МАТЕМАТИЧКИ ОМНИБУС, 6 (2019), 9 – 22
http://im-pmf.weebly.com/matematicki-omnibus-kniga-6.html

ГЕОМЕТРИСКИ ДОКАЗИ ЗА ИРАЦИОНАЛНОСТ НА НЕКОИ КВАДРАТНИ КОРЕНИ

Делчо Лешковски [1]
Валентина Миовска [2]

Како наставници по математика секојдневно се среќаваме со потешкотии при изложувањето на доказите на тврдењата кои се изучуваат. Исто така, свесни сме и за тоа дека многу мал процент од учениците можат самостојно да докажуваат. Затоа, при развивањето на способноста за самостојност при докажувањето, честопати користиме геометриски докази кои содржат слики, т.е. цртежи кои се впечатливи и лесно разбирливи. Секако, сликите и цртежите во наставата по математика најчесто се користат при изучувањето на геометриски теми, но и многу други содржини коишто не се геометриски можат да се интерпретираат со слики или со цртежи, т.е. да се „геометризираат“. Со ова можеме да ја унапредиме креативната настава по математика, а часовите да ги направиме поинтересни, па дури и забавни.

Овде ќе разгледаме неколку геометриски докази за ирационалност на некои квадратни корени (како на пример $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ и $\sqrt{6}$), со цел преку геометриските докази да се визуелизираат и доближат до учениците стандардните школски докази за ирационалност. Исто така, намерата е да се мотивираат учениците, преку постапки слични на дадените, самите да ја истражуваат ирационалноста и на други броеви, но и да ги применуваат геометриските докази и при докажувања на други тврдења.

1. СТАНДАРДЕН (ЕВКЛИДОВ) ДОКАЗ

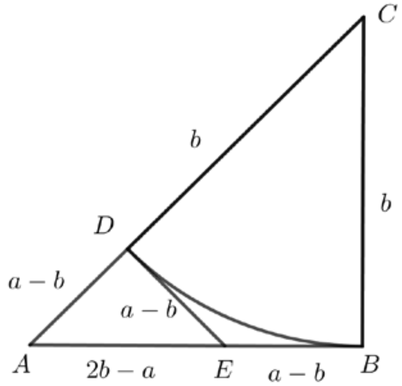
Најпознатиот доказ за ирационалноста на $\sqrt{2}$ е доказот што се припишува на Евклид или таканаречениот стандарден доказ. Да претпоставиме дека $\sqrt{2}$ е рационален број. Тогаш, $\sqrt{2}=\dfrac{a}{b}$ при што можеме да претпоставиме дека природните броеви a и b се заемно прости. Ова равенство го квадрираме и добиваме дека $2=\frac{a^2}{b^2}$, т.е. $2b^2=a^2$. Оттука, a^2 мора да биде парен број, па затоа и a мора да е парен број. Нека $a=2m$. Заменувајќи во последното равенство, добиваме дека $2b^2=4m^2$, т.е. $b^2=2m^2$. Значи и b^2 е парен број, т.е. и b е парен број. Според тоа, 2 е заеднички делител на a и b, што противречи на претпоставката дека a и b се заемно прости.

2. ДОКАЗ НА АПОСТОЛ

Геометрискиот доказ на Апостол се однесува на ирационалноста на $\sqrt{2}$, [1,3]. Нека $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$, каде што a и b се најмалите такви природни броеви. Ако конструирме рамнокрак правоаголен триаголник ABC со крак b, тогаш според Питагоровата теорема, квадратот на должината на хипотенузата е $2b^2$. Бидејќи $2b^2=a^2$ (по квадрирањето на равенството $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$) следува дека должината на хипотенузата е a. Тогаш триаголникот со катети b и хипотенуза a е најмалиот рамнокрак правоаголен триаголник со такво својство (да забележиме дека за рамнокракиот правоаголен триаголник важат неравенствата $a>b$ и $2b>a$). Но, во внатрешноста на секој рамнокрак правоаголен триаголник чии страни имаат целобројни должини, секогаш можеме да конструираме помал со истото својство, како што е прикажано на Слика 1. Значи, $\sqrt{2}$ не може да биде рационален број.

Конструкцијата се изведува на следниот начин. Кружен лак со центар во C и радиус b ја сече хипотенузата во точка D, од која повлекуваме нормала на хипотенузата која ја сече катетата AB во точка E. Секоја отсечка има целобројна должина, а отсечките AD, DE и EB имаат еднакви должини (DE и EB се тангентни отсечки). Оттука добиваме дека „помалиот“ рамнокрак правоаголен триаголник AED има катети со должина $a-b$ и хипотенуза со должина $2b-a$, т.е. тој има три страни со целобројни должини за кои важи $a-b<b$ и $2b-a<a$. Ова е во контрадикција со фактот дека триаголникот ABC е

најмалиот рамнокрак правоаголен триаголник со такво својство (Слика 1).

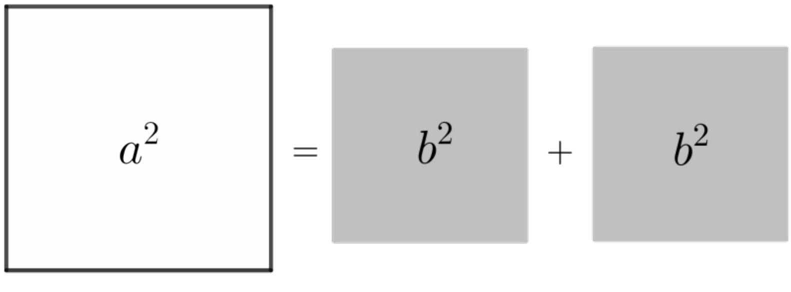


Слика 1. Геометриски доказ на Апостол.

3. ДОКАЗ НА ТИНЕНБАУМ И НЕГОВИ ГЕНЕРАЛИЗАЦИИ

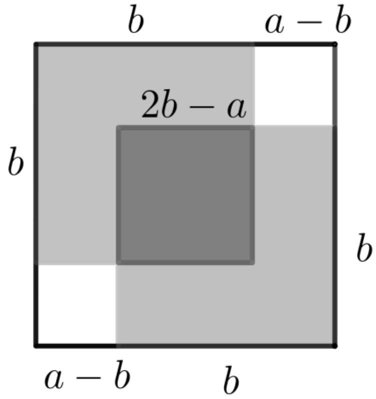
Тука ќе разгледаме уште еден геометриски доказ дека $\sqrt{2}$ е ирационален, како и некои негови генерализации за докажување ирационалност на $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ и $\sqrt{6}$, [4]. Доказот е даден од Стенли Тиненбаум во педесеттите години од минатиот век, но за првпат се појавува во 1990 година, во книгата „Моќта на математиката" на Џон Конвеј.

Нека $\sqrt{2}=\dfrac{a}{b}$, каде што a и b се најмалите такви природни броеви. Оттука $a^2=2b^2$. Ова ќе го интерпретираме геометриски − збирот на плоштините на два квадрати со страна b е еднаков на плоштината на квадрат со страна a (Слика 2).



Слика 2. Геометриска интерпретација на $a^2=2b^2$.

Ако квадратите со страна b ги поставиме како на Слика 3, тогаш квадратите се преклопуваат, при што се добива квадрат со страна $2b-a$ (темно сивиот квадрат) и остануваат два „непокриени" квадрати со страна $a-b$. Бидејќи $a^2=2b^2$, а плоштината на темно сивиот квадрат се брои двапати, добиваме дека плоштината на темно сивиот квадрат е еднаква на збирот наплоштините на двата бели квадрати. Со други зборови, $(2b-a)^2=2(a-b)^2$ или $\sqrt{2}=\dfrac{2b-a}{a-b}$. Имајќи предвид дека $a-b<b$ и $2b-a<a$, добиваме контрадикција.



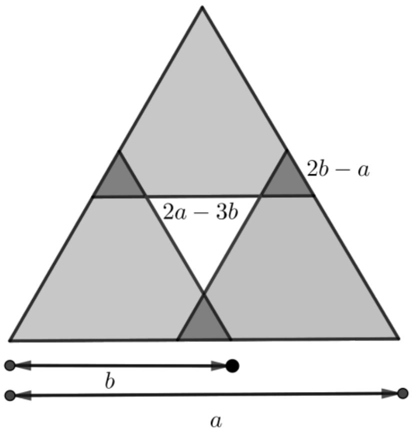
Слика 3. Геометриски доказ на Тиненбаум.

Овој доказ Милер и Монтекју го обопштуваат за да докажат дека $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ и $\sqrt{6}$ се ирационални броеви.

3.1. $\sqrt{3}$ Е ИРАЦИОНАЛЕН БРОЈ

Нека $\sqrt{3}=\dfrac{a}{b}$, каде што a и b се најмалите такви природни броеви. Тогаш $a^2=3b^2$ и оттука $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=3\dfrac{b^2\sqrt{3}}{4}$, односно збирот на плоштините на три рамнострани триаголници со страна b е еднаков на плоштината на рамностран триаголник со страна a.

Ако рамностраните триаголници со страна b ги поставиме како на Слика 4, тогаш тие се преклопуваат, при што се добиваат три складни рамнострани триаголници со страна $2b-a$ (темно сивите триаголници) и останува еден ,,непокриен" (бел) рамностран триаголник со страна $2a-3b$. Бидејќи $a^2=3b^2$, т.е. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=3\frac{b^2\sqrt{3}}{4}$, а плоштините на темно сивите триаголници се бројат по двапати, добиваме дека плоштината на белиот триаголник е еднаква на збирот на плоштините на трите темно сиви рамнострани траголници. Со други зборови, $\frac{(2a-3b)^2\sqrt{3}}{4}=3\frac{(2b-a)^2\sqrt{3}}{4}$, односно $\sqrt{3}=\frac{2a-3b}{2b-a}$. Имајќи предвид дека $2a-3b<a$ и $2b-a<b$, добиваме контрадикција.



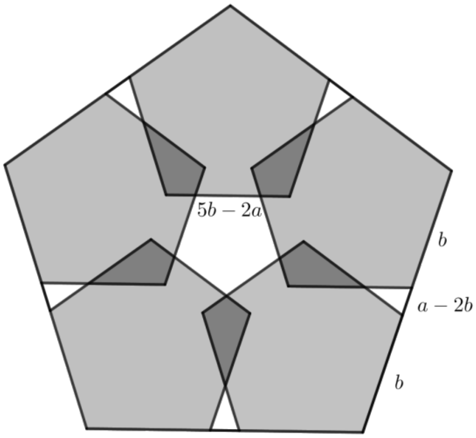
Слика 4. Геометриски доказ на Милер и Монтекју за ирационалност на $\sqrt{3}$.

3.2. $\sqrt{5}$ Е ИРАЦИОНАЛЕН БРОЈ

Да претпоставиме дека $\sqrt{5}=\frac{a}{b}$, т.е. $a^2=5b^2$ и притоа, a и b се најмалите такви природни броеви. Ако правилните петаголници со страна b ги поставиме како на Слика 5, тогаш тие се преклопуваат, при што се добиваат пет складни делтоиди и останувaат непокриени пет триаголници и еден петаголник во средината. Правилните петаголници се слични и затоа нивните плоштини се однесуваат како

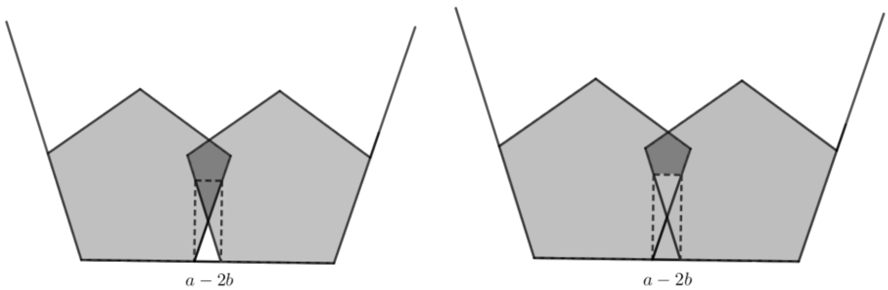
$$\frac{P_a}{P_b}=\frac{5\frac{ah_a}{2}}{5\frac{bh_b}{2}}=\frac{a^2}{b^2}$$

(h_a и h_b се радиусите на впишаните кружници во петаголниците и поради сличноста $\frac{h_a}{h_b}=\frac{a}{b}$), т.е. плоштината на петаголникот со страна a е 5 пати поголема од плоштината на петаголникот со страна b. Затоа, плоштината на преклопениот дел мора да е еднаква на плоштината на непокриениот дел.



Слика 5. Геометриски доказ на Милер и Монтекју за ирационалност на $\sqrt{5}$.

Ако непокриениот триаголник го покриеме со „долниот“ дел од делтоидот (Слика 6. а)) тогаш остануваат пет петаголници чии што плоштини се бројат по двапати (Слика 6. б)). Ќе докажеме дека овие петаголници се правилни со страна $a-2b$, а оттука ќе следува дека и средниот петаголник е правилен и има страна $b-2(a-2b)=5b-2a$.



а) **б)**

Слика 6. Покривање на триаголниците.

Малиот петаголник има два агли кои се совпаѓаат со аглите на двата петаголници со страни b, па се 108° и два агли кои се суплементни на аглите при основата на рамнокракиот триаголник, па и тие се 108°. Затоа, сите агли во малиот петаголник се еднакви на 108°.

Едната страна на малиот петаголник е еднаква со основата на рамнокракиот триаголник, т.е. има должина $a-2b$. Кракот на рамнокракиот триаголник има должина $\frac{a-2b}{2\cos 72^\circ}$, па затоа страните на петаголникот што се во продолжение на краците на рамнокракиот триаголник имаат должина $b-2\frac{a-2b}{2\cos 72^\circ}=b-\frac{a-2b}{\cos 72^\circ}$. Ако ја искористиме формулата $\cos 72^\circ=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ и имајќи предвид дека $\sqrt{5}=\frac{a}{b}$, добиваме дека $\cos 72^\circ=\frac{-b+a}{4b}$. Заменуваме и добиваме дека

$$b-\frac{a-2b}{\cos 72^\circ}=b-4b\frac{a-2b}{a-b}=\frac{ab-b^2-4ab+8b^2}{a-b}=\frac{7b^2-3ab}{a-b}=$$

$$\frac{7b^2-3ab}{a-b}\frac{a+b}{a+b}=\frac{b(7ab+7b^2-3a^2-3ab)}{a^2-b^2}=\frac{b(4ab-8b^2)}{4b^2}=a-2b.$$

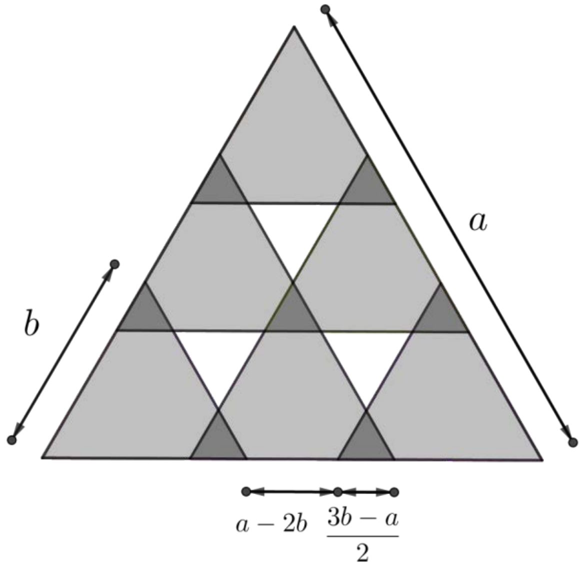
Останува уште да докажеме дека помалите страни на делтоидот се еднакви на $a-2b$, а тоа следува од складноста на рамнокраките триаголници формирани од една дијагонала и две страни на малиот петаголник. Значи, малите петаголници се правилни со страна $a-2b$ и затоа средниот петаголник е правилен и има страна $5b-2a$.

Ако ги изедначиме плоштините на покриениот и непокриениот дел, добиваме $(5b-2a)^2=5(a-2b)^2$ и оттука $\sqrt{5}=\frac{5b-2a}{a-2b}$. Ова е во контрадикција со почетната претпоставка. Имено, имајќи предвид дека $2b<a<3b$, за природните броеви $5b-2a$ и $a-2b$ важи $5b-2a<a$ и $a-2b<b$.

3.3. $\sqrt{6}$ Е ИРАЦИОНАЛЕН БРОЈ

Нека $\sqrt{6}=\frac{a}{b}$, каде што a и b се најмалите такви природни броеви.

Тогаш $a^2 = 6b^2$ и оттука $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 6\frac{b^2\sqrt{3}}{4}$, односно збирот на плоштините на шест рамнострани триаголници со страна b е еднаков на плоштината на рамностран триаголник со страна a. Ако рамностраните триаголници со страна b ги поставиме како на Слика 7, тогаш тие се преклопуваат, при што се добиваат седум складни рамнострани триаголници со страна $\frac{3b-a}{2}$ (темно сивите триаголници) и остануваат три ,,непокриени" (бели) рамнострани триаголници со страна $a-2b$.



Слика 7. Геометриски доказ на Милер и Монтекју за ирационалност на $\sqrt{6}$.

Од $a^2 = 6b^2$, поради тоа што плоштините на шесте темно сиви триаголници, со страна што лежи на страна на триаголникот со страна a, се бројат по двапати и плоштината на темно сивиот триаголник што е во средина се брои трипати, добиваме дека збирот на плоштините на трите бели триаголници е еднаков на збирот на плоштините на „осумте" темно сиви рамнострани триаголници. Со други зборови, важи равенството $8\frac{\left(\frac{3b-a}{2}\right)^2\sqrt{3}}{4} = 3\frac{(a-2b)^2\sqrt{3}}{4}$. Оттука следува дека

$$8\left(\frac{3b-a}{2}\right)^2 = 3(a-2b)^2 \Rightarrow 16\left(\frac{3b-a}{2}\right)^2 = 6(a-2b)^2$$

$$\Rightarrow (2(3b-a))^2 = 6(a-2b)^2 \Rightarrow \sqrt{6} = \frac{2(3b-a)}{a-2b}.$$

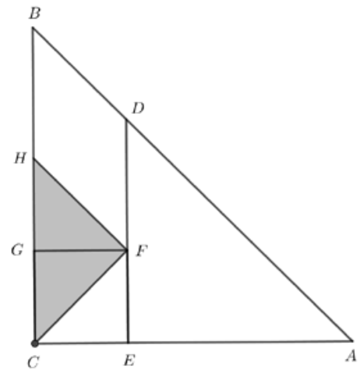
Имајќи предвид дека $2 < \sqrt{6} < 3$, т.е. $2b < a < 3b$, следува дека $6b - 2a < a$ и $a - 2b < b$, па добиваме контрадикција.

4. ДОКАЗ НА КАЛМАН, МЕНА И ШАХРИАРИ

Доказот на Калман, Мена и Шахриари е уште еден геометриски доказ за ирационалноста на $\sqrt{2}$, [2]. Триаголникот ABC е рамнокрак и правоаголен. Нека D е точка од хипотенузата AB таква што $\overline{AD} = \overline{AC}$. Низ D повлекуваме права паралелна со BC, што ја сече AC во точка E. Го конструираме квадратот $CEFG$. Триаголникот ADC е рамнокрак, од каде следува дека $\angle ADC = \angle ACD$. Тогаш

$$\angle DCF = \angle DCA - FCA = \angle CDA - 45^\circ = \angle CDA - \angle EDA = \angle CDE,$$

па DCF е рамнокрак триаголник и затоа $\overline{CF} = \overline{FD}$. Ако H е точка од BC таква што четириаголникот $FDBH$ е паралелограм, тогаш триаголниците CFG и HFG се складни и затоа $\overline{CF} = \overline{HF}$, односно $FDBH$ е ромб, а триаголникот CFH е рамнокрак правоаголен триаголник.

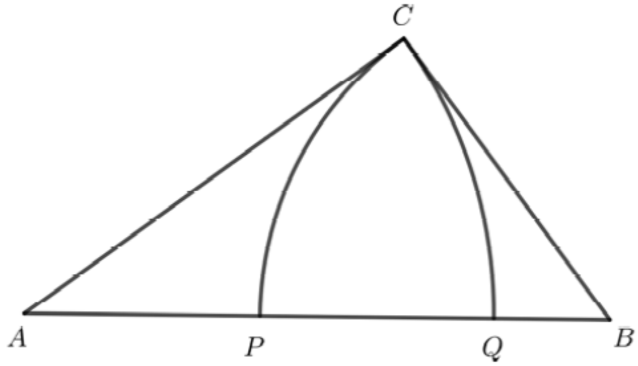


Слика 8. Доказ на Калман, Мена и Шахриари.

Да претпоставиме дека $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, каде што a и b се најмалите такви природни броеви. Ако конструираниот рамнокрак правоаголен триаголник ABC има крак со должина b, тогаш следува дека должината на хипотенузата е a, односно триаголникот со катети b и хипотенуза a е најмалиот рамнокрак правоаголен триаголник со такво својство. Од конструкцијата следува дека $\overline{AD} = b$, од каде што $\overline{BD} = a - b$. Бидејќи и $\overline{BH} = a - b$, добиваме дека $\overline{CH} = b - (a - b) = 2b - a$. Имајќи предвид дека $a - b < b$ и $2b - a < a$, рамнокракиот правоаголен триаголник CFH има страни кои се природни броеви, па добиваме контрадикција со фактот дека триаголникот ABC е најмалиот таков рамнокрак правоаголен триаголник.

5. ДОКАЗ НА МОРЕНО И ГАРСИЈА-КАБАЛЕРО

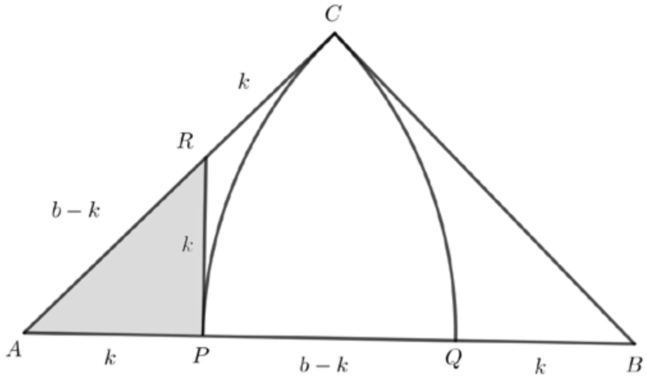
Материјалите на Рамануџан ја содржат Слика 9 на која има правоаголен триаголник ABC, каде што лаците се од кружници со центри во A и B и радиуси $\overline{AC}$ и $\overline{BC}$, соодветно. Во врска со Слика 9, Рамануџан дава три формули, од кои една е $\overline{PQ}^2 = 2\overline{AP} \cdot \overline{QB}$.



Слика 9. Правоаголниот триаголник од материјалите на Рамануџан.

Морено и Гарсија-Кабалеро докажуваат дека оваа формула ја имплицира ирационалноста на $\sqrt{2}$, [5].

Да претпоставиме дека $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$, каде што a и b се најмалите такви природни броеви. Бидејќи $1 < \sqrt{2} < 2$, следува дека $b < b\sqrt{2} < 2b$, т.е. $b < a < 2b$. Оттука следува дека $a = b + k$, каде што $1 \le k < b$. Од $a^2 = 2b^2$ заклучуваме дека триаголникот со страни $\overline{AB} = a = b + k$ и $\overline{AC} = \overline{BC} = b$ е најмалиот рамнокрак правоаголен триаголник чии страни имаат целобројни должини. За овој триаголник, ако го искористиме даденото равенство на Рамануџан, добиваме дека $(b-k)^2 = 2k \cdot k$, од каде што следува $\sqrt{2} = \dfrac{b-k}{k}$. Последново претставува контрадикција, бидејќи $b-k$ и k се природни броеви за кои важи $b-k = a-2k < a$ и $k < b$. Геометриската конструкција е следната: повлекуваме нормала во P која јасече AC во R. Тогаш триаголникот APR е рамнокрак правоаголен со катети со должина k и хипотенуза со должина $b-k$ (Слика 10).

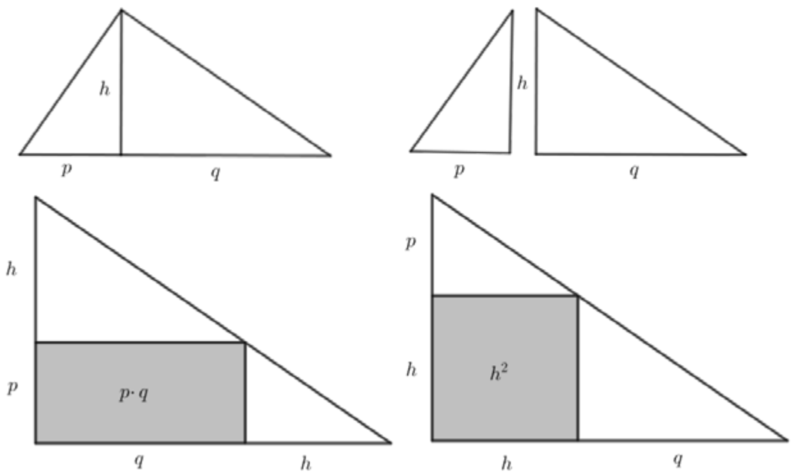


Слика 10. Доказ на Морено и Гарсија-Кабалеро.

6. УШТЕ ЕДЕН ДОКАЗ ЗА ИРАЦИОНАЛНОСТ НА $\sqrt{3}$

Користејќи ја Евклидовата теорема за висината во правоаголен триаголник, спуштена кон хипотенузата (right triangle altitude theorem, geometric mean theorem**),** ќе докажеме ирационалност на $\sqrt{3}$. Пред да преминеме на тоа, надвор од темата презентираме еден геометриски доказ (доказ без зборови) на Евклидовата теорема за висината во правоаголен триаголник, спуштена кон хипотенузата.

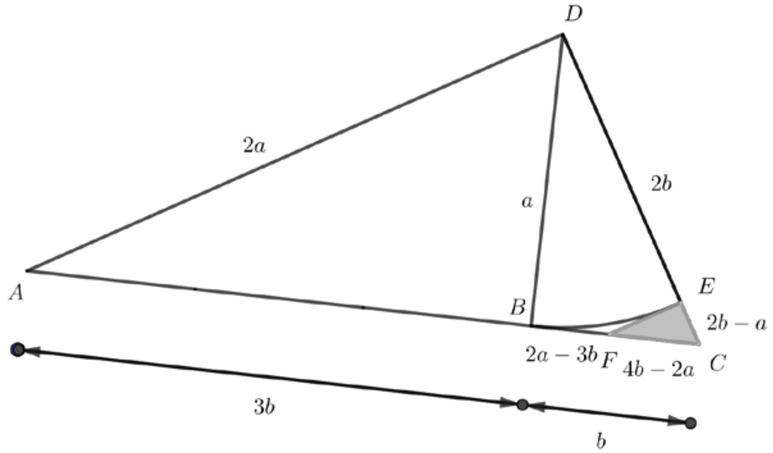
Ако го пресечеме правоаголниот триаголник вдолж висината спуштена кон хипотенузата, добиваме два слични правоаголни триаголници. Можеме да ги разместиме на два начина во поголем правоаголен триаголник со катети $p+h$ и $q+h$. За да се дополни триаголникот, во првиот случај е потребен правоаголник со плоштина pq, а во вториот случај, квадрат со плоштина h^2.



Слика 11. Доказ на Евклидовата теорема за висината во правоаголен триаголник спуштена кон хипотенузата.

Бидејќи двете разместувања го даваат истиот триаголник, следува дека плоштините на сивите фигури мора да се еднакви, т.е. $h^2 = pq$.

Да се вратиме на доказот за ирационалноста на $\sqrt{3}$. Нека $\sqrt{3} = \dfrac{a}{b}$, каде што a и b се најмалите такви природни броеви. Конструираме две последователни отсечки AB и BC, првата со должина $3b$, а втората со должина b, соодветно. Конструираме нормала n на AC во B и полукружница со дијаметар AC. Нека n ја сече полукружницата во точка D. Тогаш триаголникот ACD е правоаголен и е сличен со триаголниците DCB и ADB. Од теоремата за висината во правоаголен триаголник спуштена кон хипотенузата, имаме дека $\overline{DB}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{BC} = 3b \cdot b = a^2$ и затоа $\overline{DB} = a$. Тогаш правоаголниот триаголникот BCD има катети a и b, а од Питагоровата теорема следува дека $a^2 + b^2 = 3b^2 + b^2 = 4b^2$, т.е. има хипотенуза $2b$. Имајќи предвид дека a и b се најмалите природни броеви за кои $\sqrt{3} = \dfrac{a}{b}$, BCD е најмалиот правоаголен триаголник со страни со целобројни должини, при што хипотенузата е двапати поголема од едната катета. Кружен лак со центар во D и радиус a ја сече хипотенузата во точка E, од која повлекуваме нормала на хипотенузата што ја сече катетата BC во точка F. Страната EC има целобројна должина $2b-a$, а бидејќи триаголникот FCE е сличен со триаголникот DCB, страната FC има целобројна должина $2(2b-a)=4b-2a$. Отсечките FB и FE имаат еднакви должини $b-(4b-2a)=2a-3b$ (тие се тангентни отсечки). Затоа добиваме дека помалиот правоаголен триаголник FCE има катети со должина $2a-3b$, $2b-a$ и хипотенуза со должина $4b-2a$ и за него важи $\frac{a}{b}=\frac{2a-3b}{2b-a}$. Бидејќи $2a-3b<a$ и $2b-a<b$, последното е контрадикција со фактот дека триаголникот BCD е најмалиот правоаголен триаголник со такво својство.



Слика 12. Геометриски доказ за ирационалност на $\sqrt{3}$.

На сличен начин може да се докаже ирационалноста на $\sqrt{n^2-1}$, за секој природен број n. Ако претпоставиме дека $\sqrt{n^2-1}=\frac{a}{b}$, каде што a и b се најмалите такви природни броеви, тогаш конструкцијата ја започнуваме со две последователни отсечки AB и BC со должини $(n^2-1)b$ и b, соодветно. Ако го конструираме правоаголниот триаголник ACD со висината DB, таа ќе има должина a, а хипотенузата ќе има должина nb. Слично како при конструкцијата за $\sqrt{3}$, добиваме правоаголен триаголник FCE сличен со триаголникот DCB, чиишто катети се со целобројни должини $nb-a$ и $b-n(nb-a)=na-(n^2-1)b$ и за него важи $\frac{a}{b}=\frac{na-(n^2-1)b}{nb-a}$. Бидејќи $na-(n^2-1)b<a$ и $nb-a<b$, последното е спротивно со претпоставката дека a и b се најмалите природни броеви за кои важи $\sqrt{n^2-1}=\frac{a}{b}$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] T. M. Apostol, *Irrationality of the square root of two - a geometric proof,* The American Mathematical Monthly, 107, no. 9 (2000), 841–842.

[2] D. Kalman, R. Mena, S. Shahriari, *Variations on an Irrational Theme - Geometry, Dynamics, Algebra*, Mathematics Magazine 70, no.2 (1997), 93–104.

[3] N. Lord, *Using A4-sized paper to illustrate that 2 is irrational,* Math. Gaz. 101 (2017), 142–145.

[4] S. J. Miller, D. Montague, *Irrationality from the book*, Mathematics Magazine 85, no. 2 (2012), 110–114.

[5] S. G. Moreno, E. M. García-Caballero, *Entry 1.414… in Ramanujan's Notebooks:* $\sqrt{2}$ *is irrational*, Math. Gaz. 97 (2013), 329–329.

[1] Меѓународен Балкански Универзитет, Скопје,
Македонско-Косовска бригада, 1000 Скопје, Р. Македонија
e-mail: dleskovski@ibu.edu.mk

[2] Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје,
Природно-математички факултет,
Архимедова 3, 1000 Скопје, Р. Македонија
e-mail: miovska@pmf.ukim.mk

Примен: 20.12.2018
Поправен: 24.01.2019
Одобрен: 25.01.2019
Објавен на интернет: 26.01.2019