О ДВЕМА ХОМОГЕНИМ ЛИНЕАРНИМ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИМ ЈЕДНАЧИНАМА ДРУГОГ РЕДА ЧИЈА СЕ РЕШЕЊА ДОБИЈАЈУ ПОМОЋУ КВАДРАТУРА

Мазлум М. Цана

1.1 У познатој књииз [1, с. 687] Д. С. Митриновић наводи да диференцијална једначина:

$$\left(a\, e^{bx} + \frac{1}{b^2}\right) y'' = y, \quad y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

има партикуларни интеграл облика:

$$y_1 = e^{-bx} + ab^2.$$

Илија А. Шапкарев [2] показао је да се диференцијална једначина:

$$(ae^{bx} + c)\; y'' = y \tag{1}$$

може интегралити, ако константе b и c задовољавају релацију:

$$4\, b^2\, c - 1 = 0.$$

У књизи [1, с. 527] наведено је да се диференцијална једначина

$$y'' \cos^2 x + ay' \sin 2x + by = 0 \tag{2}$$

може интегралити у затвореном облику у следећим случајевима:

(a) $b = 2a$;

(b) $a = 1/2, \quad b = 3/4$;

(c) $a = -1/2, \quad b = -\beta^2 < 0$;

(d) $a = -3/2, \quad b = -24$.

1.2 У току проучавања ових проблема дошао сам до закључака које у овом раду излажем. Диференцијална једначина (1) може се интегралити у затвореном облику, ако константе b и c задовољавају релацију:

$$b^2 cn^2 - 1 = 0,$$

где је n-природан број.

Даље диференцијална једначина (2) може се интегралити у затвореном облику, ако константе a и b задовољавају релацију:

$$b = a(a+1) - n(n+1)$$

односно

$$b = (n+1)(2a-n).$$

2.1 Једначина (1) сменом:

$$e^{bx} = t$$

постаје

$$b^2 t^2 (at+c)\ddot{y} + b^2 t(at+c)\dot{y} - y = 0, \ddot{y} = \frac{d^2 y}{dt^2}.$$

Ако се у овој једначини уведе смена:

$$y = t^r z$$

где је r-константа, она постаје:

$$b^2 t^2 (at+c)\ddot{z} + b^2 t(at+c)(2r+1)\dot{z} + [b^2 r^2 (at+c) - 1] z = 0.$$

Последња једначина, под условом да је:

$$b^2 cr^2 - 1 = 0 \tag{3}$$

постаје

$$t(at+c)\ddot{z} + (2r+1)(at+c)\dot{z} + ar^2 z = 0.$$

Ова једначина може се интегралити квадратуром ако је:

$$a(r+n)^2 = 0. \tag{4}$$

За $a \neq 0$ из (4) добија се:

(5) $$r = -n.$$

Из (3) и (5) добија се релација:

$$b^2 cn^2 = 1$$

што представља услов интеграбилности помоћу квадатуре диференцијалне једначине (1).

Лако је увидети да се за $n=1$, добија резултат наведен у [1], а за $n=2$ резултат наведен у [2].

За $n=3$ једначина:

$$(e^{x/3}+1)\, y'' = y$$

има општи интеграл:

$$y = C_1 [3(1+9e^{-x/3}+18e^{-2x/3}+10e^{-x}) \ln(1+e^{x/3}) - (10+39e^{-x/3}+30e^{-2x/3})]$$

$$+ C_2 (1+9e^{-x/3}+18e^{-2x/3}+10e^{-x}).$$

(2.2) Једначина (2) сменом:

$$\operatorname{tg} x = t$$

постаје

$$(1+t^2)\ddot{y} + 2(1+a)t\dot{y} + by = 0.$$

Ако се у овој једначини уведе смена:

$$y = z e^{\int \frac{rt+s}{1+t^2} dt}$$

где су r и s — константе, она постаје

(6) $$(1+t^2)^2 \ddot{z} + 2(1+t^2)[(r+a+1)t+s]\dot{z}$$

$$+[(r^2+r+2ar+b)t^2+2s(r+a)t+(s^2+r+b)]z=0.$$

Ако у (6) ставимо:

(7)
$$\begin{aligned} &r^2+r+2ar+b=p,\\ &2s(r+a)=0,\\ &s^2+r+b=p \end{aligned}$$

добија се једначина:

$$(1+t^2)\,\ddot{z}+2\,[(r+a+1)\,t+s]\,\dot{z}+pz=0.$$

Ако посљедњу једначину диференцирамо n-пута, добија се једначина:

$$(8)\quad (1+t^2)\,z^{(n+2)}+2\,\{[r+a+(n+1)]\,t+s\}\,z^{(n+1)}+\left[2\sum_{\nu=1}^{n}(r+a+\nu)+p\right]z^{(n)}=0$$

где је

$$z^{(n+2)}=\frac{d^{n+2}z}{dt^{n+2}}\,.$$

Једначина (8) може се интегралити ако је испуњена релација:

$$(9)\qquad n\,[2\,(r+a)+n+1]+p=0.$$

Елиминацијом p из (9) и (7) добијају се релације:

$$r^2+(1+2a)\,r+b=-n\,[2\,(r+a)+n+1],$$

$$2s\,(r+a)=0,$$

$$s^2+r+b=-n\,[2\,(r+a)+n+1].$$

За $s\neq 0$ и $r=-a$ следи:

$$b=a\,(a+1)-n\,(n+1).$$

За $s=0$ и $r\neq -a$ следи:

$$b=-r-n\,[2\,(r+a)+n+1],$$

$$r\,(r+2a)=0.$$

Како $r=0$, не представља никакав интерес, узимамо да је:

$$r=-2a,$$

$$b=(n+1)\,(2a-n).$$

За $s=0$ и $r=-a$ не представља интерес јер се добија да је $a=0$, а то несме бити, тј. $a\neq 0$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Э. Камке, Справочник по обикновенным дифференциальным уравнениям, Москва (1961).

[2] Илија А. Шапкарев, Неколико примедаба о хомогеним линеарним диференцијалним једначинама другог реда чији се општи интеграл добија помоћу квадратура, Математички весник 5 (20), Св. 4, 1968 Београд.

Mazllum M. Cana

SUR DEUX ÉQUATIONS LINÉAIRES DIFFERÉNTIELLES DE DEUXIÉME ORDRE RÉSOLUBLES PAR QUADRATURES

(Résumé)

Dans cet article, on démontre que l'équation linéaire différentielle

(1) $$(ae^{bx}+c)\ y''=y$$

peut être intégrée par de quadratures, si les constantes b et c sont liées par la relation

$$b^2\ cn^2-1=0.$$

Puis on démontre que l'équation

(2) $$y''\cos^2 x+ay'\sin 2x+by=0$$

peut être intégrée par des quadratures si les constantes a et b remplissent la rélation

$$b=(n+1)\ (2a-n),\quad n\in N.$$