О НУЛАМА СВИХ ИЗВОДА ЈЕДНЕ ФАМИЛИЈЕ РЕАЛНИХ ФУНКЦИЈА

СИМОН ЋЕТКОВИЋ

Циљ нам је да изнесемо једну интересантну особину нула свих извода једне фамилије функција.

1. — Нека је дата реална фамилија функција[1])

$$f(x, p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{x - a_i},$$

где су: a_i реални бројеви, p_i позитивни бројеви и n природан број и $a_i < a_{i+1}$.

У овом раду биће показано да се све реалне нуле свих извода фамилије функција $f(x, p)$ налазе у интервалу (a_1, a_n), а скоро све у произвољно малој околини бројева $\frac{a_i + a_{i+1}}{2}$, $(i = 1, 2, \cdots, n-1)$.

2. 1. — С обзиром да је j-ти извод функција $f(x, p)$, где је j непараран природан број:

$$f^{(j)}(x, p) = -j! \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{(x - a_i)^{j+1}} < 0, \tag{1}$$

то изводи непарног реда немају реалних нула.

2. 2. — Како је k-ти извод функција $f(x, p)$, где је k паран број:

$$f^{(k)}(x, p) = k! \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{(x - a_i)^{k+1}},$$

---

[1]) G. Polya und G. Szegö, *Aufgaben und Lehrsätze* II, Aufgabe 26, S. 41;

Видети такође:

P. Aubert et G. Papelier, *Exercices d'Algebre, d'Analyse et de Trigonométrie*, Tome I, E. 602, 306;

2. Марковић, зад. 17. *Весник Друштва математичара и физичара Н. Р. Србије*, III, 1—2, 1951.

произилази:

$$f^{(k)}(x,p) \to -\infty, \text{ када } x \to a_i - 0,$$

$$f^{(k)}(x,p) \to \infty, \text{ када } x \to a_i + 0,$$

$$f^{(k)}(x,p) \to 0, \text{ када } x \to -\infty,$$

$$f^{(k)}(x,p) \to 0, \text{ када } x \to \infty,$$

а с обзиром да је према (1)

$$f^{(k+1)}(x,p) < 0,$$

то свака од функција $f^{(k)}(x,p)$ има по једну и само по једну нулу само у интервалу (a_i, a_{i+1}), коју ћемо означити са $(x_i)_k$ и тих интервала, односно нула, је $n-1$.

Овим је доказан први део тврђења под 1.

2. 3. 0. — Показаћемо сада да и

$$(x_i)_k \to \frac{a_i + a_{i+1}}{2} \text{ када } k \to \infty.$$

2. 3. 1. — Како је

$$0 < x - a_i < |x - a_m| \text{ за } m \neq i \text{ и за } a_i < x < \frac{a_i + a_{i+1}}{2},$$

то за свако $a_i < x_1 < \frac{a_i + a_{i+1}}{2}$ постоји одговарајуће k_1 такво да је

$$k!\,\frac{p_i}{(x_1 - a_i)^{k+1}} > k!\left|\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{(x_1 - a_i)^{k+1}} - \frac{p_i}{(x_1 - a_i)^{k+1}}\right|,$$

за свако $k > k_1$.

Па је на основу тога

$$f^{(k)}(x_1, p) > 0 \text{ за } k > k_1. \tag{2}$$

2. 3. 2. — Како је

$$0 > x - a_{i+1} > -|x - a_m| \text{ за } i+1 \neq m \text{ и за } a_{i+1} > x > \frac{a_i + a_{i+1}}{2},$$

то за произвољно $a_{i+1} > x_2 > \frac{a_i + a_{i+1}}{2}$ постоји одговарајуће k_2 такво да је

$$k!\,\frac{p_i}{(x_2-a_{i+1})^{k+1}} < -k!\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{(x_2-a_i)^{k+1}}-\frac{p_i}{(x_2-a_{i+1})^{k+1}}\right|,$$

за $k > k_2$,
па је на основу тога

$$f^{(k)}(x_2, p) < 0 \text{ за } k > k_2. \tag{3}$$

2. 3. 3. — На основу (1), (2) и (3) закључујемо да је $x_1 < (x_i)_k < x_2$ за $k > \max(k_1, k_2)$ где су x_1 и x_2 два уочена броја који се произвољно мало разликују од $\frac{a_i+a_{i+1}}{2}$ или друкчије написано

$$(x_i)_k \to \frac{a_i+a_{i+1}}{2}, \text{ када } k \to \infty.$$

Овим је доказан и други део тврђења под 1.

Simon Ćetković

SUR LES ZÉROS DES DÉRIVÉES D'UNE FAMILLE DES FONCTIONS RÉELS

(Résumé)

Dans ce travail l'autheur part d'une famille de fonctions

$$f(x, p)=\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{x-a_i},$$

(a_i, p_i, n étant respectivement les nombres réels, les nombres positifs et le nombre naturel, avec $a_i < a_{i+1}$), et montre que tous les zéros réels de toutes les dérivées de la famille de fonctions $f(x, p)$ se trouvent dans l'intervalle (a_1, a_n). De même presque toutes les zéros des dérivées de la familles de fonctions $f(x, p)$ se trouvent dans un voisinage arbitrairement petit des nombres

$$\frac{a_i+a_{i+1}}{2},\ (i=1, 2, \cdots, n-1).$$