ФУНКЦИИ ГЕНЕРАТРИСИ ЗА СТЕПЕНИТЕ НА НЕКОИ НИЗИ ОД БРОЕВИ

Прилози МАНУ, Оддел. за мат.-тех. науки, V1/1, 1973, 5-15

1. **УВОД.** Во теоријата за низите од броеви од втор ред основна улога им припаѓа на низата на Fibonacci $\{f(n)\}$ и на низата на Lucas $\{\phi(n)\}$ што се определени со

n:	0	1	2	3	4	5	...
$f(n)$:	1	1	2	3	5	8	...
$\phi(n)$:	2	1	3	4	7	11	...

каде што се

$$f(n)=f(n-1)+f(n-2)=\frac{\alpha_1^{n+1}-\alpha_2^{n+1}}{\alpha_1-\alpha_2},$$

$$\phi(n)=\phi(n-1)+\phi(n-2)=\alpha_1^n+\alpha_2^n.$$

α_1 и α_2 се корени на равенката $x^2-x-1=0$ така што

$$\alpha_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\qquad \alpha_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Класичното обопштување на овие низи се добива со разгледување на низата [1]

$$w(0),\ w(1),\ w(2),\ldots$$

што е определена со равенката

$$aw(n+2)+bw(n+1)+cw(n)=0, \tag{1}$$

со почетни услови

$$w(0)=\alpha,\quad w(1)=\beta. \tag{2}$$

Ако со r_1 и r_2 ги обележиме корените на карактеристичната равенка

$$ax^2+bx+c=0$$

за општото решение на (1) добиваме

$$w(n)=c_1r_1^n+c_2r_2^n \tag{3}$$

каде што се

$$r_{1,2}=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

а c_1 и c_2 произволни константи што ги определуваме од почетните услови. Од

$$c_1+c_2=\alpha \quad \text{и} \quad c_1r_1+c_2r_2=\beta$$

наоѓаме

$$c_1=\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha b+2a\beta}{2\sqrt{\Delta}},\qquad c_2=\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha b+2a\beta}{2\sqrt{\Delta}},$$

$$\Delta = b^2 - 4ac, \quad r_1 \neq r_2.$$

Да земеме сега

1°. $\alpha = 1$, $\beta = -\frac{b}{a}$; ја добиваме низата

$$u(n) = \frac{r_1^{n+1} - r_2^{n+1}}{r_1 - r_2}. \tag{4}$$

2°. $\alpha = 2$, $\beta = -\frac{b}{a}$; ја имаме низата

$$v(n) = r_1^n + r_2^n. \tag{5}$$

2. ФУНКЦИИ ГЕНЕРАТРИСИ. За низата $w(n)$ определена со (1) и (2) ја имаме функцијата генератриса

$$w_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w(n)\, x^n = \frac{a\alpha + (a\beta + b\alpha)\, x}{a + b\,x + c\,x^2}.$$

Во посебен случај за низата на Fibonacci ја имаме функцијата генератриса

$$f_1(x) = (1 - x - x^2)^{-1},$$

додека за низата на Lucas имаме

$$\phi_1(x) = (2 - x)\,(1 - x - x^2)^{-1}.$$

За κ-тиот степен на $w(n)$ можеме да ставиме

$$w_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w^k(n)\, x^n. \tag{6}$$

Проблемот за определување функции генератриси $w_k(x)$ за степените на $w(n)$ во последно време посебно го привлече вниманието во повеќе трудови. *J. Riordan* [2] покажа дека за случај на низата на Fibonacci функцијата генератриса $f_k(k)$ од облик (6) ја задоволува рекурентната релација

$$[1 - \phi(k)\, x + (-1)^k x^2]\, f_k(x) = 1 + k\,x \sum_{j=1}^{[k/2]} (-1)^j \frac{\bar{a}_{kj}}{j} f_{k-2j}[(-1)^j x], \tag{7}$$

каде што е

$$(1 - x - x^2)^{-j} = \sum_{k-2j}^{\infty} \bar{a}_{kj}\, x^{k-2j}, \quad k \geqslant 1.$$

L. Carlitz [3] го обопштува резултатот на J. Riordan и покажува дека

$$u_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u^k(n)\, x^n,$$

ја задоволува релацијата

$$[1 - v(k)x + q^k x^2]\, u_k(x) = 1 + kx \sum_{r=1}^{[k/2]} \frac{1}{r}\, q^r\, a_{kr}\, u_{k-2r}(q^r x), \tag{8}$$

каде што е

$$(1-\beta x+qx^2)^{-j}=\sum_{k=2j}^{\infty}a_{kj}x^{k-2j},\qquad \frac{c}{a}=q,\qquad k\geqslant 1.$$

Тој исто така ја дава рекурентнава релација

$$(9)\qquad [1-v(k)x+q^k x^2]\,v_k(x)=2^k-\beta^k x+$$
$$+kx\sum_{r=1}^{[k/2]}\frac{(-1)^r}{r}q^r a_{kr}v_{k-2r}(q^r x),$$

каде што е

$$v_k(x)=\sum_{n=0}^{\infty}v^k(n)\,x^n,\qquad k\geqslant 1.$$

A. Horadam [4] дава аналогна рекурентна релација за обопштената низа броеви (3) при услови (2)

$$(10)\qquad (1-r_1^k x)(1-r_2^k x)\,w_k(x)=\alpha^k-(-1)^k\left(\frac{b\alpha}{a}+\beta\right)^k x$$
$$+kx\sum_{j=1}^{[k/2]}\frac{(-1)^j}{j}e^j a_{kj}w_{k-2j}(q^j x),$$

каде што е

$$e=-\frac{b\alpha\beta}{a}-q\alpha^2-\beta^2,\qquad \left(1+\frac{b}{a}x+qx^2\right)^{-j}=\sum_{k=2j}^{\infty}a_{kj}x^{k-2j}.$$

Очевидно е дека релацијата (10) ги опфаќа претходните (7), (8) и (9) како партикуларни случаи.

A. Shamon и *A. Horadam* [5] разгледуваат исто така функции генератриси од обликот (6) за случај кога $w(n)$ задоволува рекурентна релација од трет ред.

Наша намера е да дадеме нови релации за функциите генератриси на степените на $u(n)$ и на $v(n)$. Тие експлицитно ги изразуваат овие функции. Исто така даваме и изрази за функциите генератриси на $u(n)$ и на $v(n)$ кога аргументот е многуструк. Притоа ги користиме резултатите на Lucas.

3. НЕКОИ РЕЛАЦИИ ЗА $u(n)$ и $v(n)$. Од (4) и (5) следува дека

$$4r_i^{m+n+2}=\Delta u(n)u(m)+v(n+1)v(m+1)+$$
$$+(-1)^{i-1}\sqrt{\Delta}\,[u(n)v(m+1)+u(m)v(n+1)],$$
$$i=1,2.$$

Оттука имаме

$$2u(m+n+1)=u(n)v(m+1)+u(m)v(n+1),$$
$$2v(m+n+2)=v(n+1)v(m+1)+\Delta u(n)v(m).$$

Земајќи предвид дека е

$$u(-n-1) = -q^{-n} u(n-1), \qquad v(-n) = -q^{-n} v(n),$$

добиваме

$$2q^{m+1} u(n-m-1) = u(n) v(m+1) - u(m) v(n+1),$$

$$2q^{m+1} v(n-m) = v(n+1) v(m+1) - \Delta u(n) u(m).$$

Од овие две релации наоѓаме

$$u(n+m+1) = u(n) v(m+1) - q^{m+1} u(n-m-1),$$

$$v(n+m+2) = v(n+1) v(m+1) - q^{m+1} v(n-m),$$

коишто релации можат да се пишуваат и како

(11) $$u((n+2)m-1) = u((n+1)m-1) v(m) - q^m u(nm-1),$$

(12) $$v(nm) = v((n-1)m) v(m) - q^m v((n-2)m).$$

Од друга страна поради

$$r_1^{kn} + r_2^{kn} = \sum_{r=0}^{[k/2]} (-1)^r \frac{k}{k-r} C_{k-r}^r (r_1^n + r_2^n)^{k-2r} (r_1 r_2)^{rn},$$

по внесување вредностите на $u(n)$ и $v(n)$ од (4) и (5) добиваме

(13) $$v(kn) = \sum_{r=0}^{[k/2]} (-1)^r \frac{k}{k-r} C_{k-r}^r q^{rn} v^{k-2r}(n), \qquad k \geqslant 1.$$

Исто така од

$$2r_i^{n+1} = v(n+1) + (-1)^{i-1} \sqrt{\Delta}\, u(n), \qquad i = 1,2$$

имаме

$$v^2(n+1) - \Delta u^2(n) = 4q^{n+1}$$

и земајќи предвид дека е

$$\sum_{s=0} \binom{p+s}{s} \binom{2p+m}{2p+2s} = 2^{m-1} \frac{2p+m}{m} \binom{m+p-1}{p}$$

наоѓаме

(14) $$\sum_{r=0}^{[k/2]} \Delta^{[k/2]-r} \frac{k}{k-r} C_{k-r}^r q^{(n+1)r} u^{k-2r}(n) = \lambda_k(n), \qquad k \geqslant 1$$

каде што е

$$\lambda_k(n) = \begin{cases} u(k(n+1)-1), & k \text{ — непарен} \\ v(k(n+1)), & k \text{ — парен} \end{cases}$$

$$\lambda_0(n) = 1.$$

4. ФУНКЦИИ ГЕНЕРАТРИСИ НА $u(n)$ и $v(n)$ КОГА АРГУМЕНТОТ ИМ Е МНОГУСТРУК. Горните релации ни даваат можност да добиеме функции генератриси за $u(n)$ и $v(n)$ кога аргументот им е многуструк. Навистина, ако секој член на релацијата (11) го помножиме со x^n и сумираме за $n = 0, 1, 2 \ldots$ добиваме

$$(15)\qquad (1-v(m)x+q^m x^2)\,u(m,x)=u(m-1),$$

каде што е

$$(16)\qquad u(m,x)=\sum_{n=0}^{\infty}u\,[(n+1)\,m-1]\,x^n.$$

Слично од (12) ќе имаме

$$(17)\qquad [1-v(m)\,x+q^m x^2]\,v(m,x)=v(m)-q^m v(0)\,x$$

каде што е

$$(18)\qquad v(m,x)=\sum_{n=0}^{\infty}v\,[(n+1)\,m]\,x^n.$$

Исто така наоѓаме

$$(19)\qquad [1-v(m)\,x+q^m x^2]\,\tilde{v}(m,x)=v(0)-v(m)\,x,$$

каде што е

$$(20)\qquad \tilde{v}(m,x)=\sum_{n=0}^{\infty}v\,(mn)\,x^n.$$

5. ФУНКЦИИ ГЕНЕРАТРИСИ ЗА СТЕПЕНИТЕ НА $u(n)$ $v(n)$. Од (14) по множење со x^n и собирање за $n=0,1,2,\ldots$ наоѓаме

$$\sum_{r=0}^{[k/2]}\Delta^{[k/2]-r}\frac{k}{k-r}C_{k-r}^{r}q^r\sum_{n=0}^{\infty}u^{k-2r}(n)\,(q^r x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_k(n)\,x^n.$$

Земајќи ги предвид (6), (16) и (18) за функцијата генератриса на степенот од $u(n)$ следнава рекурентна релација ја имаме

$$\Delta^{[k/2]}u_k(x)=\lambda(k,x)-\sum_{r=1}^{[k/2]}\Delta^{[k/2]-r}\frac{k}{k-r}C_{k-r}^{r}q^r\,u_{k-2r}(q^r x),$$

каде што е

$$\lambda(k,x)=\begin{cases}u(k,x), & k\text{ — непарен}\\ v(k,x), & k\text{ — парен}\end{cases}$$

Слично од (13) добиваме

$$\sum_{r=0}^{[k/2]}(-1)^r\frac{k}{k-r}C_{k-r}^{r}\sum_{n=0}^{\infty}v^{k-2r}(n)\,(q^r x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}v\,(k,n)\,x^n.$$

Поради (6) и (20) за функцијата генератриса на степенот од $v(n)$ следнава рекурентна релација ја наоѓаме

$$v_k(x)=\tilde{v}(k,x)+\sum_{r=1}^{[k/2]}(-1)^{r-1}\frac{k}{k-r}C_{k-r}^{r}v_{k-2r}(q^r x).$$

За степените на $u(n)$ и $v(n)$ од (4) и (5) ќе имаме

$$(21)\qquad \Delta^{[k/2]}u^k(n)=\sum_{r=0}^{[k/2]}(-1)^r C_k^r q^{r(n+1)}\lambda_{k-2r}(n),$$

и

$$(22)\qquad v^k(n)=\sum_{r=0}^{[k/2]}C_k^r q^{rn}\tilde{v}\,[(k-2r)\,n],$$

каде што е

$$\tilde{v}(t)=\begin{cases} v(t), & t\neq 0,\\ \frac{1}{2}v(t), & t=0.\end{cases}$$

Множејќи ги релациите (21) и (22) со x^n и собирајќи за $n=0, 1, 2,\ldots$ добиваме

$$(23)\qquad \Delta^{[k/2]}\sum_{n=0}^{\infty}u^k(n)\,x^n=\sum_{r=0}^{[k/2]}(-1)^r C_k^r q^r\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{k-2r}(n)\,(q^r x)^n$$

и

$$(24)\qquad \sum_{r=0}^{\infty}v^k(n)\,x^n=\sum_{r=0}^{[k/2]}C_k^r\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{v}\,[(k-2r)\,n]\,(q^r x)^n.$$

Земајќи ги предвид (6), (16), (18) и (20) наоѓаме од (23)

$$(25)\qquad \Delta^{[k/2]}u_k(x)=\sum_{r=0}^{[k/2]}(-1)^r\,C_k^r q^r\,\lambda\,(k-2r, q^r x)$$

каде што е $\lambda(0,x)=\dfrac{1}{2}v(0,x)$.

Од (24) имаме

$$(26)\qquad v_k(x)=\sum_{r=0}^{[k/2]}C_k^r\,\tilde{v}\,(k-2r, q^r x).$$

Да ги внесеме вредноститите за $u(m,x)$, $v(m,x)$ и $\tilde{v}(m,x)$ во (25) и (26). Добиваме

$$\Delta^{[k/2]}u_k(x)=\sum_{r=0}^{[k/2]}\frac{(-1)^r C_k^r q^r\,\mu_{kr}(x)}{1-v(k-2r)\,q^r x+q^k x^2}$$

каде што е

$$\mu_{kr}(x)=\begin{cases} u\,(k-2r-1), & k\text{ — непарен број}\\ v\,(k-2r)-q^r\,v\,(o)\,x, & k\text{ — парен број }\neq 2r\\ \tilde{v}\,(k-2r)-q^r\tilde{v}\,(o)\,x, & k=2r\end{cases}$$

$$v_k(x)=\sum_{r=0}^{[k/2]}\frac{C_k^r\,\omega_{kr}(x)}{1-v(k-2r)q^r x+q^k x^2},$$

каде што е

$$\omega_{kr}(x)=\begin{cases} v\,(o)-q^r\,\tilde{v}\,(k-2r)\,x, & k\neq 2r,\\ \tilde{v}\,(o)-q^r\,\tilde{v}\,(k-2r)\,x, & k=2r.\end{cases}$$

БИБЛИОГРАФИЈА

[1]. *E. Lucas*, Theorie des nombres, Paris, 1891.

[2]. *J. Riordan*, Generating functions for powers of Fibonacci numbers, Duke Math. J., vol. 29 (1962), pp. 5—12

[3]. *L. Carlitz*, Generating functions for powers of certain sequences of numbers, Duke Math. J., vol. 29 (1962), pp. 521 — 537

[4]. *A. F. Horadam*, Generating functions for powers of a certain generalized sequence of numbers, Duke Math. J., vol. 32 (1965), pp. 437—446.

5. *A. G. Shamon*, and *A. F. Horadam*, Generating functions for powers of third order recurrence sequences, Duke Math. J., vol. 38 (1971), pp. 791—794.

6. *B. S. Popov*, Generating functions for powers of certain fundamental sequences of numbers (in press).

RÉSUMÉ

LES FONCTIONS GENERATRICES DES PUISSANCES DE CERTAINES FONCTIONS NUMERIQUES DU SECOND ORDRE

Soit $u(n)$ et $v(n)$ deux fonctions numeriques du seconde ordre définies par les relations

$$u(n)=\frac{r_1^{n+1}-r_2^{n+1}}{r_1-r_2},\qquad v(n)=r_1^n+r_2^n,$$

où r_1 et r_2 sont les racines d'équation $ax^2+bx+c=0$. On sait que les fonctions génératrices de ces fonctions sont

$$u_1(x)=\left(1+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}x^2\right)^{-1},$$

et

$$v_1(x)=\left(2+\frac{b}{a}x\right)\left(1+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}x^2\right)^{-1}.$$

Nous pouvons poser

$$u_k(x)=\sum_{k=0}^{\infty}u^k(n)\,x^n\quad\text{et}\quad v_k(x)=\sum_{n=0}^{\infty}v^k(n)\,x^n.$$

Le but du travail présent est de donner des relations récurrentes pour les fonctions génératrices $u_k(x)$ et $v_k(x)$ ainsi que les expressions explicites pour les mêmes fonctions. Nous allons donner aussi les fonctions génératrices pour les fonctions $u(n)$ et $v(n)$ dans le cas des arguments multiples.

En êffet, nous avons obtenus:

1° $$[1-v(m)\,x+q^mx^2]\,u(m,x)=u(m-1)$$

où

$$u(m,x)=\sum_{n=0}^{\infty}u(n+1)\,m-1)\,x^n,\quad c=aq$$

2° $$[1-v(m)\,x+q^mx^2]\,v(m,x)=v(m)-q^mv(0)\,x$$

où

$$v(m,x)=\sum_{n=0}^{\infty}v\,[(n+1)\,m]\,x^n$$

3° $$[1-v(m)\,x+q^mx^2]\,\tilde{v}(m,x)=\tilde{v}(0)-v(m)\,x$$

où

$$\tilde{v}(m,x)=\sum_{n=0}^{\infty}v(mn)\,x^n$$

4° $$\overset{[k/2]}{\Delta}u_k(x)=\lambda(k,x)-\sum_{r=1}^{[k/2]}\overset{[k/2]-r}{\Delta}\frac{k}{k-r}C_{k-r}^r q^r u^{k-2r}(q^rx),\quad k\geqslant 1.$$

où

$$\lambda(k,x)=\begin{cases}u(k,x), & k-\text{impair},\\ v(k,x), & k-\text{pair}.\end{cases}$$

5° $$v_k(x)=\tilde{v}(k,x)+\sum_{r=1}^{[k/2]}(-1)^{r-1}\frac{k}{k-r}C_{k-r}^r v_{k-2r}(q^rx),\qquad k\geqslant 1.$$

6° $$\overset{[k/2]}{\Delta}u_k(x)=\sum_{r=0}^{[k/2]}(-1)^r C_k^r q^r\lambda(k-2r,q^r).$$

avec $$\lambda(0,x)=\frac{1}{2}v(0,x).$$

7° $$v_k(x)=\sum_{r=0}^{[k/2]}C_k^r\tilde{v}^{k-2r}(q^rx).$$