O NEKIM NEJEDNAKOSTIMA ORTOGONALNIH POLINOMA

Математичка библиотека, књ. 22, Београд, 1962, 47-53

Ispitujući neke osobine nula *Legendre*-ovih polinoma $P_n(x)$, *P. Turán* dolazi do interesantne nejednakosti [1]

$$(1)\quad \Delta_n(x)=[P_n(x)]^2-P_{n-1}(x)\,P_{n+1}(x)>0 \qquad (n>1;\ -1<x<1).$$

Ovaj svoj rezultat on saopštava u jednom pismu *G. Szegö*-u, koji sa svoje strane daje četiri različita dokaza te nejednakosti, [2], kao i slične nejednakosti za ultrasferne polinome, generalisane *Laguerre*-ove polinome i *Hermite*-ove polinome. U međuvremenu više autora daju različite dokaze gornje i sličnih nejednakosti za spomenute polinome.

Cilj ovoga rada je davanje jednog novog dokaza ovih nejednakosti. Tačnije, mi nalazimo eksplicitne oblike tih izraza iz kojih se lako ispituju njihove osobine, između kojih i (1). Pri ovome koristimo neke naše ranije rezultate, koje se odnose na kompoziciju nekih klasa ortogonalnih polinoma.

1. Polazimo od relacije

$$\begin{aligned}P_m(x)\,P_n(x)&=\sum_{k=0}^{m}\frac{A_{m-k}\,A_k\,A_{n-k}}{A_{m+n-k}}\,\frac{2m+2n-4k+1}{2m+2n-2k+1}\,P_{m+n-2k}(x)\\&=\sum_{k=0}^{m}B_{m,\,n;\,k}\,P_{m+n-2k}(x)\qquad(m<n),\end{aligned}$$

gde je

$$A_k=\frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{k!},\qquad A_0=1.$$

Lako nalazimo da je

$$\begin{aligned}[P_n(x)]^2&=\sum_{k=0}^{n}\frac{A_{n-k}\,A_k\,A_{n-k}}{A_{2n-k}}\,\frac{4n-4k+1}{4n-2k+1}\,P_{2n-2k}(x)\\&=\sum_{k=0}^{n}B_{n,\,n;\,k}P_{2n-2k}(x),\end{aligned}$$

kao i

$$\begin{aligned}P_{n-1}(x)\,P_{n+1}(x)&=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{A_{n-k-1}\,A_k\,A_{n-k+1}}{A_{2n-k}}\,\frac{4n-4k+1}{4n-2k+1}\,P_{2n-2k}(x)\\&=\sum_{k=0}^{n-1}B_{n-1,\,n+1;\,k}\,P_{2n-2k}(x).\end{aligned}$$

Vodeći računa o relacijama

$$A_{n+1-k}=\frac{2n-2k+1}{n-k+1}\,A_{n-k},$$

$$A_{n-k}=\frac{2n-2k-1}{n-k}\,A_{n+k-1},$$

imaćemo

$$\begin{aligned}B_{n-1,\,n+1;\,k}&=\frac{A_{n-k-1}\,A_{n-k+1}}{A_{n-k}\,A_{n-k}}\,B_{n,\,n;\,k}\\&=\frac{2n-2k+1}{2n-2k-1}\,\frac{n-k}{n-k+1}\,B_{n,\,n;\,k}.\end{aligned}$$

Unošenjem nađenih vrednosti u izraz

$$\Delta_n(x) = [P_n(x)]^2 - P_{n-1}(x) P_{n+1}(x)$$

dobijamo

$$\Delta_n(x) = -\sum_{k=0}^{n} \frac{B_{n,n;k}}{(2n-2k-1)(n-k+1)} P_{2n-2k}(x)$$

$$= \frac{1}{2n+1} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_{n,n;k}}{(2n-2k-1)(n-k+1)} P_{2n-2k}(x) .$$

Budući da je

$$|P_n(x)| < 1, \quad |x| < 1,$$

dobija se [3]

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_{n,n;k}}{(2n-2k-1)(n-k+1)} P_{2n-2k}(x) < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_{n,n;k}}{(2n-2k-1)(n-k+1)} .$$

S druge strane, nalazimo

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_{n,n;k}}{(2n-2k-1)(n-k+1)} = \frac{1}{2n+1} .$$

Tako dobijamo nejednakost

$$\Delta_n(x) > 0 \qquad (n > 1, \ -1 < x < 1).$$

2. Ovaj metod može se primeniti i na opštije polinome. Mi ćemo to učiniti za izvode *Legendre*-ovih polinoma koji, kao što je poznato, predstavljaju jedan vid specijalnog slučaja ultrasfernih polinoma. Pri tome polazimo od jedne formule, koja se odnosi na linearnu kompoziciju tih izvoda [4], naime

$$\frac{d^r P_m(x)}{dx^r} \frac{d^r P_n(x)}{dx^r} = 2^r \sum_{k=0}^{m-r} \left\{ \frac{A_{m-k}^{-r} A_{k,-r} A_{n-k}^{-r}}{A_{m+n-r-k}^{r}} \frac{(m+n-2r-2k)!}{(m+n-2k)!} \right.$$

$$\left. \times \frac{2m+2n-2r-4k+1}{2m+2n-2r-2k+1} \frac{d^r P_{m+n-r-2k}(x)}{dx^r} \right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{m-r} B_{m,n;k}^{r,r} \frac{d^r P_{m+n-r-2k}(x)}{dx^r} \qquad (r < m < n),$$

gde je

$$A_m^r = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_m}{(m+r)!}, \quad A_{k,r} = \frac{\left(\frac{1}{2}-r\right)_k}{k!},$$

$$(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1) \ldots (\alpha+k-1), \ (\alpha)_0 = 1.$$

Formirajmo izraz

$$\Delta_n^r(x) = \left[\frac{d^r P_n(x)}{dx^r}\right]^2 - \frac{d^r P_{n+1}(x)}{dx^r} \frac{d^r P_{n-1}(x)}{dx^r}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-r} B_{n,n;k}^{r,r} \frac{d^r P_{2n-r-2k}(x)}{dx^r} - \sum_{k=0}^{n-r-1} B_{n+1,n-1;k}^{r,r} \frac{d^r P_{2n-r-2k}(x)}{dx^r}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-r} \frac{(2r-1) B_{n,n;k}^{r,r}}{(2n-2k-1)(n-r-k+1)} \frac{d^r P_{2n-r-2k}(x)}{dx^r},$$

uzevši u obzir

$$A_{n-k+1}^{-r} = \frac{2n-2k+1}{2(n-r-k+1)} A_{n-k}^{-r},$$

$$A_{n-k}^{-r} = \frac{2n-2k-1}{2(n-r-k)} A_{n-k-1}^{-r},$$

$$B^{r,r}_{n-1,n+1;k} = \frac{2n-2k+1}{2n-2k-1}\,\frac{n-r-k}{n-r-k+1}\,B^{r,r}_{n,n;k}.$$

S druge strane je

$$B^{r,r}_{m,n;k} < B_{m,n;k},$$

$$|\Phi(x)| = \left| \frac{\dfrac{d^r P_{2n-r-2k}(x)}{dx^r}}{\dfrac{d^r P_{2n-r-2k}(1)}{dx^r}} \right| < 1 \quad (|x|<1),$$

$$\frac{d^r P_n(1)}{dx^r} \equiv \frac{d^r P_n(x)}{dx^r}\bigg|_{x=1}.$$

Tako dobijamo

$$\Delta^r_n(x) = (2r-1)\sum_{k=0}^{n-r} \frac{B^{r,r}_{n,n;k}}{(2n-2k-1)(n-r-k+1)}\,\frac{d^r P_{2n-r-2k}(x)}{dx^r}$$

$$> \frac{1}{2^r r!}\left[\frac{2r+1}{2n+1} + (2r-1)\sum_{k=0}^{n-r-1} \frac{B_{n,n;k}}{(2n-2k-1)(n-k+1)}\Phi(x)\right] > 0,$$

ili

$$\Delta^r_n(x) > 0 \quad (-\infty < x < \infty,\; n > r > 1).$$

U specijalnom slučaju, $r=1$, dobijamo rezultat *T. S. Nanjundiah*-a

$$\left[\frac{dP_n(x)}{dx}\right]^2 - \frac{dP_{n+1}(x)}{dx}\,\frac{dP_{n-1}(x)}{dx} > 0 \quad (-\infty < x < \infty,\; n > 1).$$

3. Za polinome *Чебышёва* prve vrste $T_n(x)$ i druge vrste $U_n(x)$, imamo sledeće formule za kompoziciju [5]

$$T_m(x)\,T_n(x) = \frac{1}{2}\left[T_{m+n}(x) + T_{m-n}(x)\right],$$

$$U_m(x)\,U_n(x) = \sum_{k=0}^{\min(m,n)} U_{m+n-2k}(x).$$

Lako dobijamo

$$D_n(x) = [T_n(x)]^2 - T_{n+1}(x)\,T_{n-1}(x)$$
$$= 1 - x^2,$$

$$\overline{D}_n(x) = [U_n(x)]^2 - U_{n+1}(x)\,U_{n-1}(x)$$
$$= 1,$$

odakle sleduju elementarne nejednakosti

$$D_n(x) > 0 \quad (|x|<1), \qquad \overline{D}_n(x) = 1 > 0 \quad (-\infty < x < \infty).$$

4. Razvijanje proizvoda dva *Hermite*-ova polinoma različitih indeksa u red istih polinoma, dato je relacijom

$$H_m(x)\,H_n(x) = n!\sum_{k=0}^{n}\binom{m}{n-k}\frac{H_{m-n+2k}}{k!} \qquad (m > n).$$

U specijalnom slučaju imamo

$$H_n^2(x) = n!\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}\frac{H_{2k}}{k!},$$

$$H_{n-1}(x)\,H_{n+1}(x) = (n-1)!\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{n-k-1}\frac{H_{2k+2}}{k!},$$

odakle dobijamo

$$H_n^2(x) - H_{n-1}(x)\,H_{n+1}(x) = (n-1)!\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k+1}\frac{H_{2k}(x)}{k!}$$

$$= (n-1)!\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{k-r}\frac{H_{2r}(x)}{r!}$$

$$= (n-1)!\sum_{k=0}^{n-1}\frac{H_k^2(x)}{k!},$$

tj. [6]

$$H_n^2(x) - H_{n-1}(x)\,H_{n+1}(x) = (n-1)!\sum_{k=0}^{n-1}\frac{H_k^2(x)}{k!} \qquad (n > 1).$$

5. Za izvode *Hermite*-ovih polinoma, uzimajući u obzir osobinu

$$\frac{d^r H_n(x)}{dx^r} = \frac{n!}{(n-r)!}\,H_{n-r}(x),$$

dobijamo

$$\left[\frac{d^r}{dx^r}H_n(x)\right]^2 - \frac{d^r}{dx^r}H_{n-1}(x)\,\frac{d^r}{dx^r}H_{n+1}(x)$$

$$= \frac{n!\,(n-1)!}{(n-r+1)!}\sum_{k=0}^{n-r}\binom{n-r+1}{k+1}\frac{n-k}{k!}\,H_{2k}(x)$$

$$= \frac{n!\,(n-1)!}{(n-r+1)!}\left\{(n+1)\sum_{k=0}^{n-k-1}\frac{[H_k(x)]^2}{k!} + r\,\frac{[H_{n-r}(x)]^2}{(n-r)!}\right\}$$

$$(n > 1, \quad r < n-1).$$

6. *Laguerre*-ovi polinomi definisani kao u [7, str. 377—388] zadovoljavaju sledeću relaciju

$$(n+1)\,L_{n+1}^{(\alpha)}(x) - (2n+1+\alpha-x)\,L_n^{(\alpha)}(x) + (n+\alpha)\,L_{n-1}^{(\alpha)}(x) = 0.$$

Neka je

$$G_n^{(\alpha)}(x) = L_n^{(\alpha)}(x) : L_n^{(\alpha)}(0).$$

Za ove polinome [8] imaćemo

$$(\alpha+n+1)\, G_{n+1}^{(\alpha)}(x)-(2n+1+\alpha-x)\, G_n^{(\alpha)}(x)+n\, G_{n-1}^{(\alpha)}(x)=0, \quad n>1$$

i isto tako

$$(\alpha+n)\, G_n^{(\alpha)}(x)-(2n-1+\alpha-x)\, G_{n-1}^{(\alpha)}(x)+(n-1)\, G_{n-2}^{(\alpha)}(x)=0.$$

Množeći poslednje dve relacije respektivno sa $G_{n-1}^{(\alpha)}(x)$ odnosno $G_n^{(\alpha)}(x)$, dobijamo posle oduzimanja

$$(*) \qquad (\alpha+n+1)\,\Delta_n^{(\alpha)}-(n-1)\,\Delta_{n-1}^{(\alpha)}=(G_n^{\alpha}-G_{n-1}^{\alpha})^2 \qquad (n>1),$$

gde je

$$\Delta_n^{(\alpha)}=[G_n^{(\alpha)}(x)]^2-G_{n-1}^{(\alpha)}(x)\, G_{n+1}^{(\alpha)}(x), \qquad G_n^{(\alpha)}=G_n^{(\alpha)}(x).$$

Polazeći od (*) lako dolazimo do formule

$$\Delta_n^{(\alpha)}=\frac{(n-1)!}{(\alpha+1)_{n+1}}\sum_{k=1}^{n}\frac{(\alpha+1)_k}{(k-1)!}\,[G_k^{(\alpha)}-G_{k-1}^{(\alpha)}]^2.$$

Odavde nalazimo isto tako

$$\Delta_n^{(\alpha)}=\frac{x^2(n-1)!}{\Gamma(\alpha+n+2)}\sum_{k=1}^{n}\frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{k!}\left[\frac{d}{dx}G_k^{(\alpha)}(x)\right]^2$$

$$(n>1, \ \alpha>-1).$$

LITERATURA

[1] P. Turán, *On the zeros of the polynomals of Legendre*, Časopis pro peštovani Matematiky a Fysiky, vol. 75 (1950), pp. 113—122.

[2] G. Szegö, *On an inequality of P. Turán, concerning Legendre polynomials*, Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 54 (1948) pp. 401—405.

[3] B. S. Popov, *L'évaluation explicite des expressions de Turán—Szegö*, Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, t. 248 (1959), p. 2158.

[4] B. S. Popov, *Nekoi novi relacii za polinomite na Legendre*, Annuaire de la Faculté de Philosophie de l'Univ. Skopje, Section des Sc. naturelles, t. 10 (1957), № 1, s. 1—35.

[5] E. Feldheim, *Formules d'inversion et autres relations pour les polynômes ortogonaux classiques*, Bulletin de la Société mathématique de France, t. LXVIII (1940), p. 199.

[6] Hsien-Yü Hsü, *Problem* 4125 (1946, 470), The American Mathematical Monthly, vol. 55, № 1 (1948), pp. 34—35.

[7] D. S. Mitrinović, *Zbornik matematičkih problema*, t. II, Beograd, drugo izdanje, 1960.

[8] V. R. Thiruvenkatachar—T. S. Nanjundiah, *Inequalities concerning Bessel function and orthogonal polynomials*, Proceedings of the Indian Academy of Sciences, vol. XXXIII, № 6 (1951), p. 372.