' + (Ae^{2x} + Be^x + C) = 0, \tag{1}$$

où a, b, A, B, C, sont des constantes arbitraires.

Dans les Mémoires cités, M. Mitrinovitch a obtenu la proposition suivante :

L'équation différentielle

$$fy'' + (f' + g + fh)y' + (g' + gh)y = 0 \tag{2}$$

où

$$f = f(x) \neq 0, \qquad g = g(x), \qquad h = h(x), \tag{3}$$

se réduit au système intégrable

$$\begin{aligned} fy' + gy &= z \\ z' + hz &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

En utilisant la proposition précédente, il est possible de trouver une condition d'intégrabilité très générale pour l'équation (1).

En effet, ayant en vue le caractère arbitraire des fonctions (3) on peut prendre

(*) Les lettres accentuées désigneront, dans ce qui suit, les dérivées prises par rapport à x.

$$(5) \qquad f = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i e^{(n-i)x}, \quad g = \sum_{i=0}^{n+1} \beta_i e^{(n-i+1)x}, \quad h = \omega_1 x + \omega_2$$

ou α_i, β_i, ω_i sont des constantes.

Dans ce cas, en comparant les équations (1) et (2), on voit que, l'équation (2) ramène à l'équation (1), toutes les fois que les identités

$$(6) \qquad \begin{aligned} f' + g + fh &= f(ae^x + b), \\ g' + gh &= f(\mathrm{A}e^{2x} + \mathrm{B}e^x + \mathrm{C}) \end{aligned}$$

sont satisfaites.

Par suite, lorsque les identités (6) sont remplies, on a lieu d'un système d'équations algébriques de la forme

$$\begin{gathered} (n - i + 1 - b + \omega_2)\alpha_{i-1} + (\omega_1 - a)\alpha_i + \beta_i = 0, \\ (n - i + 2 + \omega_2)\beta_{i-1} + \omega_i\beta_i - \mathrm{A}\alpha_i - \mathrm{B}\alpha_{i-1} - \mathrm{C}\alpha_{i-2} = 0, \\ (i = 0, 1, 2, \ldots n + 2). \end{gathered}$$

De là, on trouve les paramètres α_i, β_i, ω_i aussi bien que l'on obtient la relation entre les coefficients a, b, A, B, C et le nombre naturel n

$$(7) \qquad ab - 2\mathrm{B} + a = \pm (a^2 - 4\mathrm{A})^{\frac{1}{2}}[2n + 1 - (b^2 - 4\mathrm{C})^{\frac{1}{2}}],$$

qui est la condition d'intégrabilité demandée par l'équation (1).

Ainsi, d'après ce qui précède, on peut énoncer le résultat suivant :

L'équation (1) *est intégrable dans le cas où entre les coefficients* a, b, A, B, C *et le nombre naturel* n *existe la relation* (7). *Alors, on peut la réduire au système* (4) *avec* (5).

Cas particuliers. — Le résultat obtenu ci-dessus permet de montrer que les résultats divers, obtenus par d'autres auteurs, dérivent de source commune (7) comme cas particuliers.

Par exemple, Görtler [2] a donné quelques cas particuliers intégrables de l'équation (1). Ce sont

$$\begin{aligned} y'' + (ae^x + b)y' - 4p(a + p)e^{2x} + (aq + bp + 2pq + p)e^x& \\ + (b + q)qy = 0&, \end{aligned}$$

$$y'' + (ae^x + b)y' + a(b + q + 1)e^x - q(b + q)y = 0.$$

p et q sont deux paramètres arbitraires.

Il est évident que les constantes de ces équations satisfont à la (7) en cas $n = 0$.

Görtler (2) a montré aussi que l'équation

$$y'' + ay' + (be^x + c)y = 0,$$

s'intègre par les fonctions cylindriques.

Si nous avons entre les coefficients a, b et c la relation

$$a^2 - 4c = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2,$$

l'équation (8) est élémentairement intégrable et les fonctions cylindriques sont par conséquence élémentaires.

Les paramètres des équations de CONTE (4), CRAIG (3), MORRIS-BROWN (5) satisfont aussi, comme on voit immédiatement à la condition (7).

Remarque. — L'équation plus générale

$$y'' + (ae^{kx} + b)y' + (Ae^{2kx} + Be^{kx} + C)y = 0$$

où

$$k = \text{const.},$$

par la transformation $kx = z$, se ramène à l'équation de la forme (1).

BIBLIOGRAPHIE

1. Sur un procédé fournissant des équations différentielles linéaires intégrables d'un type assigné d'avance. *Publ. de l'Inst. Math. de l'Acad.*, Serbe des Sc., t. III, p. 230, 1950.
   Voir aussi : Sur un cas de réductibilité d'équations différentielles linéaires, *C. R.*, t. 230, p. 1130, 1950.
2. H. GÖRTLER, Etgänzungen zu : Kamke, Differentialgleichungen. — Lösungsmethoden und Lösungen. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, Bd. 22, S. 233, 1942.
3. E. KAMKE, Differentialgleichungen : Lösungsmethoden und Lösungen, B. 1, III Auflage, S. 422, 1944.
4. L. CONTE, Sull'integrazione delle equazioni differenziali lineari del secondo ordine. *Publ. Math. de l'Univ. de Belgrade*, t. VI-VII, p. 119, 1937-38.
5. E. KAMKE, *loc. cit.*, p. 418.