Sur la résolution générale d'une classe d'équations,

Bulletin de l'Académie royale de Belgique (Classe des Sciences)

Bruxelles, 1956, Série 5, t. 42, 1107-1109

1. Dans ce qui suit, nous allons mettre en évidence une formule qui nous donne explicitement les racines de l'équation

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{n} [f(x)]^{a_i} - A = 0, \qquad a_i \text{ — rationnels,}$$

en fonction de a_i, A et d'un paramètre arbitraire, fixé dans le domaine considéré D.

Il est évident que l'équation (1) contient comme cas particuliers les équations

$$\Sigma x^{a_i} - A = 0; \qquad \Sigma(\cos x)^{a_i} - A = 0; \qquad \Sigma(lgx)^{a_i} - A = 0, \ldots$$

L'équation $\sum\limits_{i=1}^{n} x^{a_i} - A = 0$ a été étudiée par Kennedy [1], Orloff [2] et d'autres, qui ont donné une solution très spéciale, qui ne diffère pas de celle qu'on peut obtenir par une application directe de la méthode d'approximation de Newton [3].

2. L'équation (1), par le changement $f(x) = e^u$, se transforme en

$$(2) \qquad \Phi(e^u) = \sum_{i=1}^{n} e^{a_i u} - A = 0.$$

Supposons que u_0 est une valeur approchée de la racine u de l'équation (2), et posons

$$u = u_0 + h.$$

Nous avons reçu, en appliquant simplement les résultats classiques de la théorie de développement de Taylor, pour h, l'expression suivante :

(*) Cette note a été présentée à l'Académie par TH. DE DONDER (séance du 1er décembre 1956).

$$h = -\Phi(e^{u_0})\frac{C_n}{C_{n+1}} - (u-u_0)^{n+2}\frac{C'_{n+1}}{C_{n+1}}, \tag{3}$$

où

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}\Phi^{(k)}\Phi^{k-1}C_{n-k}, \qquad C_0 = 1,$$

$$C'_n = \begin{vmatrix} \varphi_{n+1} & \Phi''/2! & \Phi'''/3! & \dots & \Phi^{(n)}/n! \\ \varphi_n & \Phi' & \Phi''/2! & \dots & \Phi^{(n-1)}/(n-1)! \\ \varphi_{n-1} & \Phi & \Phi' & \dots & \Phi^{(n-2)}/(n-2)! \\ \dots & \dots & \dots & & \\ \varphi_2 & 0 & 0 & \dots & \Phi' \end{vmatrix}$$

et

$$\Phi^{(k)} = \Phi^{(k)}(e^{u_0}) = \sum_{i=1}^{n} a_i^k e^{a_i u_0}; \qquad \varphi_k = \frac{\Phi^{(k)}(e^{u_0})}{k!\,\Phi^{j}(e^{u_0})},$$

$$k+j = n+2, \qquad u_0 \in \mathrm{D}.$$

$$\Phi^k = \Phi^k(e^{u_0}) = \sum_{\nu_1+\dots+\nu_{n+1}=k} \frac{(-\mathrm{A})^{\nu_{n+1}}k!}{\nu_1!\,\nu_2!\dots\nu_{n+1}!} e^{u_0 \sum_{i=1}^{n} a_i \nu_i}.$$

3. La deuxième quantité qui figure dans le second membre de (3) nous donne l'erreur commise en prenant seulement pour h la première du même membre.

Les résultats de Kennedy et Orloff peuvent s'obtenir comme cas particulier de (3) pour $n = 0$ et $f(x) = x$, en négligeant la deuxième quantité.

Démonstrations, extensions et applications paraîtront dans une autre publication.

BIBLIOGRAPHIE

1. The Tohoku Mathematical Journal, V, 35, 1932, p. 304.
2. Journal de l'inst. math. d'Ukraine, N° 2, 1935, p. 55.
3. Willers, Jahrbuch über die Fortschritte der Math. B. 58/1, S. 584.