SUR QUELQUES INTÉGRALES DÉFINIES

ГОДИШЕН ЗБОРНИК НА ФИЛОЗОФСКИОТ ФАКУЛТЕТ
НА УНИВЕРЗИТЕТОТ ВО СКОПЈЕ, Книга 9, N°2, (1956), 15-20

1. Le but de la Note présente est de donner la demonstration de la formule

$$\int_0^1 x^{r-1}(1-x^l)^{q-1}(1-zx^p)^{-\alpha}\,dx = \frac{1}{l}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_i}{i!}B\left(\frac{r+ip}{l},\,q\right)z^i,$$

où p, q, l, r sont des nombres positifs, B l'intégrale eulérienne de première espèce et

$$(\alpha)_i = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+i-1),$$

$$(\alpha)_0 = 0.$$

Cette formule renferme comme cas particuliers les deux suivantes:

$$1^\circ \quad \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{\binom{m}{k}}{(r+kp)^{\nu/l}} = \frac{1}{l^{\nu-1}(\nu-1)!}\int_0^1 x^{r-1}(1-x^l)^{\nu-1}(1-x^p)^m\,dt,$$

où $(r+kp)^{q/l}$ est le symbole de Kramp et m, ν des nombres naturels[1]);

$$2^\circ \quad \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{\binom{m}{k}}{a+m-k} = (-1)^m B(a,\,m+1),$$

a, m sont un entier et un positif[2]).

2. Par définition on a

$$\int_0^1 u^{p-1}(1-u)^{q-1}\,dx = B(p,q),$$

$$(p>0,\ q>0).$$

La transformation élémentaire $u = x^s$ nous donne

$$\int_0^1 x^{k-1}(1-x^s)^{q-1}\,dx = \frac{1}{s}B\left(\frac{k}{s},\,q\right),$$

$$k = sp,\ s>0.$$

Il est connu que la série

$$(2) \qquad (1-zx)^{-\alpha} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_i}{i!}x^i z^i$$

est uniformement convergente (pour z fixée) par rapport à x, dans l'intervalle [0, 1]. Si nous multiplions (2) par $x^{k-1}(1-x^s)^{q-1}\,dx$ et intégrons de 0 à 1, nous obtiendrons

$$\int_0^1 x^{k-1}(1-x^s)^{q-1}(1-zx)^{-\alpha}\,dx =$$

$$= \frac{1}{s}B\left(\frac{k}{s},\ q\right) + \frac{1}{s}\cdot\frac{\alpha}{1}zB\left(\frac{k+1}{s},\ q\right) +$$

$$+ \frac{1}{s}\,\frac{\alpha(\alpha+1)}{1\cdot 2}z^2B\left(\frac{k+2}{s},\ q\right) + \cdots$$

$$= \frac{1}{s}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_i}{i!}z^iB\left(\frac{k+i}{s},\ q\right).$$

Une nouvelle transformation $x=y^p$, après le changement de y par x, nous donne

$$\int_0^1 x^{r-1}(1-x^l)^{q-1}(1-zx^p)^{-\alpha}\,dx = \tag{3}$$

$$= \frac{1}{l}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_i}{i!}B\left(\frac{r+ip}{l},\ q\right)z^i,$$

$$r=kp,\quad l=ps.$$

3. Il est évident que la formule 1° s'obtient comme cas particulier de (3) en prenant $\alpha=-m$, $z=1$, m et q nombres naturels.

En effet, on a

$$\int_0^1 x^{r-1}(1-x^l)^{q-1}(1-x^p)^m\,dx = \frac{1}{l}\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}B\left(\frac{r+ip}{l},\ q\right)$$

$$= l^{q-1}(q-1)!\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\frac{\binom{m}{i}}{(r+ip)^{l/p}},$$

vu que

$$B\left(\frac{r+ip}{l},\ q\right) = \frac{l^q(q-1)!}{(r+ip)^{l/p}}.$$

4. Nous pouvons aussi considérer les résultats donnés plus haut comme conséquences de la formule[8])

$$\int_0^1 f(zx)(1-x^s)^{q-1}x^{k-1}\,dx = \frac{1}{s}\sum_{i=0}^{\infty}a_iB\left(\frac{k+i}{s},\ q\right)z^i \tag{4}$$

$$|x|<\rho$$

où

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

est une série avec le rayon de convergence $\rho \geqslant 1$, et $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{(i+1)^m}$ une série convergente.

5. En choisissant convenablement la fonction $f(x)$, dans la relation (4), on peut obtenir des formules différentes. Par exemple:

a) $$\int_0^1 x^{k-1}(1-x^s)^{q-1} F(a,b,c,x^r z)\, dx = \frac{1}{s}\sum_{i=0}^{\infty} \frac{B(a,i)\, B(b,i)}{B(c,i)}\, B\left(\frac{k+ir}{s},\, q\right) z^i$$

b) $$\int_0^1 x^{k-1}(1-x^s)^{q-1} \operatorname{arctg} x = \frac{1}{s}\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2i+1}\, B\left(\frac{k+2i+1}{s},\, q\right)$$

c) $$\int_0^1 x^{k-1}(1-x^s)^{q-1} \lg(x+1) = \frac{1}{s}\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1}\, B\left(\frac{k+i+1}{s},\, q\right)$$

d) $$\int_0^1 x^{k-1}(1-x^s)^{q-1} e^{-x}\, dx = \frac{1}{s}\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!}\, B\left(\frac{k+i}{s},\, q\right)$$

BIBLIOGRAPHIE

1. D. S. Mitrinovitch, *Sur quelques formules sommatoires*, Publication de la Faculté d'éléctrotechnique de l'Université à Belgrade № 7 (1956).
2. Question 3477, *Mathesis*, t. LXI, 1952, p. 237.
3. N. Nielsen, *Handbuch der Theorie der Gamafunktion*, Teubner, Leipzig, 1906, S. 161.

ЗА НЕКОИ ОПРЕДЕЛЕНИ ИНТЕГРАЛИ

(Резиме)

Во трудот се дава следната формула

$$\int_0^1 x^{r-1}\left(1-x^l\right)^{q-1}\left(1-zx^p\right)^{-\alpha} dx = \frac{1}{l}\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_i}{i!}\, B\left(\frac{r+ip}{l},\, q\right) z^i,$$

каде што се p, q, l, и r позитивни броеви, а B интеграл на Ојлер од прв вид и

$$(\alpha)_i = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+i-1), \quad (\alpha)_0 = 1.$$

Така изведената формула претставува извесно уопштување на некои познати резултати[1]) [2])

Можат да се изведат и други аналогни формули што е и учинето во трудот.