ПРЕТСТАВУВАЊЕ ЕЛЕМЕНТИТЕ НА ЕДЕН ТРИАГОЛНИК КАКО СУМА НА РЕДОВИ

Билтен на Друштвото на математичарите и физичарите
од Н Р Македонија, кн. V, 1954, 19-21

1. Во еден триаголник нека се дадени две страни a и b и аголот меѓу нив γ. Притоа нека е $a > b$. Тогај аголот спрема b е сума на редот [1]

$$\beta = \lambda \sin\gamma + \frac{\lambda^2}{2}\sin 2\gamma + \frac{\lambda^3}{3}\sin 3\gamma + \cdots$$
$$(\lambda = b/a).$$

Од синусната теорема

$$\frac{a}{\sin(\gamma+\beta)} = \frac{b}{\sin\beta}.$$

имаме

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\lambda\sin\gamma}{1-\lambda\cos\gamma}$$

или [2]

(1) $$\beta = \operatorname{arc\,tg}\frac{\lambda\sin\gamma}{1-\lambda\cos\gamma}.$$

Зимајќи во предвид

$$\operatorname{arc\,tg} x = \sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{x^{2r-1}}{2r-1}, \quad |x| \leqslant 1,$$

и

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k, \quad |x| < 1,$$

имаме за (1)

$$\beta = \sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{\lambda^{2r-1}}{2r-1}\sin^{2r-1}\gamma\,(1-\lambda\cos\gamma)^{1-2r}$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{r+s-2}\frac{1}{2r-1}\binom{1-2r}{s-1}\lambda^{s+2r-2}\sin^{2r-1}\gamma\cos^{s-1}\gamma$$

или

$$\beta = \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{1}{s-1}\binom{s+2r-3}{s-2}\lambda^{s+2r-2}\sin^{2r-1}\gamma\cos^{s-1}\gamma$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{1}{s+2r-2}\binom{s+2r-2}{2r-1}\lambda^{s+2r-2}\sin^{2r-1}\gamma\cos^{s-1}\gamma.$$

Ако ставиме

$$s+2r-2 = k$$

и извршиме смена на сумирањето, добиваме

$$\beta = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k}\sum_{r=1}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]}(-1)^{r-1}\binom{k}{2r-1}\sin^{2r-1}\gamma\cos^{k-2r+1}\gamma.$$

Бидејќи е

$$\sin k\varphi = \sum_{r=1}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]}(-1)^{r-1}\binom{k}{2r-1}\sin^{2r-1}\varphi\cos^{k-2r+1}\varphi,$$

имаме конечно

$$\beta = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k} \sin k\gamma.$$

2. Аналогно на горното, може да се докаже и следниот резултат:

Ако a и b $(a > b)$ се две страни на еден триаголник и γ агол меѓу нив, страната спрема аголот γ е сума на редот

$$c = \frac{a}{4\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \sum_{\substack{r,\,s=0 \\ r+s=k}}^{k} \frac{\Gamma\left(r-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)}{r!\; s!} \cos(r-s)\gamma. \tag{2}$$

$$(\lambda = b/a).$$

Навистина, спрема косинусната теорема имаме

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

или

$$c = a(1 - 2\lambda\cos\gamma + \lambda^2)^{1/2}.$$

Од друга страна пак

$$R\{\lg(1 - \lambda e^{\gamma i})^{-1}\} = \lg(1 - 2\lambda\cos\gamma + \lambda^2)^{-1/2},$$

и добиваме [3]

$$\lg c = \lg a - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \frac{\cos k\gamma}{k}$$

кое може да биде пишано и во обликот (2).

ЛИТЕРАТУРА

[1] B. L. van der Waerden, *Elemente der Mathematik*, Aufgabe 224. B. IX. Nr. 6. S. 186 (1954).

[2] K. Knopp, *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen* S. 439 (1922).

[3] W. Magnus — F. Oberhettinger, *Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der Mathematischen Physik*, S. 78 (1943).

THE ELEMENTS OF A TRIANGLE AS THE SUMS OF THE SERIES

(Summary)

In this Note we give a proof of the following result.

Let a, b $(a > b)$ be the sides and γ the included angle of a triangle. Then:

1° the angle β, the opposite of the side b is the sum of the series [1]

$$\beta = \lambda \sin\gamma + \frac{\lambda^2}{2}\sin 2\gamma + \frac{\lambda^3}{3}\sin 3\gamma + \cdots$$

$$(\lambda = b/a).$$

2° the side c, the opposite of the angle γ is the sum of the series

$$c = \frac{a}{4\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \sum_{\substack{r,\,s=0 \\ r+s=k}}^{k} \frac{\Gamma\left(r-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)}{r!\; s!} \cos(r-s)\gamma,$$

or

$$\lg c = \lg a - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \frac{\cos k\gamma}{k}.$$