ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ В. Д. БЕЛОУСОВА О ЧЕТЫРЁХ КВАЗИГРУПП НА ТЕРНАРНЫЙ СЛУЧАЙ *)

Янез Ушан

1°. Введение

В. Д. Белоусов в [1] впервые доказал следующую теорему. Если четыре квазигруппы $Q(A_i)$, $i \in \{1, 2, 3, 4\} \overset{def}{=} N_4$, связаны общим ассоциативным законом

$$A_1 [A_2 (x, y), z] = A_3 [x, A_4 (y, z)], \tag{1}$$

то все $Q(A_i)$, $i \in N_4$, изотопны ондой и той же группе $Q(A)$. (Другие доказательства имеются ещё в нескольких работах; об этом можно познакомиться в [2] на стр. 93.).

В настоящей работе теорема обобщается на тернарный случай, т. е доказывается следующая.

Теорема. Если 3-квазигруппы $Q(A_i)$, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \overset{def}{=} N_6$, связаны (общей ассоциативностью, т. е. если удовлетворяют равенствам

$$A_1[A_2 (x, y, z), u, v] = A_3 [x, A_4 (y, z, u), v] = A_5 [x, y, A_6 (z, u, v)], \tag{2}$$

то все $Q(A_i)$, $i \in N_6$, изотопны одной и той же 3-группе $Q(A)$ обладающей единицей.

2°. Замечание о системе функциональных уравнений тернарной ассоциативности

(2) можно преформулировать в следующую систему функциональных уравнений

$$\left\{\begin{aligned} X_1 [X_2 (x, y, z), u, v] &= X_3 [x, X_4 (y, z), u, v] \\ X_1 [X_2 (x, y, z,), u, v] &= X_5 [x, y, X_6 (z, u, v)] \\ X_3 [x, X_4 (y, z, u,), v] &= X_5 [x, y, X_6 (z, u, v)], \end{aligned}\right. \tag{2'}$$

---

*) Рад је рађен у оквиру Математичког института СР Србије у Београду, где је саопштен 18. III 1970.

где X_i, $i \in N_6$, неизвестные тернарные операции на некотором множестве Q, а $x, y, z, u, v \in Q$.

Пусть Ω множество всех, а Σ множество только квазигрупповых тернарных операций на некотором множестве Q. Для нас в настоящей работе интересные решения системы уравнений (2') на Σ.

Проверкой находим что компоненты A_i, $i \in N_6$, нетривиальных*) решений системы (2') на Σ можно получить следующим образом

$$(2'') \quad \begin{cases} A_1(x, y, z) = \alpha A(\beta x, \gamma y, \delta z) \\ A_2(x, y, z) = \beta^{-1} A(\varphi x, \psi y, \vartheta z) \\ A_3(x, y, z) = \alpha A(\varphi x, \xi y, \delta z) \\ A_4(x, y, z) = \xi^{-1} A(\psi x, \vartheta y, \gamma z) \\ A_5(x, y, z) = \alpha A(\varphi x, \psi y, \eta z) \\ A_6(x, y, z) = \eta^{-1} A(\vartheta x, \gamma y, \delta z), \end{cases}$$

где $Q(A)$ любая тернарная группа, а $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varphi, \psi, \vartheta, \xi, \eta$ любые подстановки множества Q.

Основной целью настоящей работы является обратная задача, т.е. доказательство в Введению сформулированной теоремы.

3°. Доказательство теоремы

Лемма 1. Если 3-квазигруппы $Q(A_i)$, $i \in N_6$, удовлетворяют равенствам (2), то $Q(A_i)$, $i \in N_6 \setminus \{4\}$, изотопные между собой.

Доказаельство

(2) можно расматривать как следующие равенства

$$(2_1) \quad A_1[A_2(x, y, z), u, v] = A_3[x, A_4(y, z, u), v]$$

$$(2_2) \quad A_1[A_2(x, y, z), u, v] = A_5[x, y, A_6(z, u, v)]$$

$$(2_3) \quad A_3[x, A_4(y, z, u,), v) = A_5[x, y, A_6(z, u, v)].$$

Положим по очереди $y = z = k$ в (2_1), $x = y = k$ и $u = v = k$ в (2_2) и $z = u = k$ в (2_3), где k некоторый фиксированный элемент. Получаем

$$(3) \quad \begin{cases} A_1(R_2 x, y, z) = A_3(x, L_4 y, z) \\ A_1(L_2 x, y, z) = L_5 A_6(x, y, z) \\ R_1 A_2(x, y, z) = A_5(x, y, R_6 z) \\ A_3(x, R_4 y, z) = A_5(x, y, L_6 z), \end{cases}$$

где $L_i x \overset{def}{=} A_i(k, k, x)$, $S_i x \overset{def}{=} A_i(k, x, k)$ и $R_i x \overset{def}{=} A_i(x, k, k)$, $i \in N_6$.

*) Здесь считается тривиальным решением решение (A,A,A,A,A,A), где Q (A) 3-группа

Так как трансляции L_i, S_i и R_i, $i \in N_6$, являются подстановками множества Q, то из (3) находим что лемма 1. верна.

Лемма 2. 3-квазигруппа $Q(A_4)$ из леммы 1. является изотопом некоторой 3-группе $Q(A)$ обладающей единицей.

Доказательство

В (2) поставим $x = v = k$. Получаем

(4) $$S_3A_4(x, y, z) = A_1[A_2(k, x, y), z, k] \text{ и}$$

(5) $$A_1[A_2(k, x, y), z, k] = A_5[k, x, A_6(y, z, k)].$$

Положим

(6) $$\begin{cases} B_1(x, y) = A_1(x, y, k) \\ B_2(x, y) = A_2(k, x, y) \\ B_3(x, y) = A_5(k, x, y) \\ B_4(x, y) = A_6(x, y, k). \end{cases}$$

Из (5) и (6) находим что квазигруппы $Q(B_i)$, $i \in N_4$, удовлетворяют равенству (1), т. е. следующему равенству

(7) $$B_1[B_2(x, y), z] = B_3[x, B_4(y, z)].$$

Отсюда, на основании (в упомянутой Введении) теореме В. Д. Белоусова, следует что существует бинарная группа $Q(B)$, изотопна всем $Q(B_i)$, $i \in N_4$.

Изотопии $Q(B_1) \sim Q(B)$ и $Q(B_2) \sim Q(B)$ имеют следующий вид (см. доказательство упомянутой теоремы Белоусова, на пример в [2]):

(8) $$\begin{cases} B_1(x, y) = \alpha B(\beta x, \dots) \\ B.(x, y) = \beta^{-1} B(\dots), \end{cases}$$

де α и β подстановки множества Q.

Учитывая (4), (6), (7) и (8), находим что

(9) $$S_3A_4(\xi x, \eta y, \zeta z) = B[B(x, y), z],$$

где ξ, η и ζ подстановки множества Q (выражающиеся через трансляции L_i, S_i и R_i, $i \in N_6$). Так как $Q(B)$ бинарная группа, то $Q(A)$, где

$$A(x, y, z) = B[B(x, y), z],$$

является 3-группой обладающей единицей. Отсюда, в силу (9), находим что лемма 2. верна.

Лемма 3. 3-Квазигруппа $Q(A_3)$ из леммы 1. изотопна 3-группе $Q(A)$ из леммы 2.

Доказательство

Положим по очереди $z=u=k$ в (2_1), $x=u=k$ в (2_2) и $z=v=k$ в (2_1). Таким образом, учитывая обозначения

$$(10)\qquad \begin{cases} \overline{B}_1(x,y) = A_1(x,k,y) \\ \overline{B}_2(x,y) = A_2(x,y,k) \\ \overline{B}_4(x,y) = A_6(x,k,y) \\ C_3(x,y) = A_3(x,y,k) \\ C_4(x,y) = A_4(x,k,y), \end{cases}$$

получаем

$$(11)\qquad A_3(x, R_4\, y, z) = \overline{B}_1\,[\overline{B}_2(x,y), z],$$

$$(12)\qquad \overline{B}_1\,[B_2(x,y), z] = B_3\,[x, \overline{B}_4(y,z)] \text{ и}$$

$$(13)\qquad B_1\,[\overline{B}_2(x,y), z] = C_3\,[x, C_4(y,z)].$$

Учитывая (в упомянутой Введении) теорему Белоусова, из (7) и (12) с одной стороны, и (7) и (13) с другой стороны, находим что $Q(\overline{B}_1)$ и $Q(\overline{B}_2)$ изотопные бинарной группе $Q(B)$ из леммы 2.

Учитывая доказательство упомянутой теоремы Белосуова из [2], находим, по очереди, для (12) и (13) следующие равенства

$$(12')\qquad \begin{cases} \overline{B}_1(x,y) = B(\overline{R}_1\, x, \ldots) \\ B_2(x,y) = \overline{R}_1^{\,-1} B(\ldots) \quad \text{и} \end{cases}$$

$$(13')\qquad \begin{cases} B_1(x,y) = B(R_1'\, x, \ldots) \\ \overline{B}_2(x,y) = R'^{\,-1}_1\, B(\ldots). \end{cases}$$

На основании (6) и (10) находим что $\overline{R}_1\, x = A_1(x,k,k)$ и $R_1'\, x = A_1(x,k,k)$, т.е. что $\overline{R}_1 = R_1'$. Отсюда следует, что изотопии $Q(\overline{B}_1) \sim Q(B)$ и $Q(\overline{B}_2) \sim Q(B)$ имеют следующий вид

$$(14)\qquad \begin{cases} \overline{B}_1(x,y) = \alpha\, B(\beta x, \ldots) \\ \overline{B}_2(x,y) = \beta^{-1} B(\ldots). \end{cases}$$

Наконец, учитывая (11) и (14), находим что

$$A_3(x, y, z) = B[B(\varphi x, \psi y), \vartheta z],$$

где φ, ψ и ϑ подстановки множества Q.

Таким образом доказана лемма 3., а также и теорема настоящей работе

4°. Замечание о доказательстве теоремы

Профессор В. Д. Белоусов обратил наше внимание на следующий факт. Теорема настоящей работы может быть получена и исходя из его теоремы 2.1., случай II_2 — [5], стр. 39.

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Д. Белоусов, Ассоциативные системы квазигрупп, УМН 13, вып, 3 1958) стр. 243.

[2] В. Д. Белоусов, Системы квазигрупп с обобщенными тождествами, УМН XX, вып. 1 121), 1965, стр. 75—146.

[3] В. Д. Белоусов и М. Д. Сандик, *n*-Арные квазигруппы и лупы, Сибирский математический журнал, Том VII, No 1, 1966 г., стр. 31—54.

[4] Бранко Трпеновски и Ѓорѓи Чупона, Финитарни асоцијативни операции со неутрални елементи, Билтен на друштвото на математичарите и физичаите од НР Македонија книга XII 1961 год., Скопје, 15—24.

[5] V. D. Belousov, Balanced identities in algebra of quasigroups,. University of Waterloo, Canada

Janez Ušan

A GENERALIZATION OF V. D. BELOUSOV'S THEOREM ON FOUR QUASIGROUPS ON TERNARY CASE

Summary

The following theorem is proved:

Theorem. If 3-quasigroups $Q(A_i)$, $i \in N_6$, satisfy the general ternary associativity (2), then all the $Q(A_i)$, $i \in N_6$, are isotopic with one and the same 3-group $Q(A)$ which contains a neutral element.