L'évaluation explicite des expressions de Turán-Szegö

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 248 (1959), 2158-2159

M. Turán a donné récemment [1] une inégalité, relative aux polynomes $P_n(x)$ de Legendre, qui a été l'occasion d'assez nombreux travaux, ces dernières années [2], [3].

Elle s'écrit

$$\Delta_n(x) = [P_n(x)]^2 - P_{n+1}(x)P_{n-1}(x) \geqq 0, \tag{1}$$

avec

$$n \geqq 1, \qquad -1 \leqq x \leqq 1.$$

Le but de la présente Note est d'exposer une nouvelle démonstration de cette inégalité. C'est précisément l'évaluation explicite de l'expression $\Delta_n(x)$, d'où résulte (1) immédiatement.

La méthode peut être étendue à des polynomes plus généraux, ce que je me propose de faire voir aussi dans cette Note.

1. Partons de la relation

$$P_m(x)P_n(x) = \sum_{k=0}^{m} B_{m,n;k} P_{m+n-2k}(x),$$

où

$$B_{m,n,k} = \frac{A_{m-k}A_k A_{n-k}}{A_{m+n-k}} \frac{2m+2n-4k+1}{2m+2n-2k+1},$$

$$A_k = \frac{1.3\ldots(2k-1)}{k!}, \qquad A_0 = 1, \qquad m \leqq n.$$

Nous obtenons

$$\Delta_n(x) = -\sum_{k=0}^{n} \frac{B_{n,n;k}}{(2n-2k-1)(n-k+1)} P_{2n-2k}(x)$$

$$= \frac{1}{2n+1} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_{n,n;k}}{(2n-2k-1)(n-k+1)} P_{2n-2k}(x).$$

Mais il n'est pas difficile de voir que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_{n,n;k}}{(2n-2k-1)(n-k+1)} P_{2n-2k}(x) \leqq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_{n,n;k}}{(2n-2k-1)(n-k+1)} = \frac{1}{2n+1},$$

$$(-1 \leqq x \leqq 1),$$

ce que nous donne l'inégalité mentionnée

$$\Delta_n(x) \geqq 0, \qquad n \geqq 1, \qquad |x| \leqq 1.$$

2. En reprenant les notations d'une Note précédente [4], nous avons

pour la composition des dérivées des polynomes de Legendre la relation suivante :

$$\frac{d^r \mathrm{P}_m(x)}{dx^r} \frac{d^r \mathrm{P}_n(x)}{dx^r} = 2^r \sum_{k=0}^{m-r} \frac{\mathrm{A}_{m-k}^{-r} \mathrm{A}_k^{-r} \mathrm{A}_{n-k}^{-r}}{\mathrm{A}_{m+n-r-k}^{r}} \frac{(m+n-2r-2k)!}{(m+n-2k)!}$$

$$\times \frac{2m+2n-2r-4k+1}{2m+2n-2r-2k+1} \frac{d^r \mathrm{P}_{m+n-r-2k}(x)}{dx^r}$$

$$= \sum_{k=0}^{m-r} \mathrm{B}_{m,n,k}^{r,r} \frac{d^r \mathrm{P}_{m+n-r-2k}(x)}{dx^r} \qquad (n \geqq m \geqq r).$$

Formons l'expression

$$\Delta_n^r(x) = \left[\frac{d^r \mathrm{P}_n(x)}{dx^r} \right]^2 - \frac{d^r \mathrm{P}_{n+1}(x)}{dx^r} \frac{d^r \mathrm{P}_{n-1}(x)}{dx^r}.$$

On a

$$\Delta_n^r(x) = \sum_{k=0}^{n-k} \frac{(2r-1)\mathrm{B}_{n,n,k}^{r,r}}{(2n-2k-1)(n-r-k+1)} \frac{d^r \mathrm{P}_{2n-r-2k}(x)}{dx^r}.$$

Vu que

$$(2r-1)\sum_{k=0}^{n-k} \frac{\mathrm{B}_{n,n,k}^{r,r}}{(2n-2k-1)(n-r-k+1)} \frac{d^r \mathrm{P}_{2n-r-2k}(x)}{dx^r}$$

$$> \frac{1}{2^r r!} \left[\frac{2r+1}{2n+1} + (2r-1) \sum_{k=0}^{n-r-1} \frac{\mathrm{B}_{n,n,k}}{(2n-2k-1)(n-k+1)} \mathrm{F}_n(x) \right] > 0,$$

avec

$$\mathrm{F}_n(x) = \frac{\dfrac{d^r \mathrm{P}_{2n-r-2k}(x)}{dx^r}}{\dfrac{d^r \mathrm{P}_{2n-r-2k}(1)}{dx^r}} \qquad (|x| \leqq 1),$$

on trouve

$$\Delta_n^r(x) > 0, \qquad -\infty < x < \infty, \qquad n \geqq r \geqq 1.$$

(1) C'est par une lettre que M. Turán a communiqué son résultat à M. Szegö; *voir* aussi P. Turán, *Čas. pest. mat. fys.*, 75, 1950, p. 112-122.

(2) G. Szegö, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 54, 1948, p. 401-405.

(3) G. Sansone, *Boll. Un. Mat. It.*, série III, Anno IV, 1949, p. 221-223.

(4) B. S. Popov, *Comptes rendus*, 248, 1959, p. 912.