ГЕОМЕТРИСКА ИНТЕРПРЕТАЦИЈА ЈЕДНОГ СТАВА АЛГЕБРЕ

ИВАН БАНДИЋ

Поменути став гласи:

Дата су два полинома

$$(1)\qquad \begin{aligned} F(x) &= C_0 x^{n-1} + C_1 x^{n-2} + \cdots + C_{n-2} x + C_{n-1} \\ f(x) &= x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_{n-1} x + b_n \end{aligned}$$

Ако полином $f(x)$ има само просте нуле α_i $(i = 1, 2, \cdots n)$, онда је[1])

$$(2)\qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{F(\alpha_i)}{f'(\alpha_i)} = C_0 .$$

Показаћемо да је овај став непосредна последица познатог Њутновог става о асимптотама алгебарских кривих, који гласи[2]):

Ако алгебарску криву C, чије све асимтоте леже у коначности, пресечено произвољном правом L, онда је центар средњих растојања пресека криве C и праве L идентичан са центром средњих растојања пресека праве L и асимптота криве C.

Нека је C n-ог степена, на пример:

$$(3)\qquad \varphi_n(x,y) + \varphi_{n-1}(x,y) + \varphi_{n-2}(x,y) + \cdots + \varphi_1(x,y) + \varphi_0(x,y) = 0.$$

где је $\varphi_k(x,y)$ хомогени полином k-ог степена у односу на x и y.

---

[1]) Алгебарски доказ налази се у делу: *Serret - Scheffer*, „Leh. buch der Differential und Integralrechnung", T. I, S. 608.

[2]) *Salmon*, „Analytische Geometrie der höheren Kurven", S. 143, § 129.

Изаберимо полиноме $\varphi_n(x,y)$ и $\varphi_{n-1}(x,y)$ тако да буде:

$$\varphi_n(x,y) = y^n + b_1 y^{n-1} x + b_2 y^{n-2} x^2 + \cdots + b_{n-1} y x^{n-1} + b_n x^n$$

$$\varphi_{n-1}(x,y) = C_0 y^{n-1} + C_1 y^{n-2} x + C_2 x^{n-3} x^2 + \cdots + C_{n-2} y x^{n-2} + C_{n-1} x^{n-1}.$$

Једначина (3) може се сада написати у следећем облику:

$$(4) \qquad x^n f\left(\frac{y}{x}\right) + x^{n-1} F\left(\frac{y}{x}\right) + x^{n-2} \varphi_{n-2}\left(\frac{x}{y}\right) + \cdots = 0.$$

Коефицијенти правца асимптота криве (4) су корени једначине

$$(5) \qquad f(\alpha) = 0.$$

Нека је α_k један корен једначине (5). Тада једначина одговарајуће асимптоте гласи

$$y = \alpha_k x + \beta_k$$

где се β_k добије из једнакости[3]:

$$\beta_k = -\frac{F(\alpha_k)}{f'(\alpha_k)}.$$

тако да је једначина те асимптоте

$$(6) \qquad y = \alpha_k x - \frac{F(\alpha_k)}{f'(\alpha_k)}$$

Узмимо за праву L ординатну осовину. Тада ће ординате пресека праве L и асимптота (6) бити:

$$y_k = -\frac{F(\alpha_k)}{f'(\alpha_k)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

а центар средњих растојања свих тих пресека:

[3]) *Czuber*, „Vorlesungen über Differential und Integralrechnung“, T. I, S. 382.

$$Y = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k = -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{F(\alpha_k)}{f'(\alpha_k)} \tag{7}$$

Ако у једначину (4) ставимо $x=0$ добићемо једначину

$$y^n + c_0 y^{n-1} + \cdots = 0,$$

чији корени претстављају ординате пресека криве C и ординатне осовине.

Како је

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = -C_0$$

то ће ордината центра средњих растојања тих пресека бити:

$$Y_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} y_i = -\frac{c_0}{n}. \tag{8}$$

Пошто је, према Њутновој теореми, $Y = Y_1$, то ћемо из (7) и (8) добити

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{F(\alpha_k)}{f'(\alpha_k)} = C_0,$$

дакле једнакост (2).

Напомена. Ако је $F(x)$ полином $n-2$-ог степена, онда је $C_0 = 0$, а једнакост (2) постаје

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{F(\alpha_k)}{f'(\alpha_k)} = 0.$$

Поменути став се обично у овом облику примењује у алгебри и анализи.

Auszug

GEOMETRISCHE DEUTUNG EINES SATZES

IVAN BANDIĆ

Es wird bewiesen, daß der Satz „Wenn zwei Polynome (1) gegeben sind, wobei $f(x)$ nur einfache Nullstellen α_i hat, dann gilt (2)" eine Folge eines bekannten Satzes von Newton über Asymptoten algebraischer Kurven ist.