Sur les fonctions de Legendre associées

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 248 (1959), 912-913

Nous nous proposons de donner des résultats nouveaux concernant les fonctions de Legendre associées. On sait que les fonctions de cette espèce interviennent dans divers problèmes [1], [2].

1. Ce sont les fonctions définies d'après Ferrers [2] par la relation

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots; -1 < x < 1),$$

où $P_n(x)$ est la fonction de Legendre.

Des transformations simples que nous ne pensons pas reproduire dans cette Note, nous ont conduit, pour le produit de deux fonctions de Legendre associées, au résultat suivant

$$P_m^r(x) P_n^s(x) = 2^r \sum_{k=0}^{\lambda} \frac{A_{m-k}^{-r} A_{k,-r} A_{n-k}^{-s}}{A_{m+n-r-k}^{s}} \frac{(m+n-r-s-2k)!}{(m+n-r+s-2k)!} \frac{2m+2n-2r-4k+1}{2m+2n-2r-2k+1}$$
$$\times {}_4F_3 \left[\begin{matrix} r-s, k+r-m, \frac{1}{2}-s, -k, \\ n+1-s-k, k+r-m-n-s, \frac{1}{2}+r \end{matrix} \; 1 \right] (1-x^2)^{\frac{r}{2}} P_{m+n-r-2k}^{s}(x),$$

où

$$A_{k,r} = \frac{\left(\frac{1}{2}-r\right)_k}{k!}, \qquad A_s^m = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_s}{(m+s)!},$$

$${}_4F_3 \left[\begin{matrix} \alpha, \beta, \gamma, \delta \\ a, b, c \end{matrix} \; x \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k (\gamma)_k (\delta)_k}{(a)_k (b)_k (c)_k} \frac{x^k}{k!},$$

$$(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1), \qquad (\alpha)_0 = 1,$$

$$\lambda = \min(m-r, n-s).$$

(m, n des nombres naturels ou 0).

Il est évident que cette formule renferme comme cas particuliers des résultats déjà connus, de Bailey [3] si l'on prend $r = s$, et de Neumann-Adams sur la composition des polynomes de Legendre en prenant $r = s = 0$.

De plus, elle nous donne la possibilité de trouver une composition des fonctions de Legendre associées d'un nombre quelconque.

2. Considérons, comme application de relation précédente l'intégrale

$$\mathrm{I}_{m,n;r,s}^{(-1,1)} = \int_{-1}^{1} \mathrm{P}_m^r(x)\,\mathrm{P}_n^s(x)\,dx.$$

On trouve

$$\mathrm{I}_{m,n;r,s}^{(-1,1)} = 0, \qquad (m+n-r-s = 2\nu+1)$$

$$= 2^{2r+1}\Gamma\left(\frac{r+s}{2}+1\right)\sum_{k=0}^{\lambda}\frac{\mathrm{A}_{m-k}^{-r}\mathrm{A}_{k,-r}\mathrm{A}_{n-k}^{-s}}{\mathrm{A}_{m+n-r-k}^{s}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}-k+1\right)}{(m+n-2k+1)\,!}\left(\frac{s-r}{2}\right)_{\nu-k}$$

$$\times\frac{(m+n-r-s-2k)\,!}{(s+\nu-k)\,!\,(\nu-k)\,!}\,\frac{2m+2n-2r-4k+1}{2m+2n-2r-2k+1}$$

$$\times\,{}_4\mathrm{F}_3\left[\begin{matrix} r-s,\ k+r-m,\ \frac{1}{2}-s,\ -k_1, \\ n+1-s-k,\ k+r-m-n-s,\ \frac{1}{2}+r \end{matrix}\ 1\right],$$

$$(m+n-r-s = 2\nu).$$

On a aussi

$$\int_{-1}^{1} x^{n-m}\mathrm{P}_m^r(x)\,\mathrm{P}_n^r(x)\,dx = 2^{m-n}\,\frac{(n+r)\,!\,\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{(m-r)\,!\,\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}.$$

Dans un cas particulier, nous avons

$$\int_{-1}^{1} x\,\mathrm{P}_n^r(x)\,\mathrm{P}_{n-1}^r(x)\,dx = \frac{2}{4n^2-1}\,\frac{(n+r)\,!}{(n-r-1)\,!}$$

formule qui se trouve incorrecte dans diverses Notes ([4]), ([5]).

([1]) W. Weizel, *Lehrbuch der Theoretische physik*, B 11, 1950, S. 865.

([2]) E. Whittaker-G.N. Watson, *A course of modern analysis*, 1952.

([3]) W. N. Bailey, *Quart. J. math.*, Oxford, 11, 1941, p. 30.

([4]) E. W. Hobson, *The theory of spherical and ellipsoïdal harmonics*, 1931.

([5]) L. Kuipers, *Monaths. Math.*, B. 63, H. 1, 1959, p. 31.