Classe de polynômes associés aux polynômes de Jacobi

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 274 (1972), 972-973

En suivant un procédé de M. Parodi [1] nous allons construire une classe de polynômes appartenant à l'espace vectoriel V des polynômes de degré au plus égal à n. Ils s'expriment dans la base B constituée par les polynômes de Jacobi et admettent un zéro fixé $\omega \in R$ ou C; les autres zéros sont réels et compris entre -1 et $+1$.

Les polynômes de Jacobi $P_n^{(0,\beta)}(x)$ satisfont comme on sait la relation [2] :

$$P_n^{(0,\beta)}(x) = (a_n x + b_n) P_{n-1}^{(0,\beta)}(x) - c_n P_{n-2}^{(0,\beta)}(x) \qquad (n = 2, 3, \ldots),$$

$$P_0^{(0,\beta)}(x) = 1, \qquad P_1^{(0,\beta)}(x) = \frac{1}{2}(\beta + 2)x - \frac{1}{2}\beta,$$

avec

$$a_n = \frac{(\beta + 2n)(\beta + 2n - 1)}{2n(\beta + n)}; \qquad b_n = \frac{-\beta^2(\beta + 2n - 1)}{2n(\beta + 2n - 2)(\beta + n)};$$

$$c_n = \frac{(n-1)(\beta + 2n)(\beta + n - 1)}{n(\beta + n)(\beta + 2n - 2)}, \qquad \beta > -1.$$

Considérons le polynôme de degré n $(n > 2)$:

$$R_n(x) = \begin{vmatrix} a_n(x-\omega) + c_n & -c_n & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_{n-1}(1-\omega) - 1 & l_{n-1} & -c_{n-1} & \ldots & 0 & 0 \\ a_{n-2}(1-\omega) & -1 & l_{n-2} & \ldots & 0 & 0 \\ a_{n-3}(1-\omega) & 0 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots\ldots\ldots & . & \ldots & \ldots & . & . \\ a_2(1-\omega) & 0 & 0 & \ldots & l_2 & -c_2 \\ a_1(1-\omega) & 0 & 0 & \ldots & -1 & l_1 \end{vmatrix},$$

où

$$l_k = \frac{\beta + 2n - 1}{2n(\beta + n)}\left[(\beta + 2n)x - \frac{\beta^2}{\beta + 2n - 2}\right] \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Le développement du déterminant donne l'expression des polynômes cherchés sous la forme

$$(1) \quad R_n(x) = P_n^{(0,\beta)}(x) - P_{n-1}^{(0,\beta)}(x) + (1-\omega)\frac{\beta + 2n}{2n(\beta + n)}\sum_{k=1}^{n}(\beta + 2n - 2k + 1)P_{n-k}^{(0,\beta)}(x).$$

Ajoutons aux éléments de la première colonne les éléments des autres colonnes jusqu'à la $n^{\text{ième}}$. On remarque que les éléments de la première colonne du déterminant transformé ont un facteur commun $x - \omega$, ce qui nous conduit à la relation

$$(2) \qquad R_n(x) = (x - \omega)\frac{\beta + 2n}{2n(\beta + n)}\sum_{k=1}^{n}(\beta + 2n - 2k + 1)P_{n-k}^{(0,\beta)}(x).$$

Si l'on prend $\omega = 1$ on tire de (1) et (2) :

$$P_n^{(0,\beta)}(x) - P_{n-1}^{(0,\beta)}(x) = \frac{(\beta + 2n)(x-1)}{2n(\beta+n)} \sum_{k=1}^{n} (\beta + 2n - 2k + 1) P_{n-k}^{(0,\beta)}(x).$$

Les zéros du polynôme $P_n^{(0,\beta)}(x) - P_{n-1}^{(0,\beta)}(x)$ se sont situés dans l'intervalle $[-1, 1]$. Donc les zéros du polynôme $R_n(x)$ distincts de ω se trouvent sur le même intervalle $[-1, 1]$.

Une transformation des relations précédentes donne pour le polynôme $R_n(x)$ la forme suivante :

$$R_n(x) = \frac{x-\omega}{x-1}(P_n^{(0,\beta}(x) - P_{n-1}^{(0,\beta)}(x)).$$

Application. — Quelques intégrales définies dans lesquelles interviennent les polynômes de Jacobi et de Legendre.

En profitant des relations données ci-dessus nous avons obtenu

1° $$\int_{-1}^{1} (1+x)^\beta \left(\frac{x-\omega}{x-1}\right)^2 (P_n^{(0,\beta)}(x) - P_{n-1}^{(0,\beta)}(x))^2\, dx$$
$$= 2^{\beta+1}\left[\frac{1}{\beta+2n+1} + \frac{1}{\beta+2n-1} + \frac{(\beta+2n)(\omega-1)}{n(\beta+n)} + \frac{(\beta+2n)^2(\omega-1)^2}{4n(\beta+n)}\right];$$

2° $$\int_{-1}^{1} (1+x)^\beta \left(\frac{x-\omega}{x-1}\right)^2 [P_n^{(0,\beta)}(x) - P_{n-1}^{(0,\beta)}(x)][P_{n-k}^{(0,\beta)}(x) - P_{n-k-1}^{(0,\beta)}]\, dx$$
$$= \frac{2^\beta(\beta+2n)(\beta+2n-2k)}{2n(\beta+n)}(\omega-1)^2 \qquad (k \geqq 2);$$

3° $$\int_{-1}^{1} (1+x)^\beta \frac{x-\omega}{x-1}\left[(P_m^{(0,\beta)}(x) - P_{m-1}^{(0,\beta)}(x)\right] P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\, dx$$
$$= A_n^m - A_n^{m-1} + \frac{(\beta+2n)(1-\omega)}{2n(\beta+n)} \sum_{k=1}^{n} (\beta + 2n - 2k + 1) A_n^{m-k+1},$$

où

$$A_k^r = \frac{(-1)^{k-r}\, 2^{\alpha+1}(\alpha)_{k-r}(\beta+\alpha+n+1)_r}{(k-r)!\,(\beta+k+1)_{r+1}}.$$

Une généralisation de ces résultats concernant les polynômes orthogonaux fera l'objet d'une prochaine publication.

(1) M. Parodi, *Comptes rendus*, 270, série A, 1970, p. 1023.
(2) Gabor Szegö, *Orthogonal polynomials*, Coll. Publications, XXIII, New-York, 1959.