МАТЕМАТИЧКИ ОМНИБУС, 7 (2020), 9 – 30
http://im-pmf.weebly.com/matematicki-omnibus-kniga-7.html

МАГИЧНИ КВАДРАТИ

Катарина Тодоровска [1]

Весна Целакоска-Јорданова [1]

Магичен квадрат од n-ти ред е квадратна $n\times n$ шема (или матрица) од n^2 природни броеви, такви што збирот на броевите во секоја редица, секоја колона и по дијагоналите е еднаков и е наречен *магичен збир* (или *магична константа*).

На пример, подолу се дадени магични квадрати од трет ред (лево) и од четврти ред (десно). Нивните магични константи се 15 и 34, соодветно.

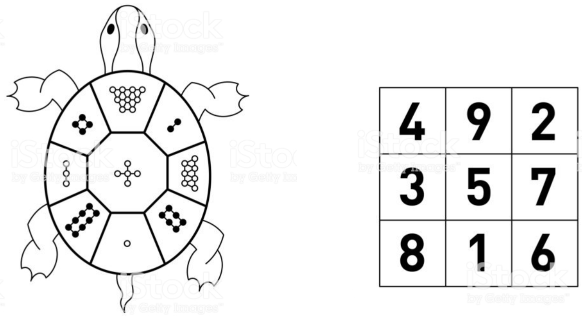
8	1	6
3	5	7
4	9	2

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

1. ИСТОРИЈА НА МАГИЧНИТЕ КВАДРАТИ

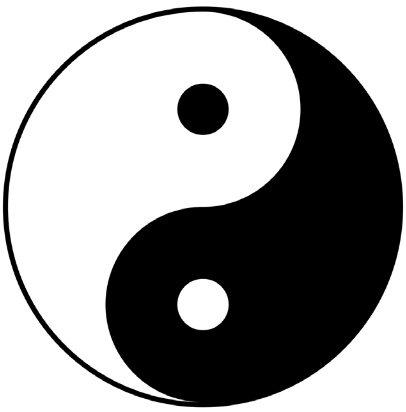
Многу историчари сметаат дека потеклото на магичните квадрати е нејасно. Но, се знае дека магичните квадрати им биле познати на старите цивилизации од Индија, Египет, Арабија и Грција.

Според една кинеска легенда [5], магичните квадрати се откриени во 2200 година п.н.е., кога императорот Ју (Ta Yü) (2205 – 2197 год. п.н.е.) шетајќи покрај брегот на Жолтата река здогледал како на површината исплива една необична желка. Желката на својот оклоп имала девет квадрати со точки. Во секој квадрат имало различен број точки од еден до девет и тие биле распоредени како на цртежот 1. За императорот Ју ова било необичен дар – мистериозен знак, кој го нарекол Ло-Шу.

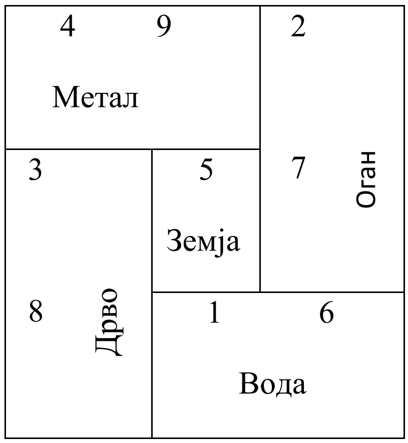


Слика 1. Лево желката од реката Ло, десно Ло-Шу квадрат.

Во стара Кина филозофијата се засновала на пет елементи – земја, вода, метал, оган и дрво, од кои е создадена материјата, и на два спротивни принципи јин и јанг. Јин го претставува женскиот принцип – темнина, пасивност, додека јанг го претставува машкиот принцип – светлина, енергија (Слика 2). Првото „магично“ својство на Ло-Шу квадратот е дека парните и непарните броеви наизменично се менуваат околу центарот. Во старата кинеска филозофија парните броеви се сметаат за јин, а непарните за јанг. Секој пар соседни броеви се однесуваат на еден од петте елементи (Слика 3). Во средината е бројот пет кој го симболизира елементот земја. Старите Кинези сметале дека земјата е квадратна и Кина е во центарот на светот. Затоа се сметало дека Ло-Шу квадратот ја претставува основата на кинеската филозофија.



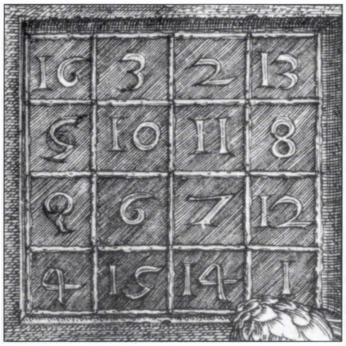
Слика 2. Јин и јанг



Слика 3. Ло-Шу квадрат

Ло-Шу квадратот бил употребуван за предвидувања на иднината и затоа во Кина со векови бил криен во тајност, сè до падот на династијата Танг (618 – 907 н.е.).

Според [7], најстарите пишани текстови за магичните квадрати што денес можат да се најдат се од арапско потекло од VIII век, од авторот Аполонио од Тиана (Apolonio de Tiana), мислител од александриската школа. Се претпоставува дека во Европа се донесени од византискиот математичар Емануел Москопулос (Moschopoulos).



„Најисторискиот“ магичен квадрат во Европа [4], без сомнение може да се нарече квадратот од една уметничка слика на познатиот сликар на германската ренесанса Албрехт Дирер (Albrecht Dürer, 1471–1528), познато под името „Меланхолија“.

Слика 4. Диререовиот магичен квадрат.

Тој квадрат има 16 полиња и е составен така што двата броја во средината на долниот ред ја даваат годината кога е создадено ова дело (1514).

Чудните и интересни својства на магичните квадрати го привлекле вниманието на многу познати математичари како Башѐ, Ферма, Паскал, Де Лаир, Лајбниц и Ојлер, [2].

ОПШТИ СВОЈСТВА НА МАГИЧНИТЕ КВАДРАТИ

Еден магичен квадрат ќе остане магичен ако се зголемат или се намалат сите негови броеви за еден ист број. Тој, исто така ќе остане магичен, ако сите негови елементи се поделат или помножат со некој константен број различен од нула. Да разгледаме еден пример:

2	9	4
7	5	3
6	1	8

15	22	17
20	18	16
19	14	21

30	44	34
40	36	32
38	28	42

Во првиот квадрат магичниот збир, т.е. збирот на цифрите во секоја редица, односно колона, односно дијагонала, е 15; во вториот квадрат, на секој од елементите на првиот магичен квадрат е додаден бројот 13, па магичниот збир изнесува 15 + 3 · 13 = 54; во третиот квадрат, секој од елементите на вториот квадрат е помножен со 2, па магичниот збир изнесува 2 · 54 = 108.

Од овие правила може да се изведе еден многу важен практичен заклучок, а тоа е дека ако сакаме да создадеме магичен квадрат, тогаш најдобро е да го создадеме од „помали“ природни броеви, а потоа, со множење, делење, собирање и одземање, можат да се добијат безброј магични квадрати со најразлични магични збирови.

Ако еден квадрат е магичен за некоја аритметичка прогресија, тогаш тој исто така ќе биде магичен за некоја друга, на ист начин распределена, аритметичка прогресија со друг прв член и друга разлика. Така на пример, наместо броевите од првиот магичен квадрат што е даден погоре, чии елементи се 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, може соодветно да се разместат членовите на аритметичката прогресија 51, 55, 59, 63, 67, 71, 75, 79, 83. Магичниот збир во овој случај изнесува 201. Тој е еднаков на половината од збирот на првиот и последниот член на прогресијата, помножен со димензијата на квадратот. На пример, за првиот квадрат подолу, $\frac{1+9}{2}\cdot 3=15$, додека за тој до него: $\frac{51+83}{2}\cdot 3=201$.

2	9	4
7	5	3
6	1	8

55	83	63
75	67	59
71	51	79

Трето многу важно својство на магичните квадрати е дека од два магични квадрати можеме да добиеме трет со собирање на соодветните елементи. На пример:

2	9	4		15	22	17		17	31	21
7	5	3	+	20	18	16	=	27	23	19
6	1	8		19	14	21		25	15	29

Магичниот збир на новодобиениот квадрат се добива како збир на магичните збирови на соодветните квадрати: 15 + 54 = 69.

Квадратот нема да изгуби од својата „магичност“ ако му ги разместиме редиците или колоните што лежат симетрично во однос на центарот на квадратот. Да разгледаме еден пример.

14	7	1	12
9	4	6	15
8	13	11	2
3	10	16	5

→

12	7	1	14
15	4	6	9
2	13	11	8
5	10	16	3

→

5	10	16	3
15	4	6	9
2	13	11	8
12	7	1	14

При првото разместување на редиците се запазува збирот на членовите во секој ред и во секоја колона, но нема да се запази збирот по дијагоналите (кај првиот, збирот на елементите по дијагоналата е 34, а кај вториот не е запазен – се добиваат различни вредности: 30 по главната и 38 по споредната дијагонала). Ако потоа на добиениот квадрат, им ги размениме местата на првата и на четвртата редица, добиениот квадрат ќе биде потполно магичен.

Интересно е што тоа не е така кај магичниот квадрат на Дирер. Еве ја истата постапка, но и едниот и другиот добиен квадрат се магични.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

→

13	3	2	16
8	10	11	5
12	6	7	9
1	15	14	4

→

1	15	14	4
8	10	11	5
12	6	7	9
13	3	2	16

2. НЕКОЛКУ КОНСТРУКЦИИ НА МАГИЧНИ КВАДРАТИ

Со текот на времето се развиле повеќе методи за конструирање магични квадрати. Пред да разгледаме некои од нив [7], ќе ги класифицираме магичните квадрати во три категории:

- Магични квадрати од непарен ред (или *непарни* магични квадрати), т.е. квадрати кај коишто редот n е од облик $2m+1$, каде што m може да биде кој било природен број.

– Магични квадрати од двојно парен ред (или *парно-парни* магични квадрати), т.е. квадрати кај коишто редот n е од облик $4m$, при што m е кој било природен број.

– Магични квадрати од парен ред (или *непарно-парни* магични квадрати), т.е. квадрати кај коишто редот n е од облик $2(2m+1)$, , при што m е кој било природен број.

Општиот метод на конструкција на овие три видови квадрати е различен.

2.1. МАГИЧНИ КВАДРАТИ ОД НЕПАРЕН РЕД

2.1.1. МЕТОД НА ЛА ЛУБЕР

Методот на Лубер (Simon de la Loubère, 1642 – 1729) е најчесто користениот метод за конструкција на магични квадрати од непарен ред. Овој метод уште се нарекува и Сијамски метод, затоа што Лубер се запознал со тој метод кога престојувал на дворот на кралот на Сијам, како пра-теник на кралот Лудовик IV (1687 – 1688). Тој се состои од следново: се запишуваат природните броеви редоследно почнувајќи од еден се додека се пополнат сите полиња. За илустрација на овој метод ќе конструираме магичен квадрат од петти ред. Бројот 1 се запишува во средното поле во најгорната редица (Слика 5).

		1		

Слика 5. Прв чекор од методот на Лубер.

Потоа додаваме помошна редица одозгора и помошна колона оддесно и бројот 2 го запишуваме едно поле дијагонално горе десно. Бидејќи бројот 2 излегува надвор од квадратот, го спуштаме најдолу во истата колона (Слика 6). Потоа го запишуваме бројот 3 едно поле дијагонално горе десно од бројот 2.

			2		
		1	↓		
	5		↓		
4	←	←	↓	←	4
			↓	3	
			2		

Слика 6. Чекори во методот на Лубер.

Во наредниот чекор го запишуваме бројот 4 едно поле дијагонално горе десно од бројот 3. Бидејќи бројот 4 излегува надвор од квадратот, го преместуваме на спротивниот крај од истата редица и го запишуваме бројот 5 едно поле горе десно од 4. Заради тоа што полето горе десно од 5 е веќе зафатено и не можеме да го запишеме бројот 6 во ова поле, го запишуваме 6 под 5. Бројот 7 го запишуваме едно поле горе десно од 6 и ја продолжуваме оваа постапка се додека бројот 10 не излезе надвор од квадратот. Потоа го префрламе 10 на спротивниот крај од редицата и ја продолжуваме оваа постапка се додека да ги запишеме сите броеви до 25. Да забележиме дека 16 излегува надвор од помошната редица и колона, затоа го запишуваме под 15 исто како што постапуваме кога некое поле е зафатено, [3].

	18	25	2	9	
17	24	1	8	15	17
23	5	7	14	16	23
4	6	13	20	22	4
10	12	19	21	3	10
11	18	25	2	9	

Слика 7. Метод на Лубер – сите чекори.

Луберовиот метод можеме да го користиме и за конструкција на несовршени магични квадрати – магични квадрати со низа од броеви различни од низата $1,2,...,n^2$. Прво ќе го илустрираме методот на Лубер на поедноставен вид несовршен магичен квадрат во кој броевите формираат аритметичка прогресија. Наместо со 1 почнуваме со друг број, на пример 3 и секој следен број го зголемуваме за 2 (Слика 8).

17	3	13
7	11	15
9	19	5

Слика 8. Метод на Лубер – несовршен магичен квадрат.

Луберовиот метод можеме да го користиме и за конструкција на несовршени магични квадрати со покомплицирана низа на броеви. Дефинираме хоризонтална разлика χ, како разлика помеѓу два последователни броја во секоја група од n броеви и дефинираме вертикална разлика ν, како разлика помеѓу последниот број од една група n броеви и првиот број од следната група на n броеви. Хоризонталната и вертикалната разлика не мора да бидат еднакви но мора да останат константни во текот на целата конструкција. На следниов цртеж е прикажан магичен квадрат конструиран со Луберовиот метод почнувајќи со бројот 3 и со $\chi = 2$, $\nu = 3$.

19	3	14
7	12	17
10	21	5

Слика 9. Магичен квадрат со $\chi = 2$, $\nu = 3$.

За еден магичен квадрат од ред n конструиран на ваков начин може однапред на се определи магичниот збир користејќи ја следнава формула:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}\,(n^3 + n) + n(a - 1) + (k - n)[n(\chi - 1) + (\nu - 1)],$$

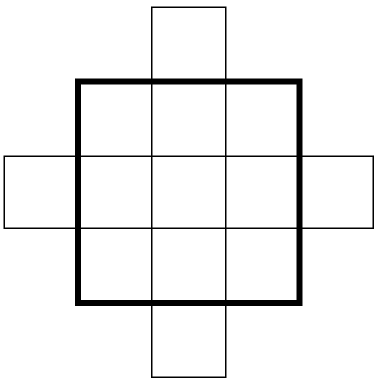
каде што $\mathcal{S}$ е магичниот збир, n редот на квадратот, a е бројот во почетното поле (средното поле во првиот ред), k е сумата $1 + 2 + ... + n$, χ е хоризонталната разлика и ν е вертикалната разлика. Така, за квадратот од Слика 9 имаме:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}\ (3^3 + 3) + 3(3 - 1) + (6 - 3)[3(2 - 1) + (3 - 1)] = 15 + 6 + 15 = 36.$$

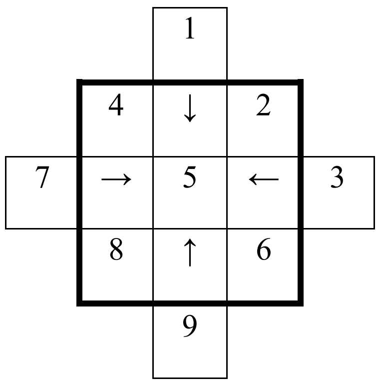
3.1.2. МЕТОД НА БАШЀ

Методот на Башѐ (уште наречен и скалест метод) е еден од најубавите и наједноставните методи за конструирање непарни магични квадрати. Тој се состои од конструирање на мали „пирамиди“ од сите 4 страни на квадратот. Ќе конструираме 3×3 магичен квадрат за да го илустрираме овој метод.

Прво цртаме квадрат и додаваме „скали“ (овде „пирамидата“ се состои само од 4 квадрати при што секој од нив е поставен над средното поле на секој од рабовите) како на Слика 10-1. Потоа последователните броеви од 1 до 9 ги запишуваме во дијагоналите како на Слика 10-2. Полињата со броевите 1,3,7 и 9 се наоѓаат надвор од основниот 3×3 квадрат. Овие броеви ги префрламе во најоддалечените празни полиња во соодветните колони, односно редици. Така добиваме магичен квадрат од ред 3 (Слика 11), [7].



Слика 10-1. Метод на Башѐ.



Слика 10-2. Метод на Башѐ.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Слика 11. Магичен квадрат добиен со методот на Башѐ.

Следниов пример е пример на конструкција на 5 x 5 магичен квадрат. Во овој пример почнуваме со 1 во најдолното поле и продолжуваме да ги внесуваме броевите по дијагонала надесно, слично како кај 3×3 квадратот од претходниот пример.

				25				
			24		20			
		23		19		15		
	22		18		14		10	
21		17		13		9		5
	16		12		8		4	
		11		7		3		
			6		2			
				1				

Слика 12. Метод на Башѐ – пред „преместување“ на броевите.

Броевите што се во пирамидите, се внесуваат во внатрешноста на квадратот, во аналогното симетрично поле (на пример, 1 оди под 19, 2 оди над 14, 4 оди пред 12, итн.) и се добива магичниот квадрат:.

23	6	19	2	15
10	18	1	14	22
17	5	13	21	9
4	12	25	8	16
11	24	7	20	3

3.1.3. МЕТОД – СКОК НА КОЊ НА ШАХОВСКА ТАБЛА

Овој метод е лесен и интересен. Да разгледаме, на пример, еден 7×7 квадрат, т.е. квадрат со 49 полиња. Единицата ја поставуваме во кое било квадратче, а над неа, скокајќи како коњ (на пример, надесно) на шаховска табла, впишуваме 2, потоа 3, а 4 ќе излезе од квадратот.

					13		
	9			4	↓		
7	←	←	←	↓12	←	←	7
8	↓		3	↓	↓		
	↓		11	↓	↓	6	16
	↓	2		↓	↓	14	
	↓	10		↓	5	15	
	1			↓	13		
	9			4			

Слика 13. Чекори на коњот заклучно со бројот 16.

Затоа формираме помошни редици (слично, помошни колони) каде што бројката ја пренесуваме во аналогното поле што е најгоре или најдолу, но во внатрешноста на квадратот и од него понатаму продолжуваме со скоковите. Кога ќе стигнеме до 7, како и до другите броеви што се деливи со 7, 14, 21, 28, 35 ја повторуваме постапката на пренесување на бројот во аналогното поле, а броевите 8, 15, 22, 29, 36 ги пишуваме во квадратчето подолу од соодветниот претходник. Скоковите на коњот ги продолжуваме сè додека не ја пополниме табелата, [3].

		18	35	45	13	23	40
	9	26		4	21	31	48
7	17	34	44	12	22	39	7
8	25	42	3	20	30	47	
16	33	43	11	28	38	6	16
24	41	22	19	29	46	14	24
32	49	10	27	37	55	15	32
40	1	18	35	45	1313	23	
48	9	26	36	4	21	31	
					22		

2.2. НЕПАРНО-ПАРНИ МАГИЧНИ КВАДРАТИ

3.2.1. МЕТОД НА РАЛФ СТРАЧИ (RALPH STRACHEY)

Ова е метод, [5], со кој може да се конструира непарно-парен магичен квадрат. Овој тип квадрати има ред n кој е делив со 2, но не и со 4. На пример, магични квадрати од ред 6, 10 и 14 се непарно-парни. Редот на овој тип квадрати е од облик $n = 4k+2$, каде што k е позитивен цел број. Всушност, $n = 2u$, каде што u е непарен природен број. Кај овој метод почнуваме со поделба на квадратот на четири еднакви делови *A, B, C* и *D*, при што секој дел претставува магичен квадрат со непарен ред u и $n^2/4$ полиња според методот на Лубер.

A	*B*
C	*D*

На пример, ако редот на магичниот квадрат е 6, а $6 = 2 \cdot 3$, тогаш секој потквадрат има ред $u = 3$ и $36 / 4 = 9$ полиња.

Сега ќе го употребиме Луберовиот метод за конструкција на магични квадрати со ред u и броеви од 1 до u^2. Овој квадрат го сместуваме во делот A. Во нашиот пример, во делот A се броевите од 1 до 9.

A

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Потоа повторно со Луберовиот метод конструираме уште три вакви квадрати со броеви од $u^2 + 1$ до $2u^2$, од $2u^2 + 1$ до $3u^2$, од $3u^2 + 1$ до $4u^2$ и ги сместуваме во деловите D, B и C, соодветно. Во нашиот пример, делот D го пополнуваме со броеви од 10 до 18, делот B со броеви од 19 до 27 и делот C со броеви од 28 до 36.

$C = A+3\cdot 9$

35	28	33
30	32	34
31	36	29

$B = A+2\cdot 9$

26	19	24
21	23	25
22	27	20

$D = A+9$

17	10	15
12	14	16
13	18	11

Бидејќи $u = 2k + 1$, каде што k е природен број, во нашиов пример, $k = 1$, па следуваат неколку чекори:

– Првите k колони од потквадратот A си ги разменуваат местата со соодветните колони од потквадратот C. (Во примерот, првата колона од потквадратот A се заменува со првата колона од потквадратот C и обратно.) Значи, по размената се добива:

	A	
35	1	6
30	5	7
31	9	2

	C	
8	28	33
3	32	34
4	36	29

– Последните $k-1$ колони во потквадратот B треба да си ги разменат местата со соодветните колони од потквадратот D. (Во примерот, такви колони нема, т.е. тие си остануваат на истото место.)

– Средното поле од првата колона на потквадратот A го разменува местото со средното поле од првата колона од потквадратот C. Значи, во примерот, по таа размена имаме:

	A	
35	1	6
3	5	7
31	9	2

	C	
8	28	33
30	32	34
4	36	29

– Централното поле во потквадратот A си го разменува местото со централното поле во потквадратот C, па добиваме:

	A	
35	1	6
3	**32**	7
31	9	2

	C	
8	28	33
30	**5**	34
4	36	29

– На крајот, четирите квадрати се разместуваат како што е дадено на почетокот, A во горниот лев агол, B во горниот десен агол, C во долниот лев агол и D во долниот десен агол.

Крајниот резултат е даден на Слика 14:

35	1	6	26	19	24
3	32	7	21	23	25
31	9	2	22	27	20
8	28	33	17	10	15
30	5	34	12	14	16
4	36	29	13	18	11

Слика 14. Конструкција на 6 × 6 квадрат со Страчиеов метод.

Сега сите редици и сите колони имаат збир 111, како и споредната и главната дијагонала.

3.3. ПАРНО-ПАРНИ МАГИЧНИ КВАДРАТИ

3.3.1. ДИЈАГОНАЛЕН МЕТОД

Со дијагоналниот метод на брз и лесен начин може да се конструира магичен квадрат. Магичните квадрати од овој тип имаат ред кој се дели со 4. Затоа овој магичен квадрат можеме да го поделиме на u^2 помали квадрати што не се преклопуваат и имаат димензија 4×4, каде што $u = n/4$. Броевите од 1 до n^2 се запишуваат последователно, почнувајќи од најгорното лево поле до најдолното десно поле. Ги пречкртуваме двете дијагонали и дијагоналите на секој од u^2-те помали квадрати. Броевите од пречкртаните полиња ги заменуваме со броевите од соодветните (симетрични во однос на центарот) полиња, а броевите од непречкртаните полиња ги оставаме. Да разгледаме еден пример на конструкција на 8×8 магичен квадрат, [5].

За 8×8 магичен квадрат имаме: $u = 8:4 = 2$, $u^2 = 4$, па квадратот го делиме на 4 помали квадрати. Ги пополнуваме полињата со броеви од 1 до 64 редоследно, почнувајќи од горното лево поле.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

Слика 15. Прв чекор од дијагоналниот метод.

Потоа ги засенчуваме дијагоналите на магичниот квадрат и дијагоналите на помалите квадрати.

1	~~2~~	~~3~~	4	5	~~6~~	~~7~~	8
~~9~~	10	11	~~12~~	~~13~~	14	15	~~16~~
~~17~~	18	19	~~20~~	~~21~~	22	23	~~24~~
25	~~26~~	~~27~~	28	29	~~30~~	~~31~~	32
33	~~34~~	~~35~~	36	37	~~38~~	~~39~~	40
~~41~~	42	43	~~44~~	~~45~~	46	47	~~48~~
~~49~~	50	51	~~52~~	~~53~~	54	55	~~56~~
57	~~58~~	~~59~~	60	61	~~62~~	~~63~~	64

Слика 16. Дијагонален метод пред заменување на броевите.

Потоа ги бришеме сите броеви што не припаѓаат на дијагоналите и ги пополнуваме со броевите од десниот горен дел кон левиот горен дел како што е прикажано на Слика 17. Така се добива магичен квадрат со магичен збир 260.

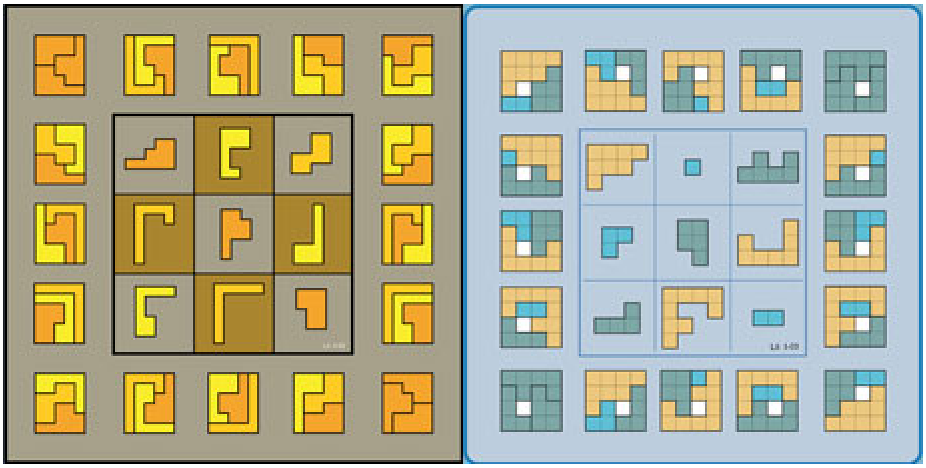
1	63	62	4	5	59	58	8
56	10	11	53	52	14	15	49
48	18	19	45	44	22	23	41
25	39	38	28	29	35	34	32
33	31	30	36	37	27	26	40
24	42	43	21	20	46	47	17
16	50	51	13	12	54	55	9
57	7	6	60	61	3	2	64

Слика 17. Дијагонален метод по заменување на броевите.

4. ГЕОМАГИЧНИ КВАДРАТИ

Геомагичните квадрати се идеја на Ли Салоуз (Lee Sallows), кој магичните квадрати ги пополнувал со геометриски форми наместо со броеви, [1]. Наместо да се собираат броеви по секоја редица, колона и дијагонала, за да се добие ист број, формите во секоја редица, колона и дијагонала, треба да се спојат заедно за да се создаде една истата, таканаречена *главна форма*.

На цртежот подолу е даден геомагичен 3×3 квадрат, каде што секој елемент е полиомино. Полиомино е рамнинска фигура, составена со спојување на *n* единични квадрати по нивните страни. (Декомина, т.е. полиомина од ред 10, какви што се фигурите во левиот квадрат, вкупно има 4655.) Полиомината во секој ред, колона и дијагонала, можат да се спојат заедно за да формираат фигура. Можат да бидат составени на два различни начина, кои се нацртани на секоја од страните на секоја редица, колона и дијагонала.



Слика 18. Геомагични квадрати
(лево со декомина, десно со полиомина со димензија од 1 до 9).

Сите погоре прикажани фигури нацртани околу квадратите од трет ред, се исти во однос на ротација, осна и централна симетрија. Квадратот лево е еден од вкупно два геомагични квадрати што се можни кога делчињата се декомина, што е доста ретка ситуација. Квадратот десно е геомагичен квадрат, каде што секој елемент е полиомино со димензија од 1 до 9. Фигурите по преферијата на десниот квадрат покажуваат како полиомината можат да бидат споени до една главна фигура – 4×4 квадрат во кој е отстрането едно поле. Салоуз пронашол вакви 4370 геомагични квадрати, многу повеќе отколку што очекувал.

5. ПРИМЕНА ВО НАСТАВАТА

Магичните квадрати можат да им користат на наставниците по математика. Веќе ја разгледавме примената на аритметичка прогресија кај магичните квадрати (која е дел од наставната програма за IV година средно образование), но има и други примери каде што наставникот може да ги користи магичните квадрати како дидактички материјал. Во овој тип на задачи [6], [8], ученикот треба да ја разбере задачата, да размисли и да реши повеќе едноставни линеарни равенки.

Пример 1. Изучувајќи ја темата *Линеарни равенки со една непозната*, професорот може на учениците да им зададе задача како оваа:

Одреди ја вредноста на секоја од непознатите што се јавуваат во следниов магичен квадрат:

17	24	w	8	15
x	12	19	21	3
4	6	13	r	22
y	5	7	14	16
11	m	25	2	s

Табела 1. Магичен квадрат од ред 5.

Пример 2. При изучување на операциите со цели брови, на учениците може да им се зададе следново правило за пополнување на 3×3 магичен квадрат.

$a+b$	$a-b-c$	$a+c$
$a-b+c$	a	$a+b-c$
$a-c$	$a+b+c$	$a-b$

Ако замениме за $a=5,\ b=-1, c=-3$ се добива Ло-Шу квадратот.

Пример 3. Ако го занемариме условот вредностите да бидат природни броеви, можеме да конструираме различни задачи од темата *Операции со рационални броеви*, кои вклучуваат магични квадрати.

Изврши ги назначените операции и провери дали дадениот квадрат е магичен.

$\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}$	$\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{5}$	$\frac{12}{5}+\frac{9}{2}$	$\frac{5}{2}-\frac{1}{3}$
$\frac{16}{15}+\frac{3}{5}$	10,4	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}\cdot 2$
$\frac{25}{18}:\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{13}{6}+\frac{1}{6}$	$\left(\frac{2}{5}+\frac{10}{3}\right):\frac{3}{8}$
$\frac{12}{5}+\left(9-\frac{5}{6}\right)$	$3:(4:2)$	$\frac{7}{6}$	$\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{15}$

6. ЗАКЛУЧОК

За магичните квадрати е пишувано многу. И денес се изнаоѓаат разни методи на нивно конструирање. Тие се применуваат во многу области од математиката: во проективна геометрија, во статистика, во алгебра, но наоѓаат и конкретна примена. На пример, тие се користат во криптографија, а и во физика, односно во инженерските науки, при одредувањето на центарот на маса, којшто, пак, има примена во роботиката.

Постојат и некои нерешени проблеми во врска со магичните квадрати, [9]. Овде ќе споменеме само неколку.

1. *Дали постои 3×3 магичен квадрат, каде што во сите негови полиња се впишани квадрати на природни броеви?*

За решението на овој проблем (или за доказ дека не постои), Мартин Гарднер, во 1996 година, понудил награда од 100 долари. Проблемот е сè уште отворен.

2. Ако во еден магичен квадрат, неговите броеви се заменат соодветно со нивните квадрати и притоа се добие нов магичен квадрат, тогаш тој се нарекува *бимагичен квадрат* или 2-*мултимагичен квадрат*.

Има неколку отворени проблеми во врска со ваквите квадрати. Еве еден од нив, што има интересна историја: *дали постои најмал бимагичен квадрат со различни елементи?* Неговиот ред е непознат, но познато е дека Лукас (Lucas, 1891) и подоцна Хендрикс (Hendricks, 1998) покажале дека бимагичен квадрат од ред 3 е невозможен за кое било множество броеви, освен за тривијалниот случај, кога се користи истиот број девет пати. Првиот познат бимагичен квадрат, конструиран од Пфеферман (Pfeffermann, 1891) имал ред 8 и магичен збир 260 за основниот квадрат и 11 180 по квадрирањето. Вороблевски (Wroblewski, 2006) го нашол првиот познат 6×6 бимагичен квадрат користејќи различни, но не последователни, природни броеви, додека Моргенстерн (Morgenstern, 2006) нашол 7×7 бимагичен квадрат. Бимагичен квадрат од ред 5 сè уште не е пронајден.

3. *Дали може да се конструира 3×3 магичен квадрат од различни триаголни броеви (броеви коишто одговараат на бројот на објекти*

распоредени во рамностран триаголник; се пресметуваат по формулата $\frac{n(n+1)}{2}$ *) или негов бимагичен квадрат?*

ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Bellos, *Magic squares are given a whole new dimension*, The Observer, Sunday 3, April 2011. https://www.theguardian.com/science/2011/apr/03/magic-squares-geomagic-lee-sallows

[2] J. L. Fults, *Magic squares*, Open Court Publishing Company, La Salle Illinois, 1974.

[3] S. Jeleṅski, *Lilavati*, Rozrywki matematyczne, Warszava, 1964.

[4] V. Karpenko, *Two thousand years of numerical magic squares*, Endeavour 18 (4), 1994, 147 – 152.

[5] L.M. Leite, V. Jacquemin, N. Boillot, *Magic Squares*, Experimental Mathematics, University of Luxembourg, Faculty of Sciences, Tecnology and Communication, 2nd Semester 2015/2016, 27 pages.

[6] G. Meza, *Mátematica, Educacion e Internet, Aportes Pedagógicos y Material Didáctico, Cuadrados mágicos*, https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/AportesPe/Teoria/CuadMagicos/pag3cuadradosmagicos.htm

[7] C. A. Pickover, *The zen of magic squares, circles, and stars*, Princeton University Press, 2002.

[8] Historis y Biografias, Resolucion de cuadrados mágicos juegos matematicos metodo de solucion, https://historiaybiografias.com/cuadrados_magicos1/

[9] Multimagie.com, Unsolved multimagic problems, http://www.multimagie.com/English/Problems.htm#SquaresOfSquares

[1] Универзитет Св. Кирил и Методиј, Скопје
Природно-математички факултет
Архимедова 3, 1000 Скопје, Р. Северна Македонија
e-mail: tekatarina@gmail.com,
e-mail: celakoska@gmail.com

Примен: 18.12.2019
Поправен: 20.3.2020
Одобрен: 21.3.2020
Објавен на интернет: 21.3.2020