МАТЕМАТИЧКИ ОМНИБУС, 5 (2019), 9 – 19
http://im-pmf.weebly.com/matematicki-omnibus-kniga-5.html

ИНТЕРЕСНИ ПРИМЕНИ НА ТЕОРЕМАТА НА СТОУН-ТУКИ, ДИРИХЛЕОВИОТ ПРИНЦИП ЗА КУТИИ И ТЕОРЕМАТА ЗА СТАБИЛНОСТ

Абдула Букла [1]

1. ВОВЕД

Во современата математика често се среќаваме со прашањата:

- Зошто во многу математички теории постојат теореми кои немаат директна примена?
- Зошто имаме математички теории каде што скоро и да не се користат броеви и обични математички операции?

Во некои случаи, одговорот на овие прашања е јасен: за да се решаваат едноставни проблеми, се формираат нови апстрактни теории и во новата теорија има доволни алатки за решавање на проблемот. На пример, да ја разгледаме последната Терема на Ферма.

Теорема на Ферма. *Не постојат природни броеви* a, b, c *што ја задоволуваат равенката* $a^n + b^n = c^n$ *за природен број* $n > 2$.

Оваа теорема е докажана од англискиот математичар Ендру Вајлс (Andrew Wiles) по 358 години откако ја поставил Ферма, [7]. Тој користел техники од алгебарска геометрија за да го добие доказот.

Освен што ни служи како дополнителна алатка за решавање на нерешени проблеми, дали модерната математика има допирни точки и со реалноста? Се прашуваме:

1) Дали математиката е апстрактна наука што е вештачки градена?
2) Дали математиката постои независно од сѐ и е скриена во природата? Дали со секоја нова теорема всушност се дешифрира еден дел од природата?

Ќе се обидеме да покажеме дека математиката во суштина не е толку апстрактна разгледувајќи три теореми од различни математички дисциплини, теорија на мера, теорија на графови и метрички простори и ќе ги интерпретираме преку реални ситуации.

Кога зборуваме за некоја математичка теорија, често имаме некоја стуктура (X, ρ) каде што првата компонента X е некој објект (множество) од теоријата, а ρ некое својство во X. На пример, за еден подреден пар (X,μ) велиме дека е *простор со мера* ако X е непразно множество, а μ е мера во X, т.е со μ се определува квантитативно својство за подмножествата на X. Еден подереден пар (X,d) се нарекува *метрички простор* ако со d се определува растојание меѓу точките на X. Една подредена двојка (V,E) се нарекува *граф* ако V е множество темиња, а E е множество линии, уште наречени и рабови, коишто поврзуваат одредено подмножество темиња од V (тоа подмножество може и да е празно).

2. ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Во стандардната геометрија, еден од најосновните проблеми е да се добие информација за периметарот, плоштината или волуменнот на некој геометриски објект. Обично, во геометрискиот пристап, за да се мери еден објект, тој се дели на поедноставни делови за кои имаме информации и се сумриаат сите тие делови за да се добие мера за целиот објект.

Кога станува збор за простори различни од правата $\mathbb{R}$, рамнината $\mathbb{R}^2$ и просторот $\mathbb{R}^3$ не може да се користат античките техники за да се мери некое подмножество. Во 1933 Колмогоров (1903–1987) ја формулирал теоријата на мера, [4].

За подредената тројка $(X,\mathfrak{D},\mu)$ велиме дека е простор со мера ако:

1. $\mathfrak{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$ (каде што $\mathcal{P}(X)$ е партитивното множество на X) кое ги исполнува следниве услови:

(а) $\varnothing, X \in \mathfrak{D}$.

(б) Ако $A \in \mathfrak{D}$, тогаш $A^C \in \mathfrak{D}$.

(в) Ако $A_i \in \mathfrak{D}$ за $i \in \mathbb{N}$, тогаш $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathfrak{D}$.

Велиме дека $\mathfrak{D}$ е σ-*алгебра* за X.

2. $\mu : \mathfrak{D} \to [0,\infty]$ е функција која ги исполнува следниве особини:

(а) $\mu(\varnothing)=0$,

(б) Ако $A_i \in \mathfrak{D}$ за $i \in \mathbb{N}$, тогаш $\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right)=\sum_{i\in\mathbb{N}}\mu(A_i)$ каде што $A_i \cap A_j = \varnothing$ за $i \neq j$.

На овој начин, ако земеме $\mathfrak{D}=\mathcal{P}(X)$, тогаш за произволно подмножество A од X е дефинирана мерата $\mu(A)$. На пример, ако X е дадено множество, со пресликувањето $\mu:\mathcal{P}(X)\to[0,\infty]$ дефинирано со:

$$\mu(A)=\begin{cases}|A|, A \text{ е конечно}\\ \infty,\ A \text{ е бесконечно}\end{cases},$$

добиваме мера за просторот X.

Првата теорема што ќе ја разгледуваме овде се вика Теорема за сендвич со шунка (Ham Sandwich Theorem), специјален случај на теоремата на Стоун-Туки (Stone-Tukey Theorem).

Теорема на Стоун-Туки. *За секој позитивен цел број* n *и дадени* n *мерливи објекти во* n*-димензионален Евклидов простор, секој од нив може да се подели на половина со само една* $(n-1)$*-димензионална хиперрамнина.*

Штајнхаус бил првиот кој насетил дека таа важи, а работел на неа во текот на Втората светска војна, криејќи се од нацистите на една фарма во Полска. Според Бејер (Beyer) и Зардецки (Zardecki), [1], првиот доказ на теоремата го дал Банах (Banach). Идејата потекнала од работата на проблемот за фер сечење торта: *како да се подели хетероген објект меѓу неколку луѓе со различни склоности, така што секој човек да верува дека добил пропорционален удел.*

Ќе разгледаме два едноставни облици на теоремата на Стоун-Туки. Првиот се однесува на дводимензионален простор, а вториот – за тридимензионален простор. Двете варијанти на теоремата се нарекуваат Теорема за палачинка и Теорема за сендвич со шунка и кашкавал, соодветно.

Прво, ќе го дадеме поедноставниот облик на теоремата, кога се работи на две димензии. Нека $X=\mathbb{R}^2$, $\mathfrak{D}=\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ и $\mu(A)$ е плоштина на $A \subseteq \mathbb{R}^2$.

Теорема 1. *За произволни два ограничени објекти во рамнината $\mathbb{R}^2$ постои една права која истовремено ги дели двата објекти на половина.*

(Двата објекти се делаат на два дела така што и двата дела да имаат иста плоштина). Ако првиот и вториот објект се заменат со палачинки, тогаш теоремата може да се преформулира и вака:

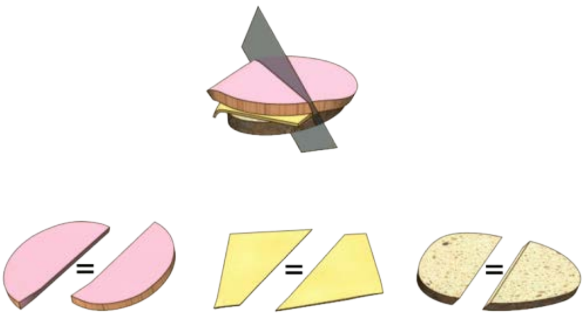
Интерпретација 1 (2D). *Две палачинки секогаш може да се поделаат со една права така што двете парчиња да имаат исти плоштини.*

Сега ќе ја воведеме теоремата, кога $X = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{D} = \mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$ и $\mu(A)$ е волумен на $A \subseteq \mathbb{R}^3$.

Теорема 2. ([6]) *За произволни три ограничени објекти во просторот $\mathbb{R}^3$ постои една рамнина која истовремено ги дели трите објекти на половина.*

(Трите објекти се делаат на два дела така што и двата дела да имаат иста мера). Ако првиот објект се замени со леб, вториот со шунка а третиот со кашкавал, тогаш теоремата може да се преформулира на следниот начин.

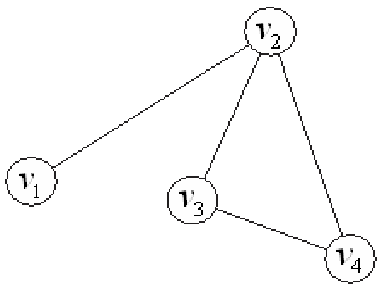
Интерпретација 1 (3D). *Еден сендвич секогаш може да се пресече со едно движење на ножот така што трите парчиња да имаат исти количества леб шунка и кашкавал.*



Слика 1. Илустрација на теоремата за сендвич со шунка и кашкавал, [8].

Оваа теорема има примена и во астрономијата. Имено, во секој даден момент на времето, постои една планета, една месечина и еден астероид во нашиот Сончев систем, такви што една единствена рамнина ги сече сите три на тој начин што ја дели на половина вкупната планетарна маса, вкупната маса на месечината и вкупната маса на астероидот.

Теоријата на графови се занимава со структури од облик $G=\left(V,E\right)$ каде што $V=\{v_1,v_2,v_3,...,v_n\}$ е множество темиња и $E=\{e_1,e_2,e_3,...,e_m\}$ е множество рабови, каде што секој раб е некое двоелементно подмножество од V. Ако $v\in V$ е некое теме од G, тогаш степен $\deg(v)$ на v е бројот на темиња што се поврзани со v.



Слика 2. Граф со 4 темиња и 4 рабови.

На Слика 2 имаме граф со следните степени:

$$\deg(v_1)=1,\ \deg(v_3)=\deg(v_4)=2 \text{ и } \deg(v_2)=3.$$

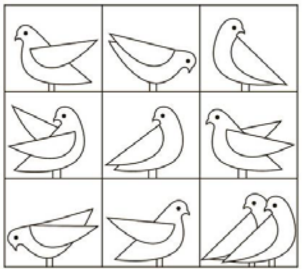
Според авторот на [5], следната теорема ја формулирал Дирихле (Dirichlet) во 1834 година. Таа е позната под името Дирихлеов принцип за кутии (Dirichlet drawer principle или Pigeonhole principle или Handshaking Lemma). Теоремата гласи вака:

Теорема (Принцип на Дирихле). *Нека A и B се конечни множества. Ако* $|A|>|B|$, *тогаш кое било пресликување* $f:A\rightarrow B$ *не е инјекција.*

Принципот на Дирихле може да се формулира и вака: *во произволна фамилија од n множества, коишто заедно содржат повеќе од n елементи, има барем едно множество што содржи не помалку од два елемента.*

Најпопуларната форма на овој принцип гласи:

Ако во n кутии се распоредат повеќе од n предмети, тогаш барем во една кутија ќе има повеќе од еден предмет.



Слика 3. Илустрација на Дирихлеовиот принцип за кутии.

Следната теорема од теорија на графови е директна последница од принципот на Дирихле.

Теорема 3. *За секој граф со* N *темиња, постојат барем две темиња со ист степен.*

Интерпретација 2. *На една забава присуствувале* n $(n \geq 2)$ *гости. Тогаш двајца од присутните имаат ист број пријатели на забавата.* (*Притоа, ќе сметаме дека релацијата „е пријател на“ е симетрична, т.е. ако x е пријател на y, тогаш и y е пријател на x.*)

Образложение. Секој гостин е или не е пријател со останатите $n-1$ гости на забавата. Значи, можните вредности на бројот на пријатели што може да ги има еден гостин од присутните на забавата е $0,1,...,n-1$. Сепак, не може да се случи некој на забавата да има 0 пријатели и некој да има $n-1$ пријатели: ако некому сите присутни на забавата му се пријатели, тогаш (од тоа што релацијата „е пријател на“ е симетрична) следува дека секој на забавата има барем еден пријател. Значи, можните вредности за бројот на пријатели по лице се $0,1,2,...,n-2$ или $1,2,...,n-1$. Во кој било од овие два случаја, има n броеви на кои може да им се придружат најмногу $n-1$ различни вредности. Според принципот на Дирихле, два од броевите се еднакви. Значи, некои двајца гости имаат ист број пријатели на забавата.

Нека X е произволно множество и $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$. За подредената двојка (X,τ) велиме дека е *тополошки простор* ако ги задоволува следниве услови:

(а) $\varnothing, X \in \tau$,

(б) Конечен пресек на елементи од τ е пак во τ,

(в) Произволна унија на елементи од τ е пак во τ.

Ако за множесвото $O \subseteq X$ важи дека $O \in \tau$, тогаш велиме дека O е *отворено* множество.

Во [2], Фреше (Fréchet) го обопштува поимот за растојание со дефинирање на метрички простор. За подредената двојка (X, d) велиме дека е метрички простор ако $d : X \times X \to [0, \infty)$ е непрекинато пресликување со особините:

(а) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(б) $d(x, y) = d(y, x)$,

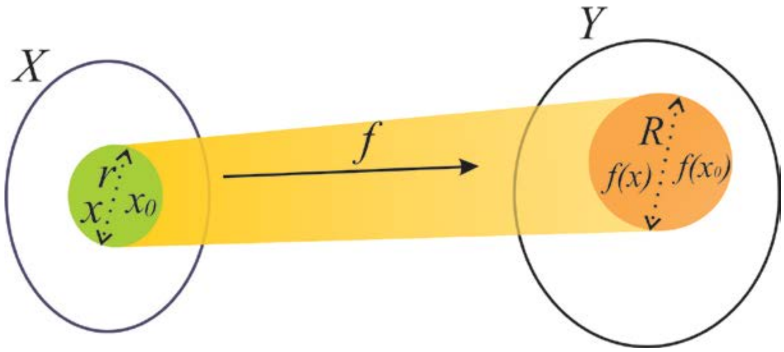
(в) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Од секој метрички простор може да се добие тополошки простор, но обратното не мора да важи. Значи, класата тополошки простори е поопшта од класата метрички простори. Во еден тополошки простор X, близина меѓу две точки $x, y \in X$ може да се мери според следното правило: тие се толку блиски колку што постојат отворени множества $O \in \tau$ така што $x, y \in O$.

Посебно во метрички простори, може да зборуваме за растојание меѓу две точки. Ако земаме $X = \mathbb{R}^2$, тогаш за две точки $x, y \in X = \mathbb{R}^2$ со координати $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$, соодветно, може да дефинираме растојание на следниот начин:

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} .$$

Точките $x, y \in X$ велиме дека се R-блиски, ако тие лежат во внатрешност на кружница со дијаметар R. Исто може да се дефинира и поимот за R-непрекинатост на фукнција. Ако $f : X \to Y$ е дадена фунцкија, тогаш велиме дека f е R-непрекината во точката $x_0 \in X$, ако постои некој позитивен реален број r така што сите точки што се r блиски до x_0 се пресликуваат во точки R блиски до $f(x_0)$. Дефиницијата може да се интерпретира и со сликата:



Слика 4. R-непрекинатост на функција.

За фунцијата $f : X \to X$ велиме дека има ρ-*инваријантна точка* ако постои $x_0 \in X$ така што $f(x_0)$ и x_0 се ρ-блиски.

Теорема 4. ([3]) Нека $X = \mathbb{R}^2$. *За секој* $\rho > 0$, *постои* $R > 0$ *така што секоја* R-*непрекината функција* $f : X \to X$ *има* ρ-*инваријантна точка.*

За множеството $X = \mathbb{R}^2$ од горната теорема, велиме дека го задоволува условот за стабилност.

Нека X е некоја група луѓе. Ако $x, y \in X$ и $x \neq y$, тогаш дефинираме $\text{info}(x, y)$ да е природниот број m ако личноста x знае m информации од биографијата на личноста y.

Сега, дефинираме растојанието $\rho(x, y)$ меѓу x, y да е следниот број $\rho(x, y) = \dfrac{1}{\max\{\text{info}(x, y), \text{info}(y, x)\}}$. Од друга страна, дефинираме $\rho(x, x) = 0$ за сите $x \in X$. На овој начин, преку бројот $\rho(x, y)$ може да оцениме колку блиски (пријатели) се две личности. Колку се поголеми вредностите $\text{info}(x, y)$, $\text{info}(y, x)$, толку се поблиски личностите x, y.

Во следната интерпретација $\rho(x, y) : X \times X \to [0, \infty)$ е метрика за просторот X. Во тој случај две личности $x, y \in X$ се R-блиски (каде $R \in (0, \infty)$) ако $\rho(x, y) = \dfrac{1}{\max\{\text{info}(x, y), \text{info}(y, x)\}} < R$.

Ако претпоставуваме дека X е некоја група луѓе, тогаш секоја екскурзија каде што секоја личност од X треба да посети некоја личност од X или да остане дома, може да се смета како функција од X во X. Теоремата 3, може да се интерпретира на следниот начин.

Интерпретација 3. Се организираат екскурзии така што секоја личност од една група луѓе X треба да посети некоја личност од X или да остане дома. Тогаш, за секој број $\rho > 0$, постои $R > 0$ така што во секоја екскурзија каде што блиските личности посетуваат R блиски личности, тогаш постои една личност којашто треба да оди до некоја личност во ρ близина или ќе остане дома.

Земајќи го предвид фактот дека множеството X од предходната теорема е конечно, добиваме дека може да избереме $\rho > 0$ да биде доволно мало за да важи следното:

$$\rho(x, y) < \rho \Leftrightarrow x = y .$$

Во тој случај, се добива интерпретацијата:

Поедноставна нтерпретација на 3. Се организираат екскурзии така што секоја личност од една група луѓе X треба да посети некоја личност од X или да остане дома. Тогаш, постои $R > 0$ така што во секоја екскурзија каде што блиските личности посетуваат R блиски личности, постои една личност којашто треба да остане дома.

3. ЗАКЛУЧОК

Во првата интерпретација се претпоставува дека лебот, шунката и кашкавалот се ограничени волуменски тела и дека ножот се движи прецизно долж една рамнина, што не е можно да е целосно точно во природата. Значи, станува збор за апроксимација.

Втората теорема, од друга страна, се интерпретира категорично. Сегогаш во една група од N личности може да најдеме двајца што познаваат ист број луѓе од групата.

Во третиот дел сме помалку прецизни при интерпретацијата. Тука, поимот близина (што има геометриска смисла) се мери по односот на луѓето и така се интерпретира теоремата.

Значи математиката, освен што ги опишува природните појави, исто така може да се користи за да добиеме тврдења интерпретирани преку реални настани за кои знаеме дека се:

1. Апроксимативно точни или
2. Целосно точни или
3. Дискутабилни.

Сите тврдења од првата група стануваат попрецизни ако тие се реализираат во поидеални услови (може да сечеме вдолж рамнина, може да се распредели униформно масата на лебот вдолж волуменот). Од друга страна, за третата група не можеме да бидеме сигурни дали тврдењето секогаш ќе биде точно, бидејќи, пријателството не може да се мери преку бројот на информации или преку други квантитативни особини. Од друга страна, за да имаме метрички простор треба да се исполни следниот услов.

(Неравенство на триаголник) За кои било три точки a,b,c, растојанието од a до c ($d(a,c)$) е помало од збирот $d(a,b)+d(b,c)$.

Овој услов не е исполнет во конкретниот случај (т.е. ако првата и втората личност се $\frac{1}{m}$-блиски а втората и третата личност се $\frac{1}{n}$-блиски, тогаш не мора да значи дека првата и третата личност ќе бидаат поблиски од $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$.)

Од сите овие примери може да заклучиме дека математиката не е само апстрактна наука во која се користат некои закони кои се сметаат за вистинати (аксиоми) и од нив вештачки се градат нови последници. Како сите други научници и математичарите живеаат во реалниот свет, се фасционираат од природата и што и да дефинираат внимаваат да е природно, бидејќи знаат дека во спротивно теоријата нема да е продуктивна.

ЛИТЕРАТУРА

[1] W. A. Beyer, A. *The early history of the ham sandwich theorem*, Amer. Math. Monthly, 111(1), (2004), 58–61.

[2] M. Frechet, *Sur quelques points du calcul fonctionnel*, Rendiconti de Circolo Matematico di Palermo, 22 (1906), 1–74.

[3] C. Ho, *On a stability theorem for the fixed point property*, Fund. Math., 64 (1969), 181–188.

[4] A. Kolomogoroff, *Grundbegriffe der wahrscheinlichkeitsrechnung*, Springer-Verlag, Vol. 2, 1933.

[5] P. Soberón, *The pigeonhole principle*, Problem-Solving Methods in Combinatorics, Springer Basel, 2013.

[6] F. Tack, *Ham Sandwich Theorem and Other Adventures in Topology*, https://www.math.u-bordeaux.fr/~pjaming/M1/exposes/MA5a.pdf

[7] A. Wiles, *Modular Elliptic Curves and Fermat's Last Theorem*, Annals Of Mathematics, 142 (1995), 443–551.

[8] *Etudes | The sandwich problem*, http://www.etudes.ru/en/etudes/ham-sandwich-theorem/

[1] Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје
Природно-математички факултет,
Архимедова 3, 1000 Скопје, Р. Македонија
e-mail: abdullabuklla@hotmail.com

Примен: 12.11.2018
Поправен: 19.12.2018
Одобрен: 21.12.2018
Објавен на интернет: 27.01.2019