ENCHAINEMENT ET QUANTITATION

CAS DU ROTATEUR SPHERIQUE

Par
GABRIEL VIGUIER
à Paris

Introduction

La notion d'états énergétiques, qui satisfait bon nombre de nos espérances et nous permet de vastes synthèses, existait sous des formes variées, plus ou moins dissimulées; A. BUHL l'a signalé dans la préface d'une de nos précédentes notes [1].

Cependant, voulant bien admettre avec M. Louis de BROGLIE que „rien de ce qui a été fait n'a été fait sans les quanta", nous pensons qu'il n'est pas exclu pour l'avenir, que des notions toutes nouvelles, profondément cachées, soient mises à jour par la pensée, effort scientifique, lorsque s'amorceront des synthèses encore plus étendues.

Restant dans le domaine actuel de la quantification, nous avons précédemment montré, faisant choix du cas particulier de l'oscillateur harmonique linéaire, qu'il était possible de faire correspondre à la théorie des quanta, des notions métriques liées à l'équation classique de Riccati, et ainsi aborder le discontinu par le continu ou inversement.

Nous avons dès lors songé, mis en présence de ces faits remarquables, à pousser plus avant notre analyse.

Dans la présente note, nous considérons un corpuscule de masse m se mouvant, conformément à la nouvelle Mécanique, sur une sphère de rayon R; c'est le cas du „rotateur sphérique" [2].

Le rotateur sphérique

Nous partons de l'équation de Schrödinger donnant la propagation d'un corpuscule de charge m dans un champ où la fonction d'ondes est ψ.

Admettant l'existence d'états stationnaires, nous pouvons envisager des solutions monochromatiques permettant le changement de fonction d'ondes:

$$Y_k = \psi\, e^{-\frac{2\pi i}{h} E_k t} \tag{1}$$

h désignant le quantum d'action, E_k l'énergie d'oscillation, I le moment d'inertie du rotateur; la fonction potentielle V étant nulle, l'équation de propagation s'écrit:

$$\frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 Y_k}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 Y_k}{\partial\theta^2} + \cot\theta\,\frac{\partial Y_k}{\partial\theta} + \frac{8\pi^2}{h^2}\,E_k I\, Y_k = 0. \tag{2}$$

Les différents points de la surface sphérique sont repérés par la latitude θ et la longitude φ. La nouvelle fonction $Y_k(\theta, \varphi)$ est la fonction sphérique de Laplace. Cherchant à quelles conditions, la fonction Y_k est continue, uniforme, et finie dans tout l'espace occupée par l'onde avec

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,$$

nous sommes amené à envisager des solutions de la forme:

$$Y_k(\theta, \varphi) = e^{\pm i m \varphi} P_k^m(x), \tag{3}$$

m est un entier positif, $x = \cos\theta$ et $P_k^m(\cos\theta)$ est le polynôme de Legendre associé.

On montre que les valeurs propres de l'énergie du rotateur sphérique sont données par la relation:

$$E_k = k(k+1)\,\frac{h^2}{8\pi^2 I}, \quad (k = 0,\ 1,\ 2 \cdots). \tag{4}$$

Avec de telles hypothèses, l'équation (2) pour laquelle on considère le polynôme de Legendre d'ordre $k\,(m=0)$ s'écrit:

$$\sin^2\theta\,\frac{d^2 P_k(x)}{dx^2} - 2\cos\theta\,\frac{dP_k(x)}{dx} + k(k+1)\,P_k(x) = 0. \tag{5}$$

De même que nous avons montré que les propriétés très importantes des polynômes d'Hermite H_k, intervenant dans l'étude de l'oscillateur harmonique linéaire de Planck, pouvaient être traduites par des propriétés géométriques associées à une équation de Riccati, nous allons montrer qu'il est possible d'aborder l'équation (5), c'est-à-dire les polynômes de Legendre, à partir de notions métriques simples liées à une même équation de Riccati.

Nous faisons le changement de fonction:

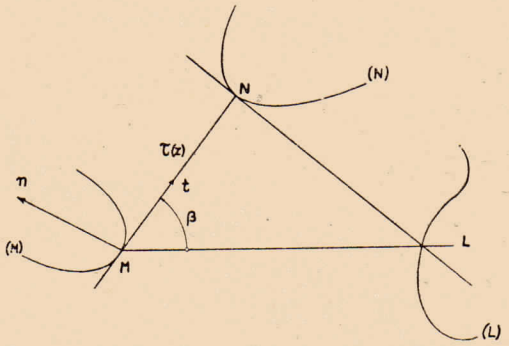
$$\tau(x) = \frac{\sin^2\theta}{P_k(x)} \cdot \frac{d_k P(x)}{dx}. \tag{6}$$

L'équation différentielle du second ordre (5) se présente alors sous la forme de l'équation de Riccati

$$\frac{d\tau}{dx} + \frac{\tau^2}{1-x^2} + k(k+1) = 0. \tag{7}$$

Utilisons la théorie des développantes généralisées planes [3] liée à l'équation de Riccati du type général

$$\frac{d\tau}{dx} + P(x)\tau^2 + Q(x)\tau + R(x) = 0. \tag{8}$$



Sur la tangente en M à une courbe base (M), donnée en coordonnées paramétriques par:

$$\xi = \xi(x), \quad \eta = \eta(x), \tag{9}$$

nous portons un segment

$$\overline{MN} = \tau(x),$$

nous déterminons les courbes (N) lieu du point N telles que la tangente en N à ces „développantes généralisées" passe par le point L d'une courbe-adjointe (L) dont les coordonnées paramétriques sont:

$$F = F(x), \quad G = G(x). \tag{10}$$

Posant:

$$(11) \qquad \omega_1 = \overrightarrow{ML} \wedge \overrightarrow{Mt}, \qquad \omega_2 = \overrightarrow{ML} \wedge \overrightarrow{Mn},$$

la mise en équation de ce problème géométrique conduit à une équation de Riccati du type (8):

$$(12) \qquad \frac{d\tau}{dx} - \alpha' \frac{\sigma_1'}{\omega_1} \tau^2 + \alpha' \frac{\omega_2}{\omega_1} \tau + \sigma_1' = 0,$$

où nous avons:

$$(13) \; \sigma_1'^2 = \xi'^2 + \eta'^2; \; \operatorname{tg} \alpha = \frac{\eta'}{\xi'}; \; \omega_1 = \overline{ML}.\sigma_1'.\sin\beta; \; \omega_2 = \overline{ML}.\sigma_1'\cos\beta.$$

Associons l'équation de Schrödinger transformée à notre problème des développantes généralisées, c'est-à-dire identifions les équations (7) et (12), nous obtenons les relations:

$$(14) \qquad \sigma_1' = k(k+1); \; \omega_2 = 0; \; \omega_1 = \alpha' k(k+1)(x^2 - 1).$$

La seconde de ces trois égalités donne $\beta = \pi/2$, le point L est sur la normale à la courbe base.

Nous prendrons par exemple les valeurs:

$$(15) \qquad \left| \begin{array}{l} \xi = k(k+1)\cos x \\ \eta = k(k+1)\sin x \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} F = [x^2 - 1 + k(k+1)]\cos x \\ G = [x^2 - 1 + k(k+1)]\sin x. \end{array}$$

Les coordonnées ainsi choisies du point M montrent qu'il est possible d'aborder une théorie oscillatoire, telle que celle du rotateur sphérique, comme d'ailleurs celle de l'oscillateur harmonique linéaire, à partir d'isométriques de cercles.

Comme le dit A. BUHL, nous lions une fois de plus des notions métriques classiques aux notions de quanta.

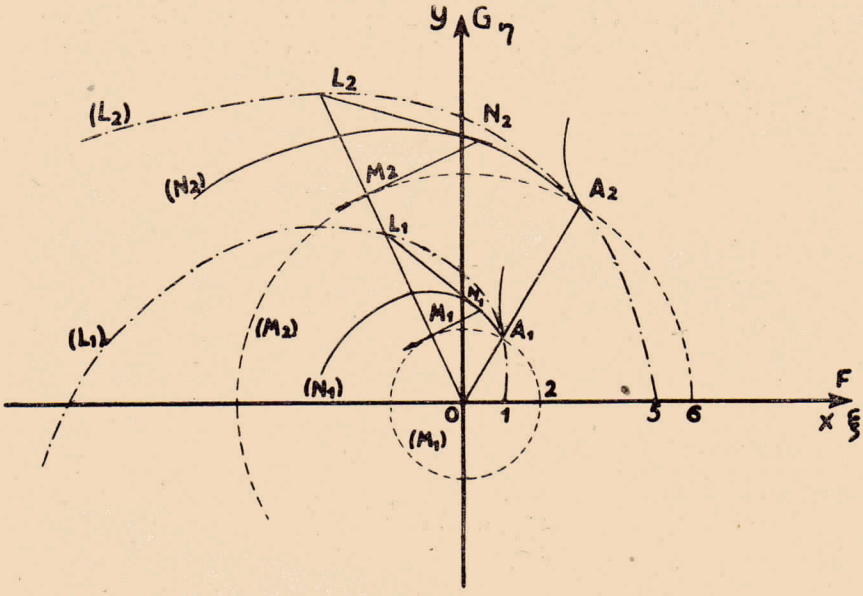
Nous avons construit sur la figure ci-jointe les développantes (N_1) et (N_2) correspondant aux niveaux d'énergie $k = 1$, $k = 2$.

La courbe adjointe traverse la courbe-base au point A_1 ou A_2 correspondant à la valeur $x = 1$; en ce point la développante présente un point de rebroussement.

Nous pouvons en outre remarquer que nous avons l'égalité des segments:

$$\overline{M_1 M_2} = \overline{L_1 L_2} = 4.$$

Considérant trois états énergétiques, $k-1$, k, $k+1$, les points correspondants M_{k-1}, M_k, M_{k+1}, d'une part, et L_{k-1}, L_k, L_{k+1} d'autre part, déterminés par une même valeur de l'angle polaire x sont tels que nous avons les relations:



$$\overline{M_{k-1}M_k} = \overline{L_{k-1}L_k} = 2k, \tag{16}$$
$$\overline{M_kM_{k+1}} = \overline{L_kL_{k+1}} = 2(k+1),$$

c'est-à-dire:

$$\overline{M_kM_{k-1}} + \overline{M_kM_{k+1}} = \overline{L_kL_{k-1}} + \overline{L_kL_{k+1}} = 2. \tag{17}$$

Le niveau d'énergie correspondant à la valeur $k=0$ donne le centre O des cercles M_i comme point M_0; prenant le niveau $k=p$ (p entier positif quelconque) fournissant les points M_p et L_p pour un même angle polaire x, celui du point L_0, les relations précédentes nous permettent d'écrire:

$$\overline{OM_p} = \overline{L_0L_p} = p(p+1). \tag{18}$$

Reprenons l'équation de Riccati (7) que nous écrivons, grâce à la transformation homographique:

$$\tau . v + k\ (k+1) = 0, \tag{19}$$

sous la forme canonique:

$$\frac{dv}{dx} + v^2 = \frac{k(k+1)}{x^2 - 1}. \tag{20}$$

Nous avons encore ici un exemple de niveaux d'énergie tels qu'en passant de l'un à l'autre, on passe également d'une forme canonique d'une équation de Riccati à une autre forme canonique de la même équation et ce par des homographies différentes.

A partir de l'équation (20) nous pouvons passer au second ordre en posant:

$$v = \frac{V_0'}{V_0}. \tag{21}$$

Nous obtenons alors:

$$\frac{V_0''}{V_0} = \frac{k(k+1)}{x^2 - 1}, \tag{22}$$

que nous écrivons:

$$\frac{V_0''}{V_0} = \frac{k(k+x^2)}{x^2 - 1} - k. \tag{23}$$

Nous préférons la forme (23) car elle nous permet de rejoindre le théorème de Darboux qui conduit à la formation de chaînes d'équations.

Cependant nous sommes obligé de généraliser ce théorème car sous la forme énoncée par Darboux [4] il ne permet pas d'exploiter l'équation (22).

Nous partons de l'équation

$$\frac{y_1''}{y_1} = \varphi(t, h) + h, \tag{24}$$

avec

$$\frac{f''}{f} = \varphi(t, h_1) + h_1. \tag{25}$$

Nous posons

$$\Phi = \varphi(t, h) - \varphi(t, h_1) + h - h_1, \tag{26}$$

et nous modifions le théorème de Darboux en le présentant sous la forme suivante:

Considérant l'équation (24) et sachant intégrer l'équation (25), si nous utilisons la notation (26) nous saurons également intégrer l'équation

$$\frac{y_2''}{y_2} = f\left(\frac{1}{f}\right)'' + \Phi - \frac{\Phi''}{2\Phi} + \frac{3}{4}\frac{\Phi'^2}{\Phi^2} + \frac{f'}{f}\cdot\frac{\Phi'}{\Phi}. \tag{27}$$

y_1 étant la solution générale de (24), la solution de (27) aura pour valeur:

$$y_2 = \sqrt{\frac{h-h_1}{\Phi}}\left(y_1' - y_1\frac{f'}{f}\right). \tag{28}$$

Partant de ce résultat nous reprenons notre résultat (23).

Pour le premier niveau d'énergie correspondant à la valeur $k = 1$, nous voyons apparaître la solution particulière:

$$f_1 = x^2 - 1; \tag{29}$$

l'expression (26) donne alors:

$$\Phi = \frac{(k-1)(k+2)}{x^2-1}. \tag{30}$$

Le second chaînon de la suite de Darboux s'écrit:

$$\frac{V_1''}{V_1} = \frac{k(k+1)}{x^2-1} + \frac{3}{(x^2-1)^2}, \tag{31}$$

avec:

$$V_1 = \frac{V_0'(1-x^2) + 2xV_0}{\sqrt{(k+2)(1-x^2)}}, \tag{32}$$

V_0 étant la solution générale de l'équation (23).

Réitérant, pour le second niveau d'énergie correspondant à la valeur $k = 2$, l'équation (31) admet la solution particulière:

$$f_2 = (x^2-1)^{3/2}; \tag{33}$$

et avec:

$$\Phi = \frac{(k-2)(k+3)}{x^2-1}, \tag{34}$$

nous obtenons la nouvelle équation:

$$\frac{V_2''}{V_2} = \frac{k(k+1)}{x^2-1} + \frac{8}{(x^2-1)^2}. \tag{35}$$

Enfin, pour la valeur la plus générale $k = n$ (n entier positif quelconque), l'équation du second ordre en V_{n-1}, du type (22), (31) ou (35), admet la solution particulière:

$$f_n = (x^2-1)^{\frac{n+1}{2}}; \tag{36}$$

avec la notation:

$$\Phi = \frac{(k-n)(k+n+1)}{x^2-1}, \tag{37}$$

nous obtenons, comme chaînon d'ordre n l'équation:

$$\frac{V_n''}{V_n} = \frac{k(k+1)}{x^2-1} + \frac{n(n+2)}{(x^2-1)^2}. \tag{38}$$

Il devient par suite possible de ramener à des quadratures l'intégration de l'equation (7) grâce à la chaîne de Darboux (23) (31), (35)...(38) et suivant les différents niveaux d'énergie:

$$k = 1,\ 2,\ 3,\ 4, \cdots n.$$

Nous l'avons déjà dit, Adolphe Buhl signalait dans ses „Nouveaux éléments d'Analyse" la possibilité d'analogie entre l'enchaînement et la quantification; parlant de ces chaînes d'équations dues à Darboux, il écrivait notamment:

„Tous ces enchaînements ne donnent généralement que des résultats de nature quantique ··· bref, le théorème de Darboux, quoique ayant été donné par son illustre auteur en 1882, apparaît de plusieurs manières comme un théorème dont l'intérêt n'est pas épuisé à l'heure actuelle".

L'examen du cas particulier de l'oscillateur harmonique linéaire a remarquablement précisé ces possibilités, mais le cas particulier du rotateur sphérique étudié dans la présente note, les confirme et appuie fortement les espérances que l'on pouvait avoir dans ce domaine.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] — Louis de Broglie — Physique nouvelle et quanta — E. Flammarion — Paris 1937.

— A. Buhl — Nouveaux éléments d'Analyse — t. 3 — Gauthier-Villars — Paris 1937

— G. Viguier — L'équation de Schrödinger pour un oscillateur harmonique linéaire (Paris — Revue Scientifique — août 1948 — № 9)

— C. R. Acad. Sc. Paris — t. 224 — № 26 — 14. 6. 48
t. 227 — № 4 — 26. 7. 48
t. 227 — № 9 — 30. 8. 48

[2] — Louis de Broglie — Théorie de la quantification dans la nouvelle Mécanique Hermann — Paris 1932

[3] — G. Viguier — Géométrie de l'équation de Riccati — Annales Fac. Sc. Toulouse — 1945 — T. 49, p. 1

[4] — G. Darboux — Théorie Générale des Surfaces — T. 1 et 2 — C. R. Acad. Sc. Paris — T. 49 — 1882.