Мат. Бил. 7-8 (XXXIII-XXXIV),
1983-1984, (20-24),
Скопје, Југославија

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЁННЫЕ СХОДЯЩИМИСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМИ

Никола Речкоски

В этой работе ми даем один метод построения распределении с носительями некоторые компактные множества. Точно говоря если заданна некоторая сходящаяся последовательност действительных чисел $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ с пределом a, в этом случае при некоторых дополнительных ограничении можно построить распределения с носительем множество A состоящее из елементов заданой последовательности плус предел a. Здесь, как обще принято пространство основных функций будем обозначать буквой D. Пространство распределений Шварца обозначаем с D'. Если T распределение пространства D', а ϕ - функция пространства D, тогда значение распределения T на функцию ϕ будем обозначать $T(\phi) \equiv \langle T,\phi\rangle$.

<u>ТЕОРЕМА 1</u>. Пусть заданна сходящаяся последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ с пределом a. Если сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k-a|$, тогда

$$T(\phi) = \lim_{n\to\infty} \{ \sum_{k=1}^{\infty} \phi(a_k) - n\phi(a)\} \tag{1}$$

определяет распределение с носительем множество A.

<u>Доказательство</u>. Ясно что (1) представляет линейный функционал определенный на пространстве D. Если напишем формулу Тейлора для функций ϕ в окрестности точки a получаем

$$\phi(a_k) = \phi(a) + \phi'(\xi_k)(a_k-a) \tag{2}$$

где $\phi \in D$, $\xi_k = a+\theta(a_k-a)$, $0<\theta<1$.

Подставлая (2) в (1) имеем

$$T(\phi) = \lim_{n\to\infty} \{ \sum_{k=1}^{\infty} \phi(a) + \phi'(\xi_k)(a_k-a) - n\phi(a)\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \phi'(\xi_k)(a_k-a).$$

Так как

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} \phi'(\xi_k)(a_k-a)\Big| \le \sum_{k=1}^{n} |\phi'(\xi_k)||a_k-a| \le$$
$$\le \sup_{\xi}|\phi'(\xi_k)| \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |a_k-a| = U\cdot\sup_{\xi}|\phi'(\xi_k)| \qquad (*)$$

конечно будет

$$|T(\phi)| \le M\cdot\sup|\phi'(\xi_k)| \qquad (3)$$

Из последнего неравенства видно что T распределение порядка один. Из равенства (2) получаем $\phi'(\xi_k)(a_k-a) = \phi(a_k)-\phi(a)$ следовательно будет:

$$T(\phi) = \lim_{n\to\infty} \sum_{1}^{n}\left[\phi(a_n) - \phi(a)\right] \qquad (4)$$

Из (4) видно что носитель распределения T это компактное множество A. Значит, распределение T имеет компактный носитель. Имея в виду (4) можно заключить следующее: если заданна сходящаяся последовательность $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ с пределом a и если ряд $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k-a|$ сходится, тогда для каждой функции $\phi \in D$ ряд $\sum_{1}^{\infty}\left[\phi(a_k)-\phi(a)\right]$ сходится.

Совсем аналогично получаем и следующую теорему.

<u>ТЕОРЕМА 2</u>. Пусть заданна сходящаяся последовательность $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ с пределом a. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k-a)^2$ сходится тогда:

$$T(\phi) = \lim_{n\to\infty}\Big\{\sum_{k=1}^{n}\phi(a_k) - n\phi(a) - \sum_{k=1}^{n}\phi'(a)(a_k-a)\Big\} \qquad (5)$$

определяет распределение с носительем множество A.

<u>Доказательство</u>. Линейность функционала (5) очевидно. Если напишем формулу Тейлора для функции ϕ в окрестности точки a получим

$$\phi(a_k) = \phi(a)+\phi'(a)(a_k-a) + \frac{\phi''(\xi_k)}{2}(a_k-a)^2 \qquad (6)$$

$$\xi_k = a + \theta(a_k-a), \quad 0<\theta<1.$$

Подставлая (6) в (5) имеем

$$T(\phi) = \lim_{n\to\infty}\{\sum_{k=1}^{n} \phi(a)+\phi'(a)(a_k-a) + \frac{\phi''(\xi_k)}{2}(a_k-a)^2 - n\phi(a) -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} \phi'(a)(a_k-a)\} = \lim_{n\to\infty} \sum_{1}^{n} \frac{\phi''(\xi_k)}{2}(a_k-a)^2 .$$

Так как

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\phi''(\xi_k)}{2}(a_k-a)^2\right| \le \frac{1}{2} \sup_{\xi}|\phi''(\xi)| \sum_{k=1}^{n} (a_k-a)^2 \le$$

$$\le \frac{1}{2} \sup_{\xi}|\phi''(\xi)|\cdot \sum_{k=1}^{n} (a_k-a)^2$$

получаем

$$|T(\phi)| \le U \sup|\phi''(\xi)| \tag{7}$$

где $M = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty}(a_k-a)^2$. (7) показывает что функционал T является распределением порядка два. Из равенства (6) имеем

$$\frac{\phi''(\xi_k)}{2}(a_k-a)^2 = \phi(a_k) - \phi(a) - \phi'(a)(a_k-a)$$

и поэтому можно написать и так

$$T(\phi) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \phi(a_k) - \phi(a) - \phi'(a)(a_k-a) \tag{8}$$

Формула (8) ясно показивает что носитель

$$U = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k-a| .$$

распределения T это компактное множество A.

Это построение распределении можно обобщить следующим образом: если подставим

$$T(\phi) = \lim_{n\to\infty}\{ \sum_{k=1}^{n} \phi(a_k)-n\phi(a)- \sum_{k=1}^{n} \phi'(a)(a_k-a)-\ldots- \tag{9}$$

$$- \sum_{k=1}^{n} \frac{\phi^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}(a_k-a)^k\}$$

при предположении что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k-a|^m$ сходится получаем распределение с компактным носительем порядка m.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

Так как выше определённые распределения (1), (4), (5) и (9) имеют компактный носитель то они имеют представление Cauchy ([1], стр. 66, 5.1).

Для распределения (1) представление Cauchy будет

$$\hat{T}(z) = \frac{1}{2\pi i} \langle T_t, \frac{1}{t-z} \rangle, \quad z=x+iy,\ y\neq 0;$$

$\hat{T}(z)$ аналитическое представление распределения T. Если заменим получим

$$\hat{T}(z) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{n\to\infty} \{ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k-z} - \frac{1}{a-z} \}.$$

Комплекснаяя функция $\hat{T}(z)$ есть аналитическая функция в дополнении носителя T ([1], стр. 66). Сдесь полезно заменить следующее: пусть заданно сходящаяся последовательност $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ с границей a. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k-a|$ сходится, тогда функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{a_k-z} - \frac{1}{a-z})$ сходится для $\mathcal{I}mz \neq 0$. Имея ввиду что $\hat{T}(z)$ аналитическое представление распределения T мы можем написать и такое равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \phi(a_k)-\phi(a) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}(\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{a_k-x-i\varepsilon} - \frac{1}{a-x-i\varepsilon})\phi(x)dx, \quad \phi \in D.$$

Для распределения (5) аналитическое представление будет

$$\hat{T}(z) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k-z} - \frac{n}{a-z} + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k-a}{(a-z)^2}.$$

Если последовательность $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ сходится к пределу a и если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k-a)^2$, тогда функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k-z} - \frac{1}{a-z} + \frac{a_k-a}{(a-z)^2}$ сходится для котдого z такого что $\mathcal{I}mz \neq 0$.

На базы аналитического представления можно сказать если последовательность $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ сходится к пределу a и если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k-a)^2$, тогда функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k-z} - \frac{1}{a-z} + \frac{a_k-a}{(a-z)^2}$ сходится для котдого z такого что $\mathcal{I}mz \neq 0$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Бремерман: "Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье". Москва, Мир, 1968.

[2] L. Jantscher: "Distributionen". Berlin, New York, Walter de Gruyter, 1971.

[3] N. Rečkoski: "Une function analitique deffinie par une distribution"

ДИСТРИБУЦИИ ДЕФИНИРАНИ СО КОНВЕРГЕНТНИ НИЗИ

Никола Речкоски

СОДРЖИНА:

Во оваа работа опишан е еден метод за конструкција на дистрибуции со компактен носач со помош на дадени конвергентни низи. Исто така напишани се и нивните аналитички репрезентации.