SUR LES POLYNOMES DE LEGENDRE (1),

Mathesis, t. LXVIII, nos 7-8-9, Bruxelles, 1959, 239-242

Dans ce qui suit nous donnons quelques formules concernant les polynomes de LEGENDRE, qui généralisent deux problèmes récemment proposés [M, 1951-341, question **3527** ; M, 1951-167, question **3508**] (2).

1. Nous commençons par la relation bien connue de NEUMANN-ADAMS sur la composition des polynomes de LEGENDRE :

$$P_m(x)P_n(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{A_{m-k}A_kA_{n-k}}{A_{m+n-k}} \frac{2m+2n-4k+1}{2m+2n-2k+1} P_{m+n-2k}(x), \tag{1}$$

où

$$A_m = \frac{1\cdot 3 \ldots (2m-1)}{m!}, \quad A_o = 1, \quad m \leqslant n.$$

Ayant en vue que

$$\int_0^1 P_k(x)dx = \begin{cases} 0, & k = 2n \\ 1, & k = 0 \\ \dfrac{(-1)^n A_n}{2^{n+1}(n+1)}, & k = 2n+1, \end{cases}$$

nous obtenons

$$\int_0^1 P_m(x)P_n(x)dx =$$

$$\begin{cases} 0, & m+n = 2r \\ \dfrac{1}{2n+1}, & m = n \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{m} (-1)^{r-k} \frac{A_{m-k}A_kA_{n-k}}{A_{m+n-k}} \frac{A_{r-k}}{2^{r-k+1}(r-k+1)} \frac{4r-4k+3}{4r-2k+3}, & m+n = 2r+1. \end{cases}$$

Mais il est facile de voir que

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^{r-k} \frac{A_{m-k}A_kA_{n-k}}{A_{m+n-k}} \frac{A_{r-k}}{2^{r-k+1}(r-k+1)} \frac{4r-4k+3}{4r-2k+3}$$
$$= \frac{(-1)^{p+q}}{2^{m+n-1}(n-m)(n+m+1)} \frac{m!\,n!}{(p!)^2(q!)^2}, \quad n = 2p+1, \; m = 2q.$$

Donc [1]

$$\int_0^1 P_m(x)P_n(x)dx =$$

$$\begin{cases} 0, \ m \neq n \text{ et } m - n \text{ pair}, \\ \dfrac{(-1)^{p+q}}{2^{m+n-1}(n-m)(n+m+1)} \dfrac{m!\,n!}{(p!)^2(q!)^2}, \ n = 2p+1, m = 2q. \\ \dfrac{1}{2n+1}, \quad m = n \end{cases}$$

2. On peut généraliser cette formule pour le produit de trois polynomes de Legendre.

En effet, on a

$$\int_0^1 P_l(x)P_m(x)P_n(x)dx =$$

$$\begin{cases} 0, \ l+m+n \text{ pair}, \ m+n < l, \\ \sum_{k=0}^{m} (-1)^{k+r+s} \dfrac{A_{m-k}A_kA_{n-k}}{A_{m+n-k}} \dfrac{2^{2k-2r-2s}}{(k+s-r)(2r+2s-2k+1)} \\ \cdot \dfrac{(2r-2k)!\,2s!}{((r-k)!)^2(s!)^2} \dfrac{4r-4k+1}{4r-2k+1}, \ m+n = 2r+1, \ l = 2s. \end{cases}$$

3. Considérons maintenant l'intégrale

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\ldots P_r(x)P_{m+n+\ldots+r}(x)dx.$$

D'après (1) on a

$$(2) \quad \int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)P_r(x)dx = \frac{A_{k-m}A_{k-n}A_{k-r}}{A_k} \frac{2}{2k+1}, \ (m+n+r = 2k).$$

Si l'on prend $r = m+n$, on obtient

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)P_{m+n}(x)dx = \frac{A_mA_n}{A_{m+n}} \frac{2}{2m+2n+1}.$$

De la même façon on peut trouver

$$(3) \quad \int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)P_r(x)P_s(x)dx = \sum_{i=0}^{m} \frac{A_{m-i}A_iA_{n-i}}{A_{m+n-i}} \frac{A_{k-r-i}A_{k-s-i}A_{r+s-k+i}}{A_{k-i}}$$
$$\cdot \frac{2m+2n-4i+1}{2m+2n-2i+1} \frac{2}{2k-2i+1}, \qquad (m+n+r+s = 2k).$$

Lorsque $s = m+n+r$, on a

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)P_r(x)P_{m+n+r}(x)dx = \frac{A_m A_n A_r}{A_{m+n+r}} \frac{2}{2(m+n+r)+1}.$$

En suivant le même procédé, par induction complète, nous obtenons

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\dots P_r(x)P_{m+n+\dots+r}(x)dx =$$

$$\frac{A_m A_n \dots A_r}{A_{m+n+\dots+r}} \frac{2}{2(m+n+\dots+r)+1},$$

dont un cas spécial est

$$\int_{-1}^{1} P_\nu(x) \prod_{i=1}^{n} P_i(x)dx = \frac{\prod_{i=1}^{n} A_i}{A_\nu} \frac{2}{2\nu+1}, \quad 2\nu = n(n+1).$$

4. Comme application des formules précédentes, mentionnons encore les suivantes.

De (2) on a [2]

$$\int_{-1}^{1} [P_{2n}(x)]^3 dx = \frac{(A_n)^3}{A_{3n}} \frac{2}{6n+1}$$

et de (3)

$$\int_{-1}^{1} [P_n(x)]^4 dx = \sum_{k=0}^{n} (A_{n-k})^4 \left(\frac{A_k}{A_{2n-k}}\right)^2 \frac{2(4n-4k+1)}{(4n-2k+1)^2}.$$

On trouve aussi

$$\int_{-1}^{1} x^{n-m} P_m(x) P_n(x)dx = 2^{m-n} \frac{n!\,\Gamma(m+1/2)}{m!\,\Gamma(n+3/2)}.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. Whittaker-G. N. Watson, *A Course of modern Analysis,* fourth edition, Cambridge, 1952.

[2] E. Feldheim, *Bull. de la Soc. math. de France,* t. LXVIII, 1940, p. 205.