Математички Билтен
21 (XXI)
1997 (27–38)
Скопје, Македонија

ISSN 0351–336X

ФОРМИРАЊЕ ЛИНЕАРНА ИНТЕГРАЛНА РАВЕНКА НА ВОЛТЕРРА ЧИЕ РЕШЕНИЕ Е КВАДРАТ ОД РЕШЕНИЕТО НА ПОПРОСТА ЛИНЕАРНА ИНЕГРАЛНА РАВЕНКА

Димов А. Лазо

Апстракт

Во теоријата на диференцијалните равенки една од методите за нивно егзактно решавање е нивно сведување на диференцијални равенки од понизок ред. Па во таа смисла од многу автори е работено на проблематиката формирање на диференцијална равенка чие решение е степен од решението на диференцијална равенка од понизок ред, или е производ од решенијата на диференцијални равенки од понизок ред. Овде ќе формираме линеарни интегрални равенки на Волтерра од втор вид чии решенија се квадрати од решенијата на однапред зададени попрости линеарни интегрални равенки на Волтерра. Притоа ќе користиме подобрена метода во однос на методата користена во [5].

Слично како кај диференцијалните равенки да тргнеме од линеарната интегрална равенка на Волтерра од втор вид:

$$y(x) + A(x) \int_0^x y(t)\,dt = B(x)\,. \tag{1}$$

Во зависност од природата на величините A и B, кои што се појавуваат во интегралната равенка (1) ќе ги разгледаме случаите:

I. Да претпоставиме дека во равенката (1) $A(\neq 0)$ е константа, а $B = B(x)$ е произволна три пати диференцијабилна функција од x. Тогаш, од равенката (1) ги добиваме релациите:

$$\int_0^x y(t)\,dt = \frac{B(x) - y}{A}, \; y' = B'(x) - Ay. \tag{2}$$

Ако ставиме:

$$z = y^2, \tag{3}$$

тогаш, од идентитетот:

$$\int_0^x y^2\,dt = y \int_0^x y\,dt - \int_0^x \left(y'(t) \int_0^x y(u)\,du \right) dt,$$

а, во врска со (2) добиваме:

$$\int_0^x y^2\,dt = y\,\frac{B-y}{A} - \int_0^x (B' - Ay)\,\frac{B-y}{A}\,dt =$$

$$= \frac{B}{A}y - \frac{1}{A}y^2 - \frac{1}{A}\int_0^x BB'\,dt + \frac{1}{A}\int_0^x B'y\,dt + \int_0^x By\,dt - \int_0^x y^2\,dt =$$

$$= \frac{B}{A}y - \frac{1}{A}y^2 - \frac{1}{A}\int_0^x BB'\,dt + \frac{1}{A}\int_0^x B'y\,dt +$$

$$+ B\int_0^x y\,dt - \int_0^x \left(B' \int_0^t y\,du \right) dt - \int_0^x y^2\,dt =$$

$$= \frac{B^2}{A} - 2\int_0^x BB'\,dt - \frac{1}{A}y^2 + \frac{2}{A}\int_0^x B'y\,dt - \int_0^x y^2\,dt,$$

односно, во врска со (3) ја добиваме равенката:

$$z + 2A\int_0^x z\,dt - B_0^2 = 2\int_0^x B'y\,dt, \tag{4}$$

каде што $B_0 = B(0)$.

Со интегрирање на интегралната равенка (4), во граници од 0 до x, се добива равенката:

$$\int_0^x z\,dt + 2A\int_0^x \left(\int_0^t z\,du \right) dt - B_0^2 x = 2\int_0^x \left(\int_0^t B'y\,du \right) dt. \tag{5}$$

Со оглед на тоа дека, за $B'(x) \neq 0$, важи:

$$\begin{aligned}
\int_0^x \left(\int_0^t B' y \, du \right) dt &= \int_0^x \left(B' \int_0^t y \, du \right) dt - \int_0^x \int_0^t \left(B'' \int_0^u y \, dv \right) du \, dt = \\
&= \int_0^x B' \, \frac{B - y}{A} \, dt - \int_0^x \int_0^t B'' \, \frac{B - y}{A} \, du \, dt = \\
&= \frac{1}{A} \int_0^x B' B \, dt - \frac{1}{A} \int_0^x \int_0^t B'' B \, du \, dt - \\
&\quad - \frac{1}{A} \int_0^x B' y \, dt + \frac{1}{A} \int_0^x \int_0^t B'' y \, du \, dt = \\
&= \frac{1}{A} \left[B_0 B_0' x + \int_0^x \int_0^t B'^2 \, du \, dt \right] - \frac{1}{A} \int_0^x B' y \, dt + \\
&\quad + \frac{1}{A} \int_0^x \left(\frac{B''}{B'} \int_0^t B' y \, du \right) dt - \\
&\quad - \frac{1}{A} \int_0^x \int_0^t \left[\left(\frac{B''}{B'} \right)' \int_0^u B' y \, dv \right] du \, dt \, ,
\end{aligned}$$

тогаш, во врска со (4), се добива равенката:

$$\begin{aligned}
&z + 3A \int_0^x z \, dt - \int_0^x \frac{B''}{B'} z \, dt + 2A^2 \int_0^x \int_0^t z \, du \, dt + \\
&+ \int_0^x \int_0^t \left(\frac{B''}{B'} \right)' z \, du \, dt - 2A \int_0^x \int_0^t \frac{B''}{B'} \, z \, du \, dt = \\
&= B_0^2 + \left[A B_0^2 + 2 B_0 B_0' - \frac{1}{B_0'} \, B_0^2 B_0'' \right] x + 2 \int_0^x \int_0^t B'^2(u) \, du \, dt \, .
\end{aligned}$$

Ако сега го имаме во вид уште и равенството на Коши:

$$\int_0^x \int_0^t \cdots \int_0^u f(v) \, dv \cdots dt = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x - t)^{n-1} f(t) \, dt \, , \tag{6}$$

за трансформирање на n–кратен интеграл во интеграл со параметар тогаш последната интегрална равенка станува:

$$
\begin{aligned}
z+\int_0^x \left\{3A-\frac{B''}{B'}+\left[2A^2-2A\,\frac{B''}{B'}+\left(\frac{B''}{B'}\right)'\right](x-t)\right\} z\,dt = \\
= B_0^2+\left(AB_0^2+2B_0B_0'-\frac{1}{B_0'}\,B_0^2B_0''\right)x+2\int_0^x\int_0^t B'(u)\,du\,dt\,.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Со ова ја докажавме теоремата:

Теорема 1. *Интегралната равенка* (7) *има особина нејзиното решение да биде квадрат од решението на интегралната равенка* (1) *а, притоа* $A = const$ *и* $B = B(x)$ *е произволна три пати диференцијабилна функција.*

Пример 1. За интегрална равенка:

$$
y+\int_0^x y\,dt = x+1\,,
$$

имаме $A = 1$, $B(x) = x+1$. Со замена во равенката (7) се добива следната интегрална равенка:

$$
z+\int_0^x [3+2(x-t)]z\,dt = 1+3x+x^2\,.
$$

Првата равенка има решение $y = 1$. За втората равенка со проверка исто така лесно констатираме дека има решение $z = 1$.

Пример 2. Интегралната равенка:

$$
y-2\int_0^x y\,dt = 3e^{-x}-2\,,
$$

има решение: $y = e^{-x}$. Соодветната интегрална равенка (7) гласи:

$$
z+\int_0^x [-5+4(x-t)]\,z\,dt = \frac{7}{2}+2x+\frac{9}{2}\,e^{-2x}\,.
$$

Лесно се проверува дека нејзино решение е: $z = e^{-2x}$. Значи втората равенка има решение квадрат од решението на првата равенка.

II. Да претпоставиме сега дека двата коефициента $A(x)$ ($\neq 0$) и $B(x)$, на интегралната равенка (1) се произволни три пати диференцијабилни функции од независно променливата x. Тогаш од (1) добиваме:

$$\int_0^x y\,dt = \frac{B-y}{A}, \qquad y' = \frac{B'A-A'B}{A} + \left(\frac{A'}{A} - A\right) y\,. \tag{8}$$

Ако повторно тргнеме од идентитетот:

$$\int_0^x y^2\,dt = y\int_0^x y\,dt - \int_0^x \left(y'(t)\int_0^t y(u)\,du\right) dt\,,$$

а во врска со релациите (8) добиваме:

$$\int_0^x y^2\,dt = y\,\frac{B-y}{A} - \int_0^x \left[\frac{B'A-A'B}{A} + \left(\frac{A'}{A} - A\right) y\right] \frac{B-y}{A}\,dt =$$

$$= \frac{B}{A}\,y - \frac{1}{A}\,y^2 - \int_0^x B\left(\frac{B}{A}\right)'\,dt + B\,\frac{B-y}{A} - \int_0^x B'\,\frac{B-y}{A}\,dt -$$

$$- \int_0^x \frac{A'B}{A^2}\,y\,dt + \int_0^x \left(\frac{B}{A}\right)'\,y\,dt + \int_0^x \frac{A'}{A^2}\,y^2 \; - \int_0^x y^2\,dt.$$

Поврзувајќи го почетокот со крајот, а во врска со (3), ја добиваме равенката:

$$\frac{1}{A}\,z + \int_0^x \left(2 - \frac{A'}{A^2}\right) z\,dt - \frac{B_0^2}{A_0} = 2\int_0^x C'y\,dt\,, \tag{9}$$

каде што $B_0 = B(0)$, $A_0 = A(0)$, $C(x) = \dfrac{B(x)}{A(x)}$.

Со инегрирање на последната равенка, во граници од 0 до x добиваме:

$$\int_0^x \frac{1}{A}\,z\,dt + \int_0^x\int_0^t \left(2 - \frac{A'}{A^2}\right) z\,du\,dt - \frac{B_0^2}{A_0}\,x = 2\int_0^x\int_0^t C'y\,du\,dt\,. \tag{10}$$

За интегралот од десната страна на равенката (10) при

$C'(x) \neq 0$, добиваме:

$$2\int_0^x\int_0^t C'y\,du\,dt = 2\int_0^x \left(C'\int_0^t y\,du\right) dt - 2\int_0^x\int_0^t \left(C''\int_0^u y\,dv\right) du\,dt =$$

$$= 2\int_0^x C'\,\frac{B-y}{A}\,dt - 2\int_0^x\int_0^t C''\,\frac{B-y}{A}\,du\,dt =$$

$$= 2\int_0^x C'\,\frac{B}{A}\,dt - 2\int_0^x\int_0^t C''\,\frac{B}{A}\,du\,dt - 2\int_0^x \frac{1}{A}\,C'y\,dt + 2\int_0^x\int_0^t \frac{C''}{C'A}\,C'y\,du\,dt =$$

$$= 2\int_0^x C'C\,dt - 2\int_0^x\int_0^t C''C\,du\,dt - \frac{1}{A}\int_0^x C'y\,dt + 2\int_0^x \left[\left(\frac{1}{A}\right)'\int_0^t C'y\,du\right] dt +$$

$$+ 2\int_0^x \frac{C''}{C'A}\int_0^t C'y\,du\,dt - 2\int_0^x\int_0^t \left[\left(\frac{C''}{C'A}\right)'\int_0^u C'y\,dv\right] du\,dt =$$

$$= 2C_0'C_0x + 2\int_0^x\int_0^t C''C\,du\,dt + \frac{1}{A}\left[\frac{1}{A}z + \int_0^x \left(2 - \frac{A'}{A^2}\right) z\,dt - \frac{B_0^2}{A_0}\right] +$$

$$+ \int_0^x \left(\frac{1}{A}\right)'\left[\frac{1}{A}z + \int_0^t \left(2 - \frac{A'}{A^2}\right) z\,du - \frac{B_0^2}{A_0}\right] dt +$$

$$+ \int_0^x \frac{C''}{C'A}\left[\frac{1}{A}z + \int_0^t \left(2 - \frac{A'}{A^2}\right) z\,du - \frac{B_0^2}{A_0}\right] dt -$$

$$- \int_0^x\int_0^t \left(\frac{C''}{C'A}\right)'\left[\frac{1}{A}z + \int_0^u \left(2 - \frac{A'}{A^2}\right) z\,dv - \frac{B_0^2}{A_0}\right] du\,dt =$$

$$= 2C_0C_0'x + C_0 - \frac{C_0^2C_0''}{C_0'}x + 2\int_0^x\int_0^t C'^2\,du\,dt - \frac{1}{A^2}z - 2\int_0^x \frac{1}{A}z\,dt +$$

$$+ \int_0^x \frac{C''}{C'A}z\,dt - \int_0^x\int_0^t \left(\frac{C''}{C'A}\right)' \frac{1}{A}z\,du\,dt + \int_0^x\int_0^t \frac{C''}{C'A}\left(2 - \frac{A'}{A^2}\right) z\,du\,dt\,.$$

Заменувајќи го добиеното во равенката (10) добиваме:

$$\int_0^x \frac{1}{A}z\,dt + \int_0^x\int_0^t \left(2 - \frac{A'}{A^2}\right) z\,du\,dt - B_0C_0x =$$

$$= 2C_0C_0'x + C_0^2 - \frac{C_0^2C_0''}{C_0'}x + 2\int_0^x\int_0^t C'^2\,du\,dt - \frac{1}{A^2}z - 2\int_0^x \frac{1}{A}z\,dt +$$

$$+ \int_0^x \frac{C''}{C'A}z\,dt - \int_0^x\int_0^t \left(\frac{C''}{C'A}\right)' \frac{1}{A}z\,du\,dt + \int_0^x\int_0^t \frac{C''}{C'A}\left(2 - \frac{A'}{A^2}\right) z\,du\,dt\,.$$

Од полседната равенка, имајќи ја во вид формулата (6) ја добиваме интегралната равенка:

$$\frac{1}{A^2}z+\int_0^x\left\{\frac{3}{A}-\frac{C''}{C'A^2}+\left[2-\frac{A'}{A^2}+\left(\frac{C''}{C'A}\right)'\frac{1}{A}-\frac{C''}{C'A}\left(2-\frac{A'}{A^2}\right)\right](x-t)\right\}z\,dt=$$

$$=C_0^2+\left(C_0B_0+2C_0C_0'-\frac{C_0^2C''}{C_0'}\right)x+2\int_0^x\int_0^t C'^2\,du\,dt\,. \tag{11}$$

Ако $C'(x)=0$, тогаш ја добиваме равенката:

$$\frac{1}{A}z+\int_0^x\left(2-\frac{A'}{A^2}\right)z\,dt-\frac{B_0^2}{A_0}=0\,. \tag{11a}$$

Од начинот како ги добивме последните две равенки следува точноста на теоремата:

Теорема 2. *Инегралните равенки на Волтерра* (11), *односно* (11a) *имаат особина нивните решенија да можат да се напишат како квадрати од решенијата на равенката* (1), *кај која* $A=A(x)\neq 0$ *и* $B=B(x)$ *се произволни три пати диференцијабилни функции, ако* $C'(x)\neq 0$, *односно* $C'(x)=0$.

Да забележиме дека за: $A=\text{const}$, од равенката (11) се добива интегралната равенка (7).

Пример 3. Инегралната равенка:

$$y+e^x\int_0^x y\,dt=e^{2x}\,,$$

има решение:

$$y(x)=e^x\,.$$

Соодветната линеарна интегрална равенка (11) гласи:

$$e^{-2x}z+\int_0^x\left[3e^{-t}-e^{-2t}+(2-3e^{-t})(x-t)\right]z\,dt=\frac{1}{2}+x+\frac{1}{2}e^{2x}\,.$$

Со проверка лесно утврдуваме дека нејзино решение е:

$$z(x)=e^{2x}\,.$$

Пример 4. Инегралната равенка:

$$y+e^x\int_0^x y\,dt=2e^x,\qquad \text{има решение:}\qquad y=2e^{1+x-e^x}\,.$$

За овој случај интегралната равенка (11a) гласи:

$$z + e^x \int_0^x \left(2 - e^{-t}\right) z\,dt = 4e^x .$$

Лесно се проверува дека нејзиното решение е:

$$z = 4e^{2(1+x-e^x)} .$$

III. Овде ја разгледуваме линеарната интегрална равенка на Волтерра од втор вид со произволно јадро, односно равенката:

$$y + a(x) \int_0^x b(t)y(t)\,dt = f(x) , \tag{12}$$

кај која: $a(x) \not\equiv 0$, $b(x) \not\equiv 0$, $f(x)$, се три пати диференцијабилни функции. Од равенката (12) ги добиваме релациите:

$$\int_0^x by\,dt = \frac{f-y}{a}, \qquad y' = a\left(\frac{f}{a}\right)' + \frac{a'}{a}\,y - aby . \tag{13}$$

Ако тргнеме од идентитетот:

$$\int_0^x AB\,dt = A\int_0^x B\,dt - \int_0^x \left(A'\int_0^t B\,du\right) dt ,$$

а во врска со равенставата (13) добиваме:

$$\begin{aligned}\int_0^x b(t)y^2\,dt =& y\int_0^x by\,dt - \int_0^x \left(y'\int_0^t by\,du\right) dt = \\ &= \frac{f}{a}\,y - \frac{1}{a}\,y^2 - \int_0^x f\left(\frac{f}{a}\right)' dt - \int_0^x \frac{a'f}{a^2}\,y\,dt + \\ &\quad + \int_0^x fby\,dt + \int_0^x \left(\frac{f}{a}\right)' y\,dt + \int_0^x \frac{a'}{a^2}\,y^2\,dt - \int_0^x by^2\,dt .\end{aligned}$$

Сега имајќи ја во вид ознаката (3) ја добиваме равенката:

$$\frac{1}{a}\,z + \int_0^x \left(2b - \frac{a'}{a^2}\right) z\,dt - \frac{f_0^2}{a_0} = 2\int_0^x c'y\,dt , \tag{14}$$

каде што: $f_0 = f(0)$, $a_0 = a(0)$, $\dfrac{f(x)}{a(x)} = c(x)$, $\dfrac{f_0}{a_0} = c_0$.

Со интегрирање, во граници од 0 до x, на равенката (14) се добива следната равенка:

$$\int_0^x \frac{1}{a}\, z\, dt + \int_0^x\!\int_0^t \left(2b - \frac{a'}{a^2}\right) z\, du\, dt - c_0 f_0 x = 2\int_0^x\!\int_0^t c' y\, dt\,. \tag{15}$$

Со оглед на тоа дека при $c'(x) \neq 0$важи

$$\int_0^x\!\int_0^t c' y\, dt = \int_0^x \left(\int_0^t \frac{c'}{b}\, by\, du\right) dt = \int_0^x \left(\frac{c'}{b}\int_0^t by\, du\right) dt -$$

$$-\int_0^x\!\int_0^t \left(\left(\frac{c'}{b}\right)' \int_0^u by\, dv\right) du\, dt = \int_0^x \frac{c'}{b}\,\frac{f-y}{a}\, dt - \int_0^x\!\int_0^t \left(\frac{c'}{b}\right)' \frac{f-y}{a}\, du\, dt =$$

$$= \int_0^x \frac{c' f}{ab}\, dt - \int_0^x \frac{c' f}{ab}\Big|_0^t dt + \int_0^x\!\int_0^t \frac{c'^2}{b}\, du\, dt - \int_0^x \frac{1}{ab} c' y\, dt + \int_0^x\!\int_0^t \left(\frac{c'}{b}\right)' \frac{1}{ac'} c' y\, du\, dt =$$

$$= \frac{c_0 c_0'}{b_0} x + \int_0^x\!\int_0^t \frac{c'^2}{b}\, du\, dt - \frac{1}{ab_0} c' y\, dt + \int_0^x \left(\frac{1}{ab}\right)' \int_0^t c' y\, dt +$$

$$+ \int_0^x \left(\left(\frac{c'}{b}\right)' \frac{1}{ac'} \int_0^t c' y\, du\right) dt - \int_0^x\!\int_0^t \left\{\left[\left(\frac{c'}{b}\right)' \frac{1}{ac'}\right]' \int_0^t c' y\, dv\right\} du\, dt\,,$$

во врска со (15) имаме:

$$\int_0^x \frac{1}{a} z + \int_0^x\!\int_0^t \left(2b - \frac{a'}{a^2}\right) z\, du\, dt - c_0 f_0 x =$$

$$= 2\frac{c_0 c_0'}{b_0} x + 2\int_0^x\!\int_0^t \frac{c'^2}{b}\, du\, dt - \frac{1}{ab}\left[\frac{1}{a} z + \int_0^x \left(2b - \frac{a'}{a^2}\right) z\, dt - c_0 f_0\right] +$$

$$+ \int_0^x \left(\frac{1}{ab}\right)' \left[\frac{1}{a} z + \int_0^t \left(2b - \frac{a'}{a^2}\right) z\, du - c_0 f_0\right] dt +$$

$$+ \int_0^x \left(\frac{c'}{b}\right)' \frac{1}{ac'} \left[\frac{1}{a} z + \int_0^t \left(2b - \frac{a'}{a^2}\right) z\, du - c_0 f_0\right] dt -$$

$$- \int_0^x\!\int_0^t \left[\left(\frac{c'}{b}\right)' \frac{1}{ac'}\right]' \left[\frac{1}{a} z + \int_0^u \left(2b - \frac{a'}{a^2}\right) z\, dv - c_0 f_0\right] du\, dt\,.$$

Односно после кратки пресметки добиваме:

$$\frac{1}{a^2b}z+\int_0^x\frac{1}{a}z\,dt-\int_0^x\left(\frac{1}{ab}\right)'z\,dt-\int_0^x\left(\frac{c'}{b}\right)'\frac{1}{c'a^2}z\,dt+$$

$$+\int_0^x\frac{1}{ab}\left(2b-\frac{a'}{a^2}\right)z\,dt+\int_0^x\int_0^t\left(2b-\frac{a'}{a^2}\right)z\,dt+$$

$$+\int_0^x\int_0^t\left[\left(\frac{c'}{b}\right)'\frac{1}{ac'}\right]'\frac{1}{a}z\,du\,dt-\int_0^x\int_0^t\left(\frac{c'}{b}\right)'\frac{1}{c'a}\left(2b-\frac{a'}{a^2}\right)z\,du\,dt=$$

$$=2\frac{c_0c_0'}{b}x+2\int_0^x\int_0^t\frac{c'^2}{b}\,du\,dt+c_0f_0\left[x+\frac{1}{a_0c_0'}-\left(\frac{c'}{b}\right)'\frac{1}{a_0c_0'}x\right].$$

Сега, имајќи ја во вид уште и формулата (6), последната интегрална равенка станува:

$$\frac{1}{a^2b}z+\int_0^x\left\{\frac{3}{a}+\frac{b'}{a^2b^2}-\left(\frac{c'}{b}\right)'\frac{1}{c'a^2}+\left[\left(2b-\frac{a'}{a^2}\right)\left(1-\left(\frac{c'}{b}\right)'\frac{1}{ac'}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{a}\left(\left(\frac{c'}{b}\right)'\frac{1}{c'a}\right)'\right](x-t)\right\}z\,dt= \tag{16}$$

$$=\frac{c_0^2}{b_0}+\left[\frac{2c_0c_0'}{b_0}+c_0f_0\left(1-\left(\frac{c'}{b}\right)'_0\frac{1}{a_0c_0'}\right)\right]x+2\int_0^x\int_0^t\frac{c'^2}{b}\,du\,dt$$

Ако важи $c'(x)=0$, тогаш ја добиваме равенката:

$$\frac{1}{a}z+\int_0^x\left(2b-\frac{a'}{a^2}\right)z\,dt-\frac{f_0^2}{a_0}=0 \tag{16a}$$

Со ова ја докажуваме следнава теорема:

Теорема 3. *Интегралните равенки на Волтерра* (16), *односно* (16a) *за* $a(x)\neq 0$, $b(x)\neq 0$ *и* $f(x)$ *произволни три пати диференцијабилни функции имаат особина нивните решенија да бидат квадрати од решението на интегралната равенка* (12), *ако* $c'(x)\neq 0$, *односно ако* $c'(x)=0$.

Да забележиме дека за, $b(x)=1$, од интегралната равенка (16) се добива интегралната равенка (11).

Пример 5. Инегралната равенка:

$$y + 2^x \int_0^x e^t y\,dt = e^{3x}\,,$$

има решение: $y = e^x$. А соодветната интегрална равенка (16) гласи:

$$9e^{-3x} + \int_0^x \{54e^{-t} + [72e^t - 54e^{-t} - 9e^{-3t}]\,(x-t)\}\,z\,dt = 1 + 21x + 8e^{3x}\,.$$

Лесно се проеверува дека нејзиното решение: $y = e^{2x}$, односно, квадрат од решението на првата равенка.

Пример 6. За интегралната равенка:

$$y + e^x \int_0^x e^t y\,dt = 2e^x\,,$$

важи $c'(x) = 0$ и таа има решнение $y = 2e^{(1/2)(1+2x-e^{2x})}$. За овој случај интегралната равенка (16а) гласи:

$$z + e^x \int_0^x \left(2e^t - e^{-t}\right)\,z\,dt = 4e^x\,.$$

Лесно се проверува дека има решение: $z = 4e^{1+2x-e^{2x}}$.

Литература

[1] E. Goursat: *Cours d'analyse mathematique*, Pariz 1942.

[2] Л. А. Димов: *Прилог кон теоријата на решавањето на линеарните интегрални равенки на Волтерра*, докторска дисертација, Скопје 1995.

[3] Л. М. Краснов, И. А. , Киселев, И. Г. Макаренко: *Инегральные уравнения*, Издадельство Наука, Москава, 1976.

[4] Trajan Lalesko: *Introduction a la theorie des equations integrales*, Paris, 1912.

[5] I. A. Shapkarev: *Grades of the solutions of more simple as solutions of more complex Volterra linear integral equations*, Proceedings of the mathematical conference in Priština, str. 95–99, 1994.

FORMING A VOLTERRA LINEAR INTEGRAL EQUATION WHOSE SOLUTION IS SQUARE OF THE SOLUTION OF A MORE SIMPLE LINEAR INTEGRAL EQUATION

Dimov A. Lazo

Summary

One of the methods for solving exactly differential equations, according to the theory, is reducting them to differential equations of lower order. That's why many of the authors were treating the problems of forming differential equation, whose solution is a grade of the solution of a differential equation of lower order, or it is a product, of the solutions of differential equations of lower order.

Here, we form Volterra linear integral equations of second type, whose solutions are squares of the solutions of more simple Volterra linear integral equations, given in advance. We use a method which is improved in comparrson with the method given in [5].

Mašinski fakultet,
p. fah 464
91 000 Skopje,
Makedonija