

ПРОПУСТИ ВО ПРЕДЗНАЕЊАТА НА СТУДЕНТИТЕ И УЧЕНИЦИТЕ ЗАБЕЛЕЖАНИ ПРИ ИЗУЧУВАЊЕ НА ПРЕДМЕТОТ МАТЕМАТИКА

*Марија Митева*¹

*Лимонка Коцева Лазарова*¹

1. ВОВЕД

Во воведниот дел на овој труд ќе дадеме краток опис на состојбата со предметот математика во нашата држава, како и желбата на учениците и студентите да го изучуваат овој предмет (т.е. намалениот интерес на учениците и студентите за учење математика), што беше главна мотивација да истражуваме и напишеме труд на оваа тема.

Наставниците, како во основните и средните училишта, така и на факултетите, сведочат дека нивото и квалитетот на знаењето по математика и математичките вештини кои учениците и студентите ги стекнале, постојано се намалува. Истото го потврдуваат и различните домашни и меѓународни тестирања на учениците и студентите: ако имаат можност да изберат, најголем дел од нив избегнуваат да ги тестираат своите знаења од предметот математика, а доколку е неизбежно, добиените резултати се просечни или потпросечни, што може да се види во [12], [13], и [14].

Проблемот со недостиг на математичко знаење и математички вештини станува поголем кога знаењето не е потребно само за да се реши математичка задача со која ќе се добие висока оценка или ќе се положи испит. Проблемот станува поголем кога знаењето треба да се примени за да се реши некој конкретен проблем од секојдневниот живот и работа, или уште повеќе, проблем од науката, техниката и инженерството. Примената на математиката е доста широка: таа се користи во физика, електротехника, хемија, биологија, екологија, економија, итн.

Математиката бара прецизност. За нејзино совладување потребно е темелно изучување на поимите и врските помеѓу нив. Многу често и малите грешки направени при решавање на математичките проблеми резултираат со голема разлика помеѓу добиениот и точниот резултат. Голем дел од учениците и студентите наидуваат на потешкотии при

изучување на математиката. Една причина за тоа е токму тесната поврзаност помеѓу математичките содржини и неможноста да се продолжи понатаму ако остане некоја материја несовладана. Како учениците поминуваат од година во година, пропустите, односно тие јазови кои ги имаат направено при изучување на математиката сè повеќе се зголемуваат, а желбата и напорите на учениците тие да се пребродат, се намалува. Ова понатаму станува сериозна препрека при понатамошно изучување на математиката. Сето тоа влијае на самодовербата кај учениците и студентите при решавање, така што тие често чувствуваат несигурност и потреба наставникот да им потврди дали се на добар пат. Тоа пак, од друга страна, резултира со „откажување“ на учениците и студентите од математиката: учениците избираат да студираат на факултети каде ќе може да ја избегнат математиката, или, пак, математиката не се јавува како суштински предмет. Со ова, проблемот од недостиг на профили кои поседуваат добри математички вештини стана сериозен проблем за општеството. Дефицит од математичари во нашата земја веќе се чувствува.

Надминувањето на проблемите со опаѓање на знаењето по математика, како и со намалување на математичките вештини кај учениците и студентите, не е едноставно. Првиот чекор во овој не така лесен процес би требало да биде длабока анализа на потешкотиите на кои наидуваат учениците и студентите, како и пропустите и грешките кои најчесто ги прават при изучување на математиката. Истражувања и анализи на оваа тема може да се сретнат [1], [3], [5] и [6], но резултатите од нив, барем во нашата земја, сè уште не се чувствуваат.

2. ПРИМЕРИ ОД ИСКУСТВОТО ВО ВРСКА СО ТРИ КАТЕГОРИИ ПРОПУСТИ

Пропустите забележани кај учениците и студентите при изучување на предметот математика, односно грешките кои тие најчесто ги прават при решавање на конкретни проблеми од математиката или нејзината примена, може да се класифицираат главно во три категории.

Првиот тип се *пропусти (грешки) направени од невнимание*. Овој тип грешки најчесто се јавуваат поради тоа што учениците и студентите не обрнуваат доволно внимание на проблемот (задачата) што го решаваат, или пак брзаат при читањето, решавањето и пишувањето. Про-

пусти направени од невнимание се најчесто следните: погрешно препишан или испуштен симбол, испуштен негативен предзнак, грешки направени при истовремено извршување на неколку операции, грешки направени поради лош ракопис (нечитко пишување), лошо запишани индекси и експоненти, лошо означени симболи (дробна црта, корени, загради, ...) и слично.

Ќе наведеме неколку примери за такви грешки кои ги имаме забележано при работа со ученици и студенти: 1) наместо 2^x , учениците и студентите често пати експонентот x го пишуваат во големина повеќе од половината на основата 2, па веќе во следниот чекор наместо 2^x , тие препишуваат $2x$, што понатаму значи погрешен резултат во секој следен чекор од решавањето; 2) слично, наместо $\log x$, од невнимание, тие препишуваат $\ln x$, што исто така значи дека добиениот резултат ќе биде погрешен; 3) ако треба да запишат израз од типот: $\frac{\sqrt{x^2+1}-2}{4}$, не ретко учениците неправилно ја запишуваат дробната црта, така што ќе ја запишат до средината на знакот „-“, па веќе во следниот чекор изразот ќе го препишат во облик $\frac{\sqrt{x^2+1}}{4}-2$, со што погрешно го продолжуваат решавањето; 4) поради тоа што честопати брзаат при решавање и давање одговори, ако наставникот праша: „која е вредноста на изразот $\frac{3}{0}$ “, многумина од учениците ќе одговорат „0“. Дел од нив не го знаат точниот одговор, но има и ученици кои знаат дека делењето со 0 не е дефинирано, иако во брзањето даваат неточен одговор; 5) при одземање на два дробно-рационални изрази, како на пример $\frac{x+1}{x} - \frac{2x+3}{2}$, прегледувајќи ги решенијата на учениците и студентите, не ретко ќе сретнеме $\frac{x+1}{x} - \frac{2x+3}{2} = \frac{2x+2-2x^2+3x}{2x}$, што се разбира, е погрешен резултат добиен при истовремено извршување на неколку операции; 6) кога студентите решаваат двојни интегрални со премин во поларни координати, не ретко го изостават јакобијанот, што секако е пропуст направен од невнимание.

Наставниците при својата работа секојдневно среќаваат примери како наведените.

Грешките направени од невнимание не претставуваат сериозна пречка за совладување на понатамошниот материјал и надградување на знаењата на учениците и студентите, но сепак даваат погрешен резултат при решавањето. Овие пропусти го водат ученикот во погрешна насока, т.е. не кон вистинската постапка на решавање, бидејќи поради направениот пропуст, изразите добиваат сосема поинаков облик од вистинскиот, а за понатамошно решавање на проблемот се избираат постапки различни од оние кои го даваат решението. По грешка направена од невнимание, честопати учениците и студентите правилно ја избираат натамошната постапка за решавање согласно изразите кои ги добиле, но тоа не е постапката која го дава точното решение на поставениот проблем. Пропустите направени од невнимание може да се надминат ако учениците и студентите не брзаат, решаваат внимателно и пишуваат јасно и читливо, а наставниците им даваат доволно време за решавање, т.е. задачите ги усогласуваат со расположливото време за решавање.

Втор тип грешки или пропусти се *грешки во пресметките*. Овој тип грешки се јавуваат поради тоа што математичките операции не се применуваат правилно, или, пак, при пресметките на калкулатор, операциите не се впишуваат правилно. А знаеме дека еден пропуст при пресметките во задача со повеќе чекори, повлекува грешка при пресметките во секој чекор понатаму, а со тоа и грешка во крајниот резултат. Наставниците при својата работа со учениците и студентите можат да посведочат за различни грешки при пресметките. Ќе наведеме неколку примери: 1) учениците често пати прават грешки во пресметките поради погрешен редослед на извршување на операциите, како во изрази од типот $2 + 2 : 2$; $3 \cdot 2 - 2 + 2 \cdot 3$; 2) при пресметките на вредноста на тригонометриска функција ($\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$) честопати ќе се случи учениците и студентите вредноста на аголот да ја запишат во степени, без да забележат дека на калкулаторот е поставено овие вредности да ги пресметува за радијани, што им дава погрешен резултат; 3) учениците и студентите го знаат редоследот на извршување на операциите, но прават грешки при пресметка на калкулатор, па така ако ги прашаме која е вредноста на изразот $2 : \frac{1}{2}$, тие, честопати пресметувајќи на калкулатор,

Пропусти во предзнаењата на студентите и учениците...

даваат различни резултати, како: 0,1 или пак 0,4 или пак 1, немајќи пракса логички да размислат и проценат дали резултатот ќе биде поголем или помал од 1.

За да се надминат овој тип на пропусти и грешки, секако повторно е потребно големо внимание при извршување на пресметките и запазување на редоследот на извршување.

Нешто друго што е исклучително важно за надминување на пропустите и грешките во пресметките е учениците и студентите да знаат да направат проценка за тоа каков резултат треба да добијат, односно да имаат осет каков број треба да биде резултатот или пак во кои граници ќе се движи. Така, ако тие делат 2 со $1/2$, т.е. 2 го делат на половинки, треба да проценат дека притоа ќе добијат повеќе од два дела, па ќе знаат дека секој резултат добиен на калкулатор, кој е помал од 1, ќе биде погрешен. Кога решаваат задачи од финансиска математика, и притоа пресметуваат при дадени услови колкава треба да биде ратата за враќање на земен долг, се случува студенти да добијат износ на ратата кој е поголем од износот на позајмениот долг. Притоа, тие го прикажуваат добиениот резултат како точен, не забележувајќи го апсурдот во него. При пресметување на веројатности, често пати добиваат резултат поголем од 1 и сметаат дека тоа е вистинскиот резултат. Во резултатите исто така ќе сретнеме распределба на веројатности чијшто збир значително се разликува од 1, а неа исто така ја сметаат за коректна.

Наставниците треба да им обрнат внимание на учениците за важноста на проценката за тоа каков резултат треба да се добие. Така, ако тие треба да пресметаат, на пример $\sqrt{150}$, добро е наставникот да им посочи дека резултатот ќе се наоѓа помеѓу $\sqrt{144}$ и $\sqrt{169}$, т.е. помеѓу 12 и 13. Уште подобра проценка, ако воочат дека 144 е поблиску до 150 отколку 169 до 150, тие ќе знаат дека резултатот е помеѓу 12 и 12,5.

Проверка на добиениот резултат, секогаш кога е тоа можно, исто така многу може да помогне во отстранување на пропустите и грешките направени при пресметките.

Третиот тип пропусти, можеби најсериозните, се *концептуалните пропусти*. Тие се јавуваат поради тоа што учениците или студентите не ги разбрале правилно математичките поими, својствата и врските помеѓу нив; ги користат формално, ставајќи акцент на формата како се напишани, а не на содржината, т.е. што е суштината на напишаното.

Концептуалните пропусти претставуваат сериозна пречка во понатамошното изучување на математиката, а уште повеќе во можноста да се примени математичкото знаење во конкретни проблеми или други области. Знаеме дека за надградување и проширување на математичкото знаење е потребна стабилна основа и претходно добро совладани содржини.

Примери за концептуални пропусти, за жал, секојдневно среќаваме при работата со учениците и студентите и можеме да наброиме многу: 1) Учениците без проблем ќе решат равенка со една непозната, кога непознатата е на левата страна на равенството, но ако ги прашаме кое е решение на равенката $2 = 5x$, кај некои од нив се јавува несигурност при решавањето, па така дел ќе одговорат решението е $2/5$, а други дел пак ќе кажат $5/2$, што е резултат на формално усвоени знаења; 2) Во решенијата на учениците, па и на студентите, среќаваме и изрази од типот $9x - 1 = 8x$, што исто така е резултат на концептуални пропусти; 3) Ако ги прашаме учениците која е вредноста на изразот $\sqrt{-8}$, најголем дел од нив ќе ни одговорат дека во множеството на реални броеви вредноста не може да се пресмета, но ако ги прашаме за вредноста на изразот $\sqrt[3]{-8}$, некои од нив ќе го дадат истиот одговор, а други пак ќе речат вредноста е ± 2 . Секако, има и ученици кои точно одговараат; 4) Уште еден пример на концептуален пропуст е равенството $5x^{-2} = \frac{1}{5x^2}$; 5) Многумина од учениците без тешкотии ќе решат систем од две равенки со две непознати, доколу непознатите се означени со x и y , но ако непознатите се j и k , тие не се осмелуваат ниту да почнат да решаваат; 6) Постојат ученици и студенти кои беспрекорно ќе скицираат график на функција, но ако треба од графикот да прочитаат, на пример, вредност на функцијата во дадена точка, тие се подзамислуваат. Тие без проблем ја скицираат кривата $y = x^2$, но се јавува проблем ако треба да скицираат $x = y^2$. Постојат и студенти кои сметаат дека кружницата е график на функција $x^2 + y^2 = R^2$. Голем дел од овие грешки би се избегнале доколку учениците суштински ги сфаќаат поимите, наместо формално, а за да се постигне тоа, секако е неизбежна помошта од нивните наставници.

Следниот пример претставува уште една потврда за формално прифатени елементарни математички поими, т.е. го наведувме како пример за сериозен концептуален пропуст. Така, на студентите во прва година на неколку различни факултети им дадовме 15 различни теми за семинарска работа, нумерирајќи ги со броеви од 0 до 14. Ним им рековме: бројот на индекс поделете го со 15; остатокот што притоа ќе го добиете Ви го дава редниот број на темата која треба да ја изработите како семинарска работа. Што се случуваше во процесот на определување на темата? Повеќе од половината на студентите делењето го извршуваа на калкулатор, па ако резултатот е децимален број, избираа тема согласно децималниот дел на количникот, секој на свој начин. Примерот само ја потврдува сериозноста на концептуалните пропусти и потребата за нивно навремено отстранување.

Концептуалните пропусти се најсериозен тип пропусти, најтешко се препознаваат и најтешко се надминуваат. За да може да се надминат, исклучително важно е на време да бидат откриени. Кога ученик прави концептуални пропусти, тој може сите пресметки да ги направи без грешка, но проблемот на почеток е поставен со грешка, или пак ученикот избира погрешна постапка, иако сите чекори во постапката се беспрекорно извршени, што секако води до погрешен резултат.

Слична класификација пропустите во предзнаењата на учениците и студентите е направена и во [7]. Различни примери на пропусти и грешки направени од ученици и студенти може да се видат и во [8], [9], [10]. Посебен осврт на концептуалните пропусти е направен во [2] и [4].

При изучување на математиката, практично е невозможно да постигнеме состојба таква што сите ученици и студенти ќе работат без пропусти и грешки, но сите ние како наставници треба да се стремиме кон тоа грешките сè поретко да се јавуваат, за што несомнено е потребно големо вложување и труд и на наставниците и на учениците.

Учењето базирано на конкретни проблеми (problem based learning) може многу да придонесе во подигање на свеста кај учениците и студентите за потребата од математиката, а со тоа и во намалување на концептуалните пропусти кои тие ги прават. Понатаму, да се стави поголем акцент на содржината на формулите и постапките, поимите, нивните својства и врските помеѓу нив, објаснето паралелно со повеќе примери, исто така ќе биде голем чекор напред во надминувањето на

проблемите со формално прифаќање на концептите. Да се постави прво проблем од секојдневниот живот, а потоа да се воведат новите поими и релациите помеѓу нив кои се потребни за да се реши тој реален проблем, несомнено ќе го зголеми интересот за правилно изучување на математичките содржини.

Ако, на пример, часот на кој треба да ги воведеме поимите кружен исечок и негова плоштина, го почнеме на начин што најпрво ќе ги дадеме основните дефиниции и формули и ќе решаваме задачи цртајќи круг и кружен исечок, најголем дел од учениците ќе останат незаинтересирани, а добар дел од нив до наредниот час и ќе забораваат што е учено. Но, ако го почнеме часот на следниот начин: да им нацртаме две парчиња пица, и објасниме дека едното е дел од пица чиј радиус е 14cm, која е поделена на 6 парчиња, и се продава со цена 60 денари, а другото е дел од пица со радиус 16 cm, која е поделена на 8 парчиња, и се продава со цена 80 денари, а потоа ги прашаеме: „кое парче пица е поисплатливо да го купиме?“, тогаш и најслабите ученици би станале заинтересирани за проблемот.



Слика 1. Пример за примена на математика во секојдневниот живот.

Ако на часот треба да се научи или повтори претворање на мерни единици од поголеми во помали или обратно, дел од учениците само формално ги препишуваат резултатите од таблата. Најголем дел од нив знаат дека $1\text{ m} = 10\text{ dm} = 100\text{ cm}$, но претворањето на m^2 или m^3 за многумина од нив претставува проблем. Тешко им е да ги запаметат релациите помеѓу секоја од овие две единици, со соодветните помали од нив, затоа што се неколку и се разликуваат со по некоја нула, па без некој интерес го проследуваат часот. Но, ако им го поставиме следниот проблем: „доколку дома на сметките за вода пишува дека сте потрошиле во кујната 2 m^3 вода, а во купатилото 8 m^3 вода, дали сте се запрашале колку литри вода сте потрошиле?“, тогаш тие сериозно стануваат

заинтересирани како може да се дојде до решението. Потоа можеме да се надворземе со следниот проблем: „доколку во просек дневно трошите 80 литри вода во кујната и 280 литри вода во купатилото, можете ли да пресметате колку m^3 вода ќе треба на крајот на месецот да платите?“. Учениците несомнено ќе сакаат да научат самостојно да пресметаат. Различни примери од секојдневниот живот, за кои е потребно да се примени математиката (уште повеќе, примери кои е невозможно да се решат без примена на математиката) може да се видат во [11].

Зголемувањето на мотивацијата кај учениците и студентите за темелно изучување на математиката е тесно поврзано со надминување на пропустите/грешките што тие ги прават. Како тие да се надминат? Најчесто, разни пропусти при изучувањето нови поими и својства се надминуваат со правилно насочени усни прашања, доколку наставникот ја открил суштината на грешката. Најчесто тоа се прави со помош на логичка анализа на поимот, но и со наведување соодветни контра-примери.

Понекогаш со право учениците прашуваат кога би им затребале сите тие поими што во математиката ги изучуваат и формулите и равенствата кои ги препишуваат од таблата. Прашуваат, затоа што не секогаш наставниците даваат конкретни примери со примена на математиката во секојдневниот живот или во другите науки. А такви примери може да се најдат за секој час. Ова бара голема посветеност на наставниците, но на крајот дава плод, а резултатите ќе бидат видливи и на краток и на долг рок.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] J. Brown, K. Skow, & the IRIS Center. *Mathematics: identifying and addressing student errors*, 2016.
https://iris.peabody.vanderbilt.edu/wp-content/uploads/pdf_case_studies/ics_matherr.pdf
- [2] Dr.S.Chamundeswari, “*Conceptual errors encountered in mathematical operations in algebra among students at the secondary level*”, IJSET - International Journal of Innovative Science, Engineering & Technology, Vol. 1, Issue 8 (2014), 24–38.
http://www.ijset.com/v1s8/IJSET_V1_I8_04.pdf

- [3] T. S. McTavish, J.A. Larusson, „*Discovering and Describing Types of Mathematical Errors*“, Proceedings of the 7th International Conference of Educational Data mining 2014, 353–355.
- [4] M. Miteva, L. K. Lazarova, M. Ljubenovska, „*Conceptual Errors – serious Barrier in Math Education*“, Information Technology and Development of Education ITRO 2019, (2019), 34–37.
- [5] H. Radatz, “*Students' errors in the mathematical learning process: a survey*”, For the learning of Mathematics, Vol 1, No 1 (1980), 16–20
- [6] H. Roselizawati, H. Sarwadi, M. Shahrill, “*Understanding students' mathematical errors and misconceptions: the case of year 11 repeating students*”, Mathematics Education Trends and Research, Vol 2014 (2014), 1–10.
- [7] Mathgreekmama | Types of mathe errors
<https://mathgeekmama.com/types-of-math-errors/>
- [8] Tutorial. Math.lamar | Common Math Errors
http://tutorial.math.lamar.edu/pdf/Common_Math_Errors.pdf
- [9] Tutorial. Math.lamar | Extracts - Common Math Errors
<http://tutorial.math.lamar.edu/extras/commonerrors/commonmatherrors.aspx>
- [10] Basic Mathematics | Common mistakes in math
<https://www.basic-mathematics.com/common-mistakes-in-math.html>
- [11] MathLabyrinth EU project
<http://mathlabyrinth.azurewebsites.net/>
- [12] Преглед на ОЕЦД за евалуацијата и оценувањето во образованието во Северна Македонија: оценка и препораки. – Скопје: УНИЦЕФ, 2019.
<http://mrk.mk/wp-content/uploads/2019/05/OECD-study-MK-EDU.pdf>
- [13] OECD – PISA results
https://www.oecd.org/pisa/publications/PISA2018_CN_MKD.pdf
- [14] OECD – PISA 2018
<https://www.oecd.org/pisa/PISA%202018%20Insights%20and%20Interpretations%20FINAL%20PDF.pdf>

Пропусти во предзнаењата на студентите и учениците...

¹ Универзитет „Гоце Делчев“ - Штип,
ул. Крсте Мисирков 10А, 2000 Штип, Р. Северна Македонија
e-mail: marija.miteva@ugd.edu.mk
limonka.lazarova@ugd.edu.mk

Примен: 31. 1. 2020

Поправен: 21. 2. 2020

Одобрен: 22. 2. 2020

Објавен на интернет: 18. 3. 2020