SUR UN PROCÉDÉ DE RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS

BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
Paris, 1957, Série 2, t. LXXX1, 1-3

1. Soit $f(x)=0$ une équation algébrique de degré n et α_i ses racines. Laguerre ([1]) a montré que, si x est une valeur suffisamment approchée de la racine α_1, la première quantité qui figure dans le second membre de la relation

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{(x-\alpha_1)}+\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{x-\alpha_i} \tag{1}$$

est beaucoup plus grande que les autres, c'est-à-dire que, en les négligeant, on obtient une formule de laquelle on déduit une valeur approchée de α_1, qui ne diffère pas de la valeur donnée par la méthode d'approximation de Newton.

Dans le Mémoire cité, Laguerre dit : « Je ne chercherai pas ici à corriger cette méthode en essayant d'obtenir une valeur approchée des termes négligés... ».

C'est précisément l'objet de cette Note. En reprenant l'intention abandonnée par l'éminent géomètre, nous donnons une formule plus générale que celle qu'il a mentionnée.

En second lieu, nous allons résoudre l'équation donnée par une autre méthode et obtenir la valeur absolue de l'erreur commise en négligeant des termes.

2. Le quotient des $(k-1)$-ième et k-ième dérivées de (1) nous donne

$$\Phi(x)\frac{L_{k-1}(x)}{L_k(x)}=\frac{1/(x-\alpha_1)^k+A_k(x)}{1/(x-\alpha_1)^{k+1}+A_{k+1}(x)},$$

avec

$$L_k(x)=\sum_{i=1}^{k}\frac{(-1)^{i-1}}{i!}\Phi^{i-1}(x)\,\Phi^{(i)}(x)\,L_{k-i}(x),\qquad L_0(x)=1,$$

$$A_s(x)=\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{(x-\alpha_i)^s},\qquad \Phi(x)=\frac{f(x)}{f'(x)},\qquad \Phi^{(s)}(x)=\frac{d^s\Phi}{dx^s}.$$

Si nous omettons A_k et A_{k+1}, on a

$$\bar{\alpha}_1=\bar{x}-\Phi(\bar{x})\frac{L_{k-1}(\bar{x})}{L_k(\bar{x})}, \tag{2}$$

([1]) *Œuvres*, t. I, 1898, p. 87.

où $\overline{x}$ est une valeur d'un intervalle (a, b) contenant α_1 et $\overline{\alpha}_1$ une valeur approchée de α_1.

3. Considérons maintenant, au lieu de $f(x) = 0$, l'équation

$$x = F(x),$$

$$(3) \qquad F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} P(x), \qquad P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i (x - x_0)^i,$$

x_0 désignant une constante fixée dans (a, b) et les coefficients a_i étant arbitraires. Nous les choisissons de telle façon [2] que $F^{(i)}(x_0) = 0$, pour $i = 1, 2, \ldots, n+1$. Ces conditions nous donnent un système de $(n+1)$ équations linéaires par rapport à a_i, à savoir

$$\sum_{r=0}^{n} \frac{\Phi^{(r)}(x_0)}{r!} a_{n-r} = \begin{cases} 1 & \text{pour } n = 1, \\ 0 & \text{pour } n = 2, 3, \ldots, n+1. \end{cases}$$

La résolution de ce système donne

$$a_r = \frac{(-1)^r \Phi^{-r}(x_0)}{L_{n+1}(x_0)} [L_r(x_0) L_n(x_0) - L_{r-1}(x_0) L_{n+1}(x_0)]$$
$$(r = 0, 1, \ldots, n).$$

En substituant ces valeurs de a_r dans (3), on a

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x) L_{n+1}(x_0)} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \Phi^{-r}(x_0)$$
$$\times [L_r(x_0) L_n(x_0) - L_{r-1}(x_0) L_{n+1}(x_0)] (x - x_0)^r.$$

Si nous prenons $x_1 = F(x_0)$ comme valeur approximative de la racine α_1, on a (2) en remplaçant $\overline{x}$ par x_0, $\overline{\alpha}_1$ par x_1 et en prenant $k = n$.

4. L'erreur R commise en prenant $\overline{\alpha}_1$ pour valeur approchée, ce qui veut dire en négligeant les A_k, est

$$R = \frac{F^{(n+2)}(\overline{x}_0)}{(n+2)!} (\alpha_1 - \overline{x})^{n+2}, \qquad a < \overline{x}_0 < b,$$

dont la valeur absolue ne dépasse pas $\frac{M_n}{(n+2)!} y^{n+2}$, où

$$M_n = \max |F^{(n+2)}(x)|, \qquad y = \max |x - \overline{x}|, \qquad a \leqq x \leqq b.$$

5. Il est évident que la formule (2) reste valable pour une équation $\varphi(x) = 0$ quelconque, si la fonction $\varphi(x)$ admet, autour de α, des dérivées continues jusqu'à l'ordre $n+2$. Dans les applications, il y a beaucoup de simplifications, ce qui montre l'efficacité de la méthode proposée.

(2) M. S. Gornstein, *Dokl. Akad. Nauk. S. S. S. R.*, t. 78, n° 2, 1951, p. 193.