Quelques remarques sur les polynômes de Laguerre

Bulletin de l'Académie royale de Belgique (Classe des Sciences)
Bruxelles, 1972, Série 5, t. 58, 472-475

Résumé. — On construit une nouvelle classe de polynômes $\Lambda_n(x)$ contenant un paramètre $a \in$ R ou C, qui est en liaison avec les polynômes de Laguerre.

1. Soit donné un espace vectoriel V des polynômes de degré au plus égal à n, avec la base L constitué par les polynômes $L_n(x)$ de Laguerre. Le but de la Note présente est, en utilisant une méthode de M. Parodi [1], de construire des classes de polynômes de V, qui s'expriment dans la base L et admettent un zéro fixé $a \in$R ou C, les autres étant réels et compris entre 0 et ∞.

2. Il est connu que les polynômes de Laguerre d'ordre n, $L_n(x)$ satisfont la relation [2]

$$nL_n(x) = (2n - 1 - x)\, L_{n-1}(x) - (n - 1)\, L_{n-2}(x),$$
$$L_0(x) = 1,\ L_{-1}(x) = 0.$$

Envisageons le polynôme de degré n ($n > 2$)

$$\Lambda_n(x) = \frac{1}{n!} \begin{vmatrix} n-1-x+a & 1-n & 0 & \dots & 0 \\ 1-n+a & 2n-3-x & 2-n & \dots & 0 \\ a & 2-n & 2n-5-x & \dots & 0 \\ a & 0 & 3-n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & 0 & 0 & \dots & -1 \\ a & 0 & 0 & \dots & 1-x \end{vmatrix}$$

La transformation de ce déterminant de sorte qu'on ajoute aux éléments de la première colonne ceux des autres colonnes jusqu'à la dernière montre que les éléments de cette première prennent le facteur commun $a - x$. En effet, il résulte du déterminant transformé

$$\Lambda_n(x) = \frac{a-x}{n}(L_{n-1}(x) + L_{n-2}(x) + \dots + L_0(x)), \tag{1}$$

tandis que par un calcul direct du déterminant ci-dessus on a

$$\Lambda_n(x) = \mathrm{L}_n(x) + \left(\frac{a}{n} - 1\right)\mathrm{L}_{n-1}(x) + \frac{a}{n}(\mathrm{L}_{n-2}(x) + \mathrm{L}_{n-3}(x) + \ldots + \mathrm{L}_0(x) \tag{2}$$

En comparant (1) et (2) nous obtenons

$$\begin{aligned} &\mathrm{L}_n(x) + \left(\frac{a}{n} - 1\right)\mathrm{L}_{n-1}(x) + \frac{a}{n}(\mathrm{L}_{n-2}(x) + \ldots \mathrm{L}_0(x)) \\ &= \frac{a-x}{n}(\mathrm{L}_{n-1}(x) + \mathrm{L}_{n-2}(x) + \ldots + \mathrm{L}_0(x)). \end{aligned} \tag{3}$$

On voit que les zéros de $\Lambda_n(x)$ distincts de a sont ceux du polynôme $\mathrm{L}_{n-1}(x) + \mathrm{L}_{n-2}(x) + \ldots + \mathrm{L}_0(x)$.

De (3) on trouve

$$\mathrm{L}_n(x) - \mathrm{L}_{n-1}(x) = -\frac{x}{n}(\mathrm{L}_{n-1}(x) + \mathrm{L}_{n-2}(x) + \ldots + \mathrm{L}_0(x)). \tag{4}$$

Les zéros de $\mathrm{L}_n(x) - \mathrm{L}_{n-1}(x)$ sont réels et appartiennent à l'intervalle $(0, \infty)$. Par conséquent les zéros du polynôme $\Lambda_n(x)$ distincts de a sont dans le même intervalle.

3. Les relations (1) et (4) permettent de donner pour $\Lambda_n(x)$ l'expression

$$\Lambda_n(x) = \frac{x-a}{x}(\mathrm{L}_n(x) - \mathrm{L}_{n-1}(x)).$$

Ayant en vue que [2]

$$n(\mathrm{L}_n(x) - \mathrm{L}_{n-1}(x)) = x\mathrm{L}'_n(x), \quad \mathrm{L}'_n(x) = \frac{d\mathrm{L}_n(x)}{dx},$$

et

$$\mathrm{L}_n^{(1)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{L}_k(x)$$

où

$$n!\mathrm{L}_n^{(\alpha)}(x) = x^{-\alpha}e^x\mathrm{D}^n(e^{-x}x^{n+\alpha}),$$

nous obtenons

$$\Lambda_n(x) = \frac{x-a}{n}\mathrm{L}'_n(x)$$

et aussi

$$\Lambda_n(x) = \frac{a-x}{n}\mathrm{L}_{n-1}^{(1)}(x).$$

Plus généralement on déduit

$$\Lambda_{nk}(x) = \frac{x-a}{x}(\mathrm{L}_n(x) - \mathrm{L}_{n-k}(x)).$$

et

$$\Lambda_{nk}(x) = \mathrm{L}_n(x) + \frac{a}{n}\mathrm{L}_{n-1}(x) + a\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}\right)\mathrm{L}_{n-2}(x) + \dots$$

$$+ \left[a\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{n-k+1}\right) - 1\right]\mathrm{L}_{n-k}(x)$$

$$+ a\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{n-k+1}\right)(\mathrm{L}_{n-k-1}(x) + \dots + \mathrm{L}_0(x)),$$

où

$$\Lambda_{nk}(x) = \Lambda_n(x) + \Lambda_{n-1}(x) + \dots + \Lambda_{n-k+1}(x).$$

4. En utilisant les relations précédentes nous allons donner quelques intégrales définies, où interviennent les polynômes de Laguerre.

On a

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{-2}(x-a)^2(\mathrm{L}_n(x) - \mathrm{L}_{n-1}(x))^2 dx = \frac{1}{n}(a^2 - 2a + 2n),$$

et, plus généralement

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{-2}(x-a)^2(\mathrm{L}_n(x) - \mathrm{L}_{n-k}(x))^2 dx =$$

$$= 2 - 2a\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{n-k+1}\right)$$

$$+ a^2(n-k)\left(\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n-k+1}\right)^2$$

$$+ a^2\left[\frac{1}{n^2} + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{n-k+1}\right)^2\right],$$

ainsi que

$$\int_0^t (t-x)^{c-1}\frac{x-a}{x}(\mathrm{L}_n(x) - \mathrm{L}_{n-1}(x))dx =$$

$$= \frac{n!t^c}{c(c+1)_n}\left(\mathrm{L}_n^{(c)}(t) - \frac{c+n}{n}\mathrm{L}_{n-1}^{(c)}(t) + \frac{a}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(c+n-k+1)_k}{(n-k+1)_k}\mathrm{L}_{n-k}^{(c)}(t)\right).$$

RÉFÉRENCES

[1] Maurice PARODI, A propos des polynômes de Legendre. *C.R. Acad. Sci. Paris*, Tome 270 (1970), Series A et B, pp. 1023-25.

[2] Earl D. RAINVILLE, Special functions, The Macmillan Company, New York, 1960.