ЗА WHITTAKER-ОВАТА РАВЕНКА

Пристапни предавања, МАНУ, Скопје, 1969, 143-150

I

1. Познато е дека математиката во својот развој е поврзана длабоко со општествениот и општокултурниот развој на средината што ја изградува. Често пати не само примените го поттикнувале развојот на одделните гранки од математиката, туку и самиот „дух" на математиката од некоја епоха и средина е нивни одраз. Затоа значи, поприродно е кога викаме дека тие растат заедно. Секое откритие доаѓа во својот час. Него го овозможиле тие што му претходеле. Во секој момент се знае што е тоа што го сугерира прашањето и кои се средствата за одговор. Тоа значи дека секоја епоха има свои проблеми што се поставуваат пред нејзината средина. Таа мора да зазема и став спрема нив да ги решава и затоа чини чекор напред со нови откритија.

Во времето на Leibnitz и пред него, математиката била клуч кон механиката, а механиката пак основа за запознавање на природата. Математиката станала не само образец за другите науки, туку и средство за пронајдоци. Типично за тој период било не само убедувањето дека математиката го изучува својството на материјата, туку дека и во хармонијата на математиката на некој начин се одразува хармонијата на светот. Во таа епоха кога математиката е пред сè и орудие за познавање на вселената, се јавува една нова дисциплина, која и до денес останува модерна заради својата тесна врска со примената.

Заправо тоа бил Leibnitz, тој голем филозоф и математичар што сакал нашиот свет да биде најдобар од сите можни светови, кој уште 1676 година прв го исползувал терминот диференцијални равенки, за да ја одбележи релацијата меѓу величините dx и dy, наречени диференцијали по променливите x и y. Ова доаѓа и како последица на неговите општи логистички сфаќања за основите на математиката, настојувајќи за своите новооткриени методи да најде погодни обележувања и апаратура. Тој смета дека обележувањата треба да ја изразуваат внатрешната природа на проблемите, а со тоа се смалува напорот за мислење.

2. Развојот на теоријата на диференцијалните равенки набргу го проширува поимот со вклучување на алгебарски и трансцедентни изрази заедно со диференцијали или диференцијални количници.

Зашто историската вредност на научните откривања зависат не од бројот на посебните феномени што се откриваат, туку повеќе од степенот колку тие можат да ги координираат различните факти и да ги сведат на еден прост закон.

Едновремено се јавува и проблемот за решавање на диференцијалните равенки и со него математичарите започнуваат сè повеќе да се занимаваат. Најнапред Cauchy-евата теорија на функции од комплексна променлива дала можност да се изгради целата теорија за линеарните диференцијални равенки на една цврста аналитичка основа и по таков начин да се устрои оваа општа теорија позната денес под името — аналитичка теорија на линеарните диференцијални равенки. Како задача на таа теорија се јавува испитување на функциите од комплексна променлива што се определени со линеарни диференцијални равенки со аналитички коефициенти. Во оваа насока познати се и резултатите на Riemann, кои се длабоки по идеи и непосредно сврзани со линеарните диференцијални равенки. Овој класичен период од развојот на теоријата на диференцијалните равенки, што завршува со работите на Sophus Lie кон крајот на минатиот век, како своја основна задача го поставува наоѓањето на општото решение на широки класи равенки со помош на елементарни функции. Меѓутоа наскоро се покажува дека решенија во таа смисла не постојат за многу типови равенки и дека во тој правец не е можно да се изгради општа теорија за диференцијалните равенки.

3. Современата теорија на линеарните диференцијални равенки го има својот никулец во мемоарите на Fuchs, кои се јавуваат кон крајот на XIX век. Во нив Fuchs ја формулира основната задача на оваа теорија по следниов начин: ,,При сегашнава состојба на знаења, во теоријата на диференцијалните равенки се поставува задачата, која не се состои во тоа дадената равенка да се сведе на квадратури, туку повеќе од самата равенка да се добие претстава за поведението на нејзините интеграли во сите точки од рамнината''.

Во своите трудови Fuchs подробно ги разгледува случаите, кога особените точки на диференцијалната равенка задоволуваат некои определени услови, при кои не е можно лесно да се напише разложувањето во ред на решението на равенката во близина на тие точки. Овие особени точки наречени регуларни, при линеарните диференцијални равенки се карактеризираат со условот, секој коефициент на линеарната равенка во нив да има пол од ред што не е поголем од неговиот индекс. По работите на Fuchs се јавува цела низа трудови посветени на аналитичната теорија на линеарните равенки.

4. Овој метод за решавање го укажува принципиелниот пат за добивање на решение и во повеќе случаи истото не се добива експлицитно. Меѓутоа многу проблеми од примената каде доаѓа до израз врската меѓу теоријата и практиката укажуваат на потребата, решенијата да се добиваат во експлицитен вид или да се изучи општата закономерност за нивното поведение. Затоа се бараат нови методи кои се од непосредно значење за неа. Познато е како што рековме погоре дека токму диференцијалните равенки се оној дел од математиката што се најблизу до примената. Да ги спомeнеме само најбитните примени во модерната техника, како што се проблемите за осцилација на жица или мост, прашањата кои се однесуваат до електричните кола или машини, конструкцијата на машините за сметање или контрола итн. Во основата на сите тие проблеми се наоѓаат диференцијалните равенки.

II

5. Во примената постои постојан и природен напор, диференцијалните равенки да се сведуваат на најпрости видови. Еден од таквите којшто претставува и метод за нивно испитување и решавање е методот на факторизација на обичните линеарни диференцијални изрази и нивната трансформација во такви од попрост вид.

Познато е дека многу напредоци во науката се остварени со пренесување на една теорија од областа за која е дадена во друга, барајќи притоа аналогни закони за веќе познатите такви. Теоријата се пренесува со прилагодување на неиспитаната област како и расудувањето кое на друго место е испробано и за кое е познат општиот принцип. Така се покажува дека еден од најприродните и најефектни методи за испитување на диференцијалните равенки и нивното решавање е спомнатиот метод на факторизација на диференцијалните полиноми. При ова ни помага аналогијата установена меѓу алгебарските и диференцијалните полиноми која иако не е полна ни дава многу плодни резултати .

Во основата на тој метод се наоѓа поимот за редуктибилност, познат од теоријата на алгебарските равенки, кој се пренесува и на диференцијалните равенки.

Според Frobenius знаеме дека равенката

$$L(D)\,y=0, D=\frac{d}{dx}$$

од n-ти ред е редуктибилна, ако таа може да се напише во следниов вид

$$L(D)\,y=M(D)\,N(D)\,y=0$$

т.е. левата страна да се претстави како производ на диференцијални множители.

Затоа претставува интерес за дадена диференцијална равенка да се испитаат условите за редуктибилност.

6. Наша цел ќе биде да ги побараме условите за редуктибилност за Whittaker-овата диференцијална равенка

$$\frac{d^2W}{dz^2}+\left[-\frac{1}{4}+\frac{k}{z}+\frac{1/4-m^2}{z^2}\right]W=0. \tag{1}$$

Оваа равенка се среќава при изучување на вибрациите на параболоид и на потенцијал од хиперцилиндри што го имаат за база тој параболоид, чија равенка е

$$\frac{x^2}{\lambda-1}+\frac{y^2}{\lambda}-2z=\lambda,$$

или уште

$$x=\sqrt{(\rho-1)(\mu-1)(\nu-1)},\ y=i\sqrt{\rho\mu\nu},\ z=-\frac{1}{2}(\sqrt{\rho+\mu+\nu-1}).$$

Да побараме едно решение на Laplace-овата равенка

$$\frac{\delta^2u}{\delta\rho^2}+\frac{\delta^2u}{\delta\mu^2}+\frac{\delta^2u}{\delta\gamma^2}+\frac{\delta^2u}{\delta\lambda^2}=0,$$

такво што променливите се раздвојуваат. Земаме

$$u=R(\rho)\,M(\mu)\,N(\nu)\,e^{\lambda t}.$$

По внесување во Laplace-овата равенка се добива за R равенката

$$\sqrt{\rho(\rho-1)}\,\frac{d}{d\rho}\left[\sqrt{\rho(\rho-1)}\,\frac{dR}{d\rho}\right]+\left[h+k\rho-\frac{\lambda^2}{4}\,\rho^2\right]R=0$$

Ставајќи $\rho = \cos^2 x$, $R = y$ и менувајќи ги константите добиваме

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left[n - \frac{1}{8}\xi^2 - (p + v\xi\cos 2x + \frac{1}{8}\xi^2\cos 4x\right]y = 0,$$

што претставува равенка на Whittaker од нормален вид.

Со смена на функцијата $y = e^{-\frac{1}{4}\xi\cos^2 x} Y$, $z = cos^2 z$ таа го добива обликот

$$4z(z-a)\frac{d^2y}{dz^2} + 2(2z-a)\frac{dy}{dz} - \left[\eta - (p+1)\xi\left(\frac{Rz}{a} - 1\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\xi^2}{a^2} z(z-a)\right]y = 0$$

Да претположиме дека во оваа равенка a и ξ се стремат кон нулата, така што нивниот однос $\frac{\xi}{a}$ се стреми кон единица. По сменување на функцијата y со смената $y = z^{-1/2} W$ и земајќи уште

$$p + 1 = 2k,\ \eta = 4m^2,$$

ја добиваме равенката (1).

7. За да ги најдеме условите при кои оваа равенка е сводлива на продукт од линеарни фактори, ја разгледуваме по општата равенка

$$\sum_{i=1}^{2} P_i(x)\, D^{2-i} y = 0, \tag{2}$$

каде што е

$$P_i(x) = \sum_{k=o}^{2} a_{ik} x^k,\ a_{o0} = a_{o1} = a_{i2} = 0,\ a_{o2} = 1.$$

Коефициентите aik се произволни параметри. Очигледно е дека оваа равенка ја опфаќа Whittaker-овата како посебен случај.

Според теоремата на Фробениус, потребен и доволен услов за равенката (2) да биде редуктибилна е да може таа да се напише во обликот

$$(\delta + f_1)(f_3\delta + f_2)y = 0, \qquad \delta = xD, \tag{3}$$

каде што се

$$f_i = \sum_{k=o}^{n+1} \omega_{i,\,k}\, x^{n-k+1}, \qquad i = 1, 2, 3$$

$$\omega_{3,\,k} = o,\quad k = 0, 1, 2, \ldots\ n-1,\ \omega_{1,o} = 0.$$

По споредување на равенките (2) и (3) ќе имаме

$$f_1 + f_2 + xf'_1 + f_1 f_3 = f_1\,(a_{11} + a_{12}\,x)$$

$$xf'_2 + f_2 f_3 = f_1\,(a_{20} + a_{21}\,x + a_{22}\,x^2),$$

од каде по внесување на вредностите за f_i следува

$$(n-k+2)\,\omega_{1},k + (\omega_{3,n+1} - a_{11})\,\omega_{1},k + (\omega_{3},n - a_{12})\,\omega_{1,\,k+1} + \omega_{2,k} = 0 \tag{4}$$

$$(n-k+2)\,\omega_{2,k1}+\omega_{3,n+1}\,\omega_{2,k-1}+\omega_{2,k}\,\omega_{3,n}-a_{22}\,\omega_{1,k+1}-a_{21}\omega_{1,k}-$$
$$-a_{20}\omega_{1,k-1}=0$$

Оттука ги добиваме параметрите $\omega_{i,k}$.

Со елиминирање на овие параметри $\omega_{i,k}$ од претходните равенки (4), се добива релацијата

$$2a_{21}-a_{10}\,a_{11}=\pm\sqrt{a_{11}{}^2-4a_{22}}\,(2n+1-\sqrt{(a_{10}-1)^2-4a_{20}},$$

којашто и претставува критериум за редуктибилност на равенката (2).

8. Пренесени овие резултати за Whittaker-овата равенка (1) ни го даваат следново:

1°. За равенката (1) да биде редуктибилна потребно и доволно е да бидат задоволени условите

$$-n=\frac{1}{2}\pm k\pm m,\ n\text{—природен број},$$

2°. Во тој случај таа може да се напише во обликот

$$(\delta+\Phi_1)(\Phi_2\delta+\Phi_3)y=0,$$

каде што се

$$\Phi_1=\Phi_1(x)=-\frac{1}{2}L_{1(x)}^{-m-1}-\frac{1}{2}L_1^{-2m-2}$$

$$\Phi_2=L_{n\,(x)}^{-2m},$$

$$\Phi_3=\frac{x-2m-1}{2}L_n^{-2m}+(2m-n)\,L_n^{2m-1}$$

а $L_n^{(\alpha)}(x)$ Laguerre-ови полиноми.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Данилевский — Лайпо И. А.*, Применение функций от матриц и теореми линейных систем обыкновеных дифференциальных уравнений, Гостиздат. — Москва — 1957, статья В. И. Смирнова.

2. *Campbell R.*, Theorie générale de l'équation de Mathieu, Paris 1955, pp. 21—25.

ON WHITTAKER'S EQUATION

(Summary)

It is known, according to Frobenius, that the equation

$$L(D)y=0,\ D=\frac{d}{dx},$$

of the n-order is reducible, if it can be written in the following way

$$L(D)y=M(D)\,N(D)\,y=0,$$

i. e. if the left side can be represented as a product of differential factors.

Therefore it is of great interest, the conditions of reducibility of the given differentiatial equation to be studied.

On this occasion, we shall surch the conditions necessary for reducibility, of the Whittaker's differential equation

(1) $$\frac{d^2W}{dz^2}+\left[-\frac{1}{4}+\frac{k}{z}+\frac{\frac{1}{4}-m^2}{z^2}\right]W=0.$$

In order to find the conditions in which this equation is reducible, we consider the general equation

$$\sum_{i=0}^{2} P_i(x) D^{2-i} y = 0, \tag{2}$$

where

$$P_i(x) = \sum_{k=0}^{2} a_{ik} x^k, \qquad a_{oo} = a_{01} = a_{10} = 0; \; a_{02} = 1.$$

The coefficients a_{ik} are parameters arbitraire. It is obvious that this equation uncludes Whitaker's equation as a special case.

According Frobenius, the necessary and sufficient conditions the equation (2) to be reducible, is the possibility this equation to be written in the form

$$(\delta + f_1)(f_3 \delta + f_2) y = 0, \qquad \delta = xD \tag{3}$$

where there are

$$fi = \sum_{k=0}^{n+1} \omega_{i,k} x^{n-k+1}, \quad i = 1, 2, 3 \tag{4}$$

$$\omega_{3,k} = 0, \quad k = 0,1,2,\dots n-1; \quad \omega_{1,0} = 0.$$

Comparing the equations (2) and (3) we get

$$f_1 + f_2 + x f_1 + f_1' f_3 = f_1 (a_{11} + a_{12} x)$$

$$x f_2' + f_2 f_3 = f_1 (a_{20} + a_{21} x + a_{22} x^2),$$

out of which, after introducing the values for f_i from equation (4), we obtain

$$(n-k+2)\omega_{1k} + (\omega_{3,n+1} - a_{11})\omega_{1k} + (\omega_{2n} - a_{12})\omega_{1,k+1} + \omega_{2k} = 0, \tag{5}$$

$$(n-k+2)\omega_{2,k-1} + \omega_{3,n+1}\omega_{2,k-1} + \omega_{2k}\omega_{3n} - a_{22}\omega_{1,k+1} - a_{21}\omega_{1k} -$$

$$- a_{20}\omega_{1,k-1} = 0.$$

Consequently, parameters ω_{ik} are obtained.

By eliminating these parameters ω_{ik} from the previous equations (5), it follows

$$2a_{21} - a_{10} a_{11} = \pm\sqrt{a_{11}^2 - 4a_{22}}\,(2n + 1 - \sqrt{(a_{10} - 1)^2 - 4a_{20}}),$$

which in fact represents the criterium of the reducibility of the equation (4).

For Whittaker's differential equation these results when transfered, give the following:

1. In order the equation (1) to be reducible, it is necessary the following conditions to be satisfied

$$-n = \frac{1}{2} \pm k \pm m, \; n \text{— nombre naturel.}$$

2. In that case it can be written in the form

$$(\delta + \Phi_1)(\Phi_2 \delta + \Phi_3) y = 0, \; \delta = xD$$

where

$$\Phi_1(x) = -\frac{1}{2} L_{1\,(x)}^{-m-1} - \frac{1}{2} L_1^{-2m-2},$$

$$\Phi_2(x) = L_{n\,(x)}^{-2m},$$

$$\Phi_3(x) = \frac{x - 2m - 1}{2} L_n^{-2m} + (2m - n) L_n^{-2m-1},$$

$L_n^{(\alpha)}(x)$ — are Laguerre's polynomials.