ЗА ЕДНА КЛАСА ПОЛИНОМИ ПОВРЗАНИ СО ОРТОГОНАЛНИТЕ ПОЛИНОМИ

Прилози МАНУ, Оддел. за мат.-тех. науки, III/3, 1970, 5-14

Во еден неодамна објавен труд M. Parodi [1] даде некои релации за полиномите на Legendre. Наша намера е во овој труд да дадеме воопштувања на тие резултати за ортогоналните полиноми. Следејќи ја истата метода, ние ќе изведеме нови релации за овие полиноми. Ќе бидат разгледани и некои посебни видови на класичните ортогонални полиноми.

1. Да претпоставиме дека е V векторски простор на полиноми од степен помал или еднаков на n. Познато е дека ортогоналните полиноми $p_n(x)$ образуваат база B на V. Ние ќе формираме класи од полиноми што припаѓаат на Vи кои се изразуваат во B и имаат една дадена нула $\lambda \in R$ или C, додека другите нули се реални и се наоѓаат во интервалот (a, b), каде што се нулите и на ортогоналните полиноми.

2. Познато е дека ортогоналните полиноми од n-ти ред $p_n(x)$ можат да бидат претставени во обликот

$$p_n(x) = \begin{vmatrix} A_n x + B_n & -C_n & 0 & \dots & 0 \\ -1 & A_{n-1} x + B_{n-1} & -C_{n-1} & \dots & 0 \\ 0 & -1 & A_{n-2} x + B_{n-2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -C_2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_1 x + B_1 \end{vmatrix}$$

на детерминанта од n-ти ред, каде што A_k, B_k и C_k, $k = 1,2, \dots n$ се константи и $A_k \neq 0$, $C_k \neq 0$; C_1 е произволно.

Да го разгледаме полиномот од n-та степен $(n > 2)$

$$(1) \quad \Pi_n(x) = \begin{vmatrix} \omega_n - 1 + B_n + A_n x & -C_n & 0 & \dots & 0 \\ \omega_{n-1} - 1 & A_{n-1} x + B_{n-1} & -C_{n-1} & \dots & 0 \\ \omega_{n-2} & -1 & A_{n-2} x + B_{n-2} & \dots & 0 \\ \omega_{n-3} & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_2 & 0 & 0 & \dots & -C_2 \\ \omega_1 - C_1 & 0 & 0 & \dots & A_1 x + B_1 \end{vmatrix}$$

каде што е

$$\omega_k = \omega_k(\lambda) = 1 + C_k - B_k - \lambda A_k, \quad k = 1, 2, \ldots n.$$

Ако ги додадеме кон елементите од првата колона на детерминантата (1) тие од останатите колони, се забележува дека елементите на овза имаат заеднички множител $x-\lambda$.

Развивајќи ја детерминантата (1) добиваме

$$\text{(2)} \qquad \Pi_n(x) = p_n(x) + (\omega_n - 1)\, p_{n-1}(x) + \omega_{n-1} C_n\, p_{n-2}(x) +$$
$$\omega_{n-2}\, C_n C_{n-1}\, p_{n-3}(x) + \ldots + (\omega_1 - C_1)\, C_n C_{n-1} \ldots C_2\, p_0(x).$$

Да ја трансформираме детерминантата (1) така што ќе ги додадеме кон елементите од првата колона елементите од останатите колони. Ќе имаме

$$\text{(3)} \qquad \Pi_n(x) = (x-\lambda)\, \big(A_n\, p_{n-1}(x) + A_{n-1} C_n\, p_{n-2}(x) + A_{n-2}\, C_n C_{n-1}$$
$$p_{n-3}(x) + \ldots + A_1 C_n C_{n-1} \ldots C_2\, p_0(x)\big).$$

Од (2) и (3) следува идентитетот

$$\text{(4)} \qquad p_n(x) + (\omega_n - 1)\, p_{n-1}(x) + \omega_{n-1} C_n\, p_{n-2}(x) + \ldots +$$
$$(\omega_1 - C_1)\, C_n C_{n-1} \ldots C_2\, p_0(x) = (x-\lambda)\big(A_n\, p_{n-1}(x) + A_{n-1}$$
$$C_n\, p_{n-2} + \ldots + A_1 C_n \ldots C_2\, p_0\big)$$

Нулите на полиномот $\Pi_n(x)$ што се различни од λ се истите на полиномот

$$\varphi_{n-1}(x) = A_n\, p_{n-1}(x) + A_{n-1} C_n\, p_{n-2}(x) + \ldots + A_1 C_n C_{n-1} \ldots C_2\, p_0(x).$$

Ако земеме

$$\omega_k(\bar{\lambda}) = 0, \qquad k = 2, 3, \ldots n,$$
$$\omega_1(\bar{\lambda}) = C_1,$$

идентитетот (4) ни дава

$$\text{(5)} \qquad p_n(x) - p_{n-1}(x) = (x - \bar{\lambda})\,\big(A_n\, p_{n-1}(x) + A_{n-1} C_n\, p_{n-2}(x) + \ldots$$
$$+ A_1 C_n C_{n-1} \ldots C_2\, p_0(x)\big).$$

Нулите на полиномот $p_n(x) - p_{n-1}(x)$ лежат (2) во внатрешноста на интервалот (a, b). Следува дека и нулите на $\varphi_{n-1}(x)$ се во истиот интервал, па значи и нулите на полиномот $\Pi_n(x)$ што се различни од λ.

Согласно (3) и (5) на полиномот $\Pi_n(x)$ може да се даде видот

$$\text{(6)} \qquad \Pi_n(x) = \frac{x-\lambda}{x-\bar{\lambda}}\, \big(p_n(x) - p_{n-1}(x)\big)$$

3. Да го разгледаме сега полиномот од n-та степен

$$\text{(7)} \quad \Pi_{n2}(x) = \begin{vmatrix} \omega_n + B_n + A_n x & -C_n - 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \omega_{n-1} - 1 & A_{n-1} x + B_{n-1} & -C_{n-1} & \ldots & 0 \\ \omega_{n-2} & -1 & A_{n-2} x + B_{n-2} & \ldots & 0 \\ \omega_{n-3} & 0 & -1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_1 - C_1 & 0 & 0 & & A_1 x + B_1 \end{vmatrix}$$

Ако и во оваа детерминанта ја извршиме трансформацијата на тој начин што ќе ги додадеме кон елементите од првата колона тие на останатите колони, забележуваме дека во трансформираната детерминанта елементите од првата колона имаат заеднички множител $x-\lambda$. По развивањето на таквата детерминанта имаме

$$\text{(8)} \qquad \Pi_{n2}(x)=(x-\lambda)\big(A_n p_{n-1}(x)+A_{n-1}(C_n+1)p_{n-2}(x)+A_{n-2}(C_n+ \\ +1)C_{n-1}p_{n-3}(x)+\ldots+A_1(C_n+1)C_{n-1}\ldots C_2 p_o(x)\big).$$

Директното развивање на детерминантата (7) ни дава

$$\text{(9)} \qquad \Pi_{n2}(x)=p_n(x)+\omega_n p_{n-1}(x)+\big(\omega_{n-1}(C_n+1)-1\big)p_{n-2}(x)+ \\ +\omega_{n-2}(C_n+1)C_{n-1}p_{n-3}+\ldots+(\omega_1-C_1)(C_n+1)C_{n-1}\ldots p_o(x)\big).$$

По споредувањето на (8) и (9), земајќи

$$\begin{matrix}\omega_k(\overline{\lambda})=0 \\ \omega_1(\overline{\lambda})=C_1,\end{matrix} \quad , \; k=2,3,\ldots n,$$

добиваме

$$\text{(10)} \qquad p_n(x)-p_{n-2}(x)=(x-\lambda)\big(A_n\, p_{n-1}(x)+A_{n-1}(C_n+1)\, p_{n-1} \\ (x)+A_{n-2}(C_n+1)C_{n-1}p_{n-3}(x)+\ldots+A_1(C_n+1)C_{n-1}\ldots C_2 p_o\big)$$

Нулите на полиномот $p_n(x)-p_{n-2}(x)$ се наоѓаат во интервалот (a, b), па во истиот ќе се наоѓаат и нулите на полиномот

$$\varphi_{n-1}(x)=A_n p_{n-1}(x)+A_{n-1}(C_n+1)p_{n-2}(x)+\ldots+ \\ +A_1(C_n+1)C_{n-1}\ldots C_2 p_o(x).$$

Следува дека и полиномот $\Pi_{n2}(x)$ ги има во истиот интервал нулите што се различни од λ.

Од (8) и (10) имаме

$$\text{(11)} \qquad \Pi_{n2}(x) = \frac{x-\lambda}{x-\overline{\lambda}}\big(p_n(x)-p_{n-2}(x)\big).$$

4. До истиот резултат може да се дојде и направо од (6). Навистина од

$$\frac{x-\overline{\lambda}}{x-\lambda}\Pi_n(x)=p_n(x)-p_{n-1}(x)$$

и

$$\frac{x-\overline{\lambda}}{x-\lambda}\Pi_{n-1}(x)=p_{n-1}(x)-p_{n-2}(x),$$

наоѓаме

$$\Pi_n(x)+\Pi_{n-1}(x)=\frac{x-\lambda}{x-\overline{\lambda}}\big(p_n(x)-p_{n-2}(x)\big)$$

што покажува дека е

$$\Pi_{n2}=\Pi_n(x)+\Pi_{n-1}(x).$$

5. Аналогни релации можат да се добијат ако постапно се повторува претходната операција. Ќе имаме

$$\Pi_n(x)+\Pi_{n-1}(x)+\Pi_{n-2}(x)=\frac{x-\lambda}{x-\bar{\lambda}}\left(p_n(x)-p_{n-3}(x)\right),$$

или

$$\Pi_{n3}(x)=\frac{x-\lambda}{x-\bar{\lambda}}\left(p_n(x)-p_{n-1}(x)\right),$$

каде што е

$$\Pi_{n3}(x)=\Pi_n(x)+\Pi_{n-1}(x)+\Pi_{n-2}(x).$$

Во општ случај ако земеме

$$\Pi_{nk}(x)=\Pi_n(x)+\Pi_{n-1}(x)+\ldots+\Pi_{n-k+1}(x),$$

добиваме

$$\Pi_{nk}(x)=\frac{x-\lambda}{x-\bar{\lambda}}\left(p_n(x)-p_{n-k}(x)\right) \tag{12}$$

односно

$$\begin{aligned}\Pi_{nk}(x)&=p_n(x)-p_{n-k}(x)+\omega_n p_{n-1}(x)+\omega_{n-1}(C_n+1)\,p_{n-2}(x)\\&+\omega_{n-2}\,(C_nC_{n-1}+C_{n-1}+1)\,p_{n-3}(x)+\ldots+\omega_{n-k+2}\,(C_n\,C_{n-1}\ldots\\&C_{n-k+3}+C_{n-1}C_{n-2}\ldots C_{n-k+3}+\ldots+C_{n-k+3}+1)\,p_{n-k+1}(x)\\&+(C_nC_{n-1}\ldots C_{n-k+1}+C_{n-1}C_{n-2}\ldots C_{n-k+1}+\ldots+C_{n-k+1})\times\\&(\omega_{n-k+1}p_{n-k}(x)+\omega_{n-k}C_{n-k+1}p_{n-k-1}(x)+\ldots+(\omega_1-C_1)\\&(C_{n-k+1}C_{n-k-2}\ldots C_z\,p_o(x))\end{aligned} \tag{13}$$

Очевидно дека и полиномите $\Pi_{nk}(x)$ ги имаат својствата на полиномите $\Pi_n(x)$.

6. Jacobi-еви полиноми. Во посебен случај кога имаме

$$A_n=\frac{(\beta+2n)(\beta+2n-1)}{2n\ (\beta+n)},$$

$$B_n=-\ \frac{\beta^2(\beta+2n-1)}{n(\beta+n)\ (\beta+2n-2)},$$

$$C_n=\frac{(n-1)\ (\beta+2n)\ (\beta+n-1)}{n(\beta+n)\ (\beta+2n-2)},\ n=1,\ 2,\ldots n.$$

ортогоналните полиноми се сведуваат на тип Jacobi-еви полиноми $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ определени со [3]

$$2^n n!\ P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=(x-1)^{-\alpha}(x+1)^{-\beta}D\,[(x-1)^{\alpha+n}(x+1)^{\beta+n}],$$

$$\alpha > -1, \quad \beta > -1.$$

Од (5) лесно се установува релацијата

$$P_n^{(0,\beta)}(x) - P_{n-1}^{(0,\beta)}(x) = \frac{(x-1)\ (\beta+2n)}{2n\ (\beta+n)} \sum_{k=1}^{n} (\beta+2n-2k+1)\, P_{n-k}^{(0,\beta)}(x).$$

За полиномите од видот $\Pi_{nk}(x)$ во овој случај ќе имаме

$$\Pi_n^J(x) = \frac{x-\lambda}{x-1}\left(P_n^{(0,\beta)}(x) - P_{n-1}^{(0,\beta)}(x)\right)$$

односно

$$\Pi_n^J(x) = P_n^{(0,\beta)}(x) - P_{n-1}^{(0,\beta)}(x)$$

$$-\frac{(\beta+2n)\ (\lambda-1)}{2n\ (\beta+n)} \sum_{k=1}^{n} (\beta+2n-2k+1)\, P_{n-k}^{(0,\beta)}(x)$$

земајќи предвид дека е $a = -b = 1$ и $\bar{\lambda} = 1$.

Слично врз основа на (12) и (13) добиваме

$$\Pi_{n2}^J(x) = \frac{x-\lambda}{x-1}\left(P_n^{(0,\beta)}(x) - P_{n-2}^{(0,\beta)}(x)\right),$$

и

$$\Pi_{n2}^J(x) = P_n^{(0,\beta)}(x) - P_{n-2}^{(0,\beta)}(x) - \frac{(\beta+2n)\ (\lambda-1)}{2n\ (\beta+n)} (\beta+2n-1)\, P_{n-1}(x) -$$

$$-(\lambda-1)\left(\frac{\beta+2n}{2n\ (\beta+n)} + \frac{\beta+2n-2}{2(n-1)(\beta+n-1)}\right) \sum_{k=1}^{n-1} (\beta+2n-2k-1)$$

$$P_{n-k-1}^{(0,\beta)}(x).$$

или поопшто

$$\Pi_{nk}^J(x) = \frac{x-\lambda}{x-1}\left(P_n^{(0,\beta)}(x) - P_{n-k}^{(0,\beta)}(x)\right),$$

и

$$\Pi_{nk}^J(x) = P_n^{(0,\beta)}(x) - P_{n-k}^{(0,\beta)}(x),$$

$$-(\lambda-1) \sum_{r=1}^{n} A_{n,\beta}^{r-1}\ (\beta + 2n - 2r + 1)\ P_{n-r}^{(0,\beta)}(\lambda-1) A_{n,\beta}^{k-1} \sum_{r=k+1}^{n}$$

$$(\beta+2n-2r+1)\ P_{n-r}^{(0,\beta)}(x),$$

каде што е

$$A_{n,\beta}^{k} = \sum_{r=0}^{n} \frac{\beta+2n-2r}{2(n-r)\ (\beta+n-r)}.$$

7. Legendre-ови полиноми. Ако е $\beta = 0$ Jacobi-евите полиноми се сведуваат на Legendre-ови полиноми (3) за кои ги имаме релациите

$$\Pi_n^L(x) = \frac{x-\lambda}{x-1}\left(P_n(x) - P_{n-1}(x)\right),$$

и

$$\Pi_n^L(x) = P_n(x) - P_{n-1}(x) - \frac{\lambda-1}{n}\sum_{k=1}^{n}(2n-2k+1)\,P_{n-k}(x),$$

што се добиени од Parodi [1].

Според (11) и (9) добивме

$$\Pi_{n2}^L(x) = \frac{x-\lambda}{x-1}\left(P_n(x) - P_{n-2}(x)\right),$$

и

$$\Pi_{n2}^L(x) = P_n(x) - P_{n-2}(x) - (\lambda-1)\left(\frac{2n-1}{n}P_{n-1}(x)\right)$$
$$-\frac{(\lambda-1)}{n(n-1)}\sum_{r=1}^{n-1}(2n-2r-1)\,P_{n-r-1}(x)$$

односно

$$\Pi_{nk}^L(x) = \frac{x-\lambda}{x-1}\left(P_n(x) - P_{n-k}(x)\right)$$

и

$$\Pi_{nk}^L(x) = P_n(x) - P_{n-k}(x) - (\lambda-1)\sum_{r=1}^{k}A_n^{r-1}(2n-2r+1)\,P_{n-r}(x)$$
$$-(\lambda-1)A_n^{k-1}\sum_{r=k+1}^{n}(2n-2r+1)\,P_{n-r}(x)$$

каде што е

$$A_{n,0}^{r} = A_n^r.$$

8. Laguerre-ови полиноми. Ако земеме

$$A_n = -\frac{1}{n},\quad B_n = \frac{2n-1}{n}$$

$$C_n = \frac{n-1}{n},\quad n = 1,2,\ldots n,$$

ортогоналните полиноми се сведуваат на таканаречените полиноми на Laguerre што се определени со

$$n!\,L_n(x) = e^x De^{-x}x^n,\qquad D = \frac{d}{dx}.$$

Релациите (6) и (2) го имаат во тој случај обликот

$$\Pi_n^G(x) = \frac{x-\lambda}{x}\left(L_n(x) - L_{n-1}(x)\right)$$

и

$$\Pi_n^G(x) = L_n(x) - L_{n-1}(x) - \frac{\lambda}{n}\sum_{k=1}^{n}L_{n-k}(x),$$

односно според (12) и (13)

$$\Pi_{nk}^{G}(x)=\frac{x-\lambda}{x}\Big(L_n(x)-L_{n-k}(x)\Big)$$

и

$$\Pi_{nk}^{G}(x)=L_n(x)+\frac{\lambda}{n}L_{n-1}(x)+\lambda A_n^2 L_{n-2}(x)+\dots$$

$$+\lambda A_n^{k-1}L_{n-k+1}(x)-\quad -L_{n-k}(x)+\lambda A_n^k\Big(L_{n-k}(x)+\dots+L_0(x)\Big).$$

9. Примена. Добиените погоре релации можат погодно да се користат за пресметување на некои определени интеграли во кои влегуваат класичните ортогонални полиноми на Jacobi, Legendre и Laguerre.

Така имаме за полиномите на Jacobi

1°. $$\int_{-1}^{1}(1+x)^{\beta}\left(\frac{x-\lambda}{x-1}\right)^2\Big(P_n^{(0,\beta)}(x)-P_k^{(0,\beta)}(x)\Big)^2dx$$

$$=2^{\beta+1}\left\{\frac{1}{\beta+2n+1}+\frac{1}{\beta+2n+1}+2(\lambda-1)A_{n,\beta}^{n-k-1}\right.$$

$$\left.+(\lambda-1)^2\left[\left(A_{n,\beta}^{n-k-1}\right)^2(\beta+k)k+\sum_{r=1}^{n-k}(\beta+2n-2r+1)\left(A_{n,\beta}^{r-1}\right)^2\right]\right.$$

2°. $$\int_{-1}^{1}(1+x)^{\beta}\left(\frac{x-\lambda}{x-1}\right)^2\Big(P_{n-k}^{(0,\beta)}(x)-P_{n-k-1}^{(0,\beta)}(x)\Big)\Big(P_n^{(0,\beta)}(x)-P_{n-1}^{(0,\beta)}(x)\Big)dx$$

$$=(\lambda-1)^2\frac{2^{\beta}(\beta+2n)(\beta+2n-2k)}{2n(\beta+n)}.$$

3°. $$\int_{-1}^{1}(1+x)^{\beta}\frac{x-\lambda}{x-1}\Big(P_n^{(0,\beta)}(x)-P_k^{(0,\beta)}\Big)P_m^{(\alpha,\beta)}(x)\,dx$$

$$=B_n^m-B_k^m-(\lambda-1)\left\{\sum_{r=1}^{n-k}(\beta+2n-2r+1)A_{n,\beta}^{r-1}B_{n-r}^m\right.$$

$$\left.+A_{n,\beta}^{n-k-1}\sum_{r=n-k-1}^{n}(\beta+2n-2r+1)B_{n-r}^m,\right.$$

каде што е

$$B_n^k=\frac{2^{\beta+1}(\alpha)_{n-k}(\beta+\alpha+n+1)k}{(n-k)!\,(\beta+n+1)_{k+1}}.$$

Земеме ли $\beta=0$, за полиномите на Legendre, наоѓаме

4°. $$\int_{-1}^{1}\left(\frac{x-\lambda}{x-1}\right)^2\big(P_n(x)-P_{n-k}(x)\big)^2dx$$

$$=2\left\{\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n-2k+1}+2(\alpha-1)A_n^{k-1}\right.$$

$$\left.+(\alpha-1)^2\left[\left((n-k)A_n^{k-1}\right)^2+\sum_{r=1}^{k}(2n-2r+1)\left(A_n^{r-1}\right)^2\right]\right\}$$

5°. $$\int_{-1}^{1}\left(\frac{x-\lambda}{x-1}\right)^2\left(P_{n-k}(x)-P_{n-k-1}(x)\right)\left(P_n(x)-P_{n-1}(x)\right)dx$$
$$=2\,(\lambda-1)^2\,\frac{n-k}{n}.$$

Имајќи предвид дека е

$$\int_{-1}^{1}P_n^{(0,\beta)}(x)\,P_k(x)\,dx=\frac{(-1)^{n-k}\,2\,(\beta)_{n-k}\,n!\,(\beta+n+1)_k}{(n-k)!\,(n-k+1)!}$$
$$=S_n^k\,,\;0\leq k\leq n$$
$$=0,\;n<k$$

наоѓаме

6°. $$\int_{-1}^{1}\frac{x-\lambda}{x-1}\left(P_n(x)-P_{n-1}(x)\right)\,P_k^{(0,\beta)}\,(x)\,dx$$
$$=S_k^n-\;S_k^{n-1}-\frac{\lambda-1}{n}\sum_{r=1}^{n}(2n-2r+1)\;S_k^{n-r}.$$

За полиномите на Laguerre добиваме

7°. $$\int_{0}^{\infty}e^{-x}\,x^{-2}\,(x-a)^2\left(L_n(x)-L_{n-k}(x)\right)^2dx$$
$$=2-2a\,A_n^{k-1}+a^2\sum_{r=1}^{k-1}\left(A_n^r\right)^2$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *M. Parodi*, A propos des polynomes de Legendre, Comptes rendus, 270, Serie A, 1970, p. 1023

2. *G. Szëgö*, Orthogonal polynomials, Coll. Publications, Vol, XXIII, New York 1959

3. *E. Rainville*, Special functions, New York 1960

RÉSUMÉ

SUR LES POLYNÔMES ORTHOGONAUX

On forme une classe de polynômes $\Pi_{nk}(x)$ ayant un zéro fixé $\lambda\varepsilon R$ ou C et les autres dans l'intérvalle (a, b) où sont les zéros des polynômes orthogonaux. Ils sont en liaison avec les polynome orthogonaux ce que nous donne la possibilité de trouver quelques relations pour les polynômes orthogonaux classiques de Jacobi, Legendre et Laguerre.