

О ЈЕДНОМ КАРАМАТИНОМ УСЛОВУ  
ИНТЕГРАБИЛИТЕТА БАЛИСТИЧКЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ  
ЈЕДНАЧИНЕ\*)

ГОДИШЕН ЗБОРНИК НА ФИЛОЗОФСКИОТ ФАКУЛТЕТ  
НА УНИВЕРЗИТЕТОТ ВО СКОПЈЕ, Книга 2 (1949), 247-263

1. Предмет овога рада је балистичка диференцијална једначина

$$(y + \rho) y' + y^2 - 1 = 0 \quad (1)$$

у случају када  $\rho(x)$  има облик

$$\rho(x) = Ae^{nx} + Be^{-nx} + R,$$

где су  $A$ ,  $B$ ,  $R$  и  $n$  константе.

Уопштавајући D'Alembert-ов услов интеграбилитета

$$\frac{1}{n^2} + \frac{AB}{n+1} = \frac{R^2}{(2+n)^2}, \quad (2)$$

Карамата<sup>1)</sup> је добио овај услов

$$\frac{1}{n^2} + \frac{AB}{k(k+n)} = \frac{R^2}{(2k+n)^2} \quad (3)$$

који се своди на D'Alembert-ов за  $k=1$ .

Сводећи диференцијалну једначину (1) на Legendre-ову једначину

$$(x^2 - 1) z'' + (cx + b) z' + Mz = 0, \quad (4)$$

ми ћемо показати да се услов интеграбилитета последње једначине, наиме

$$k(k-1) + ck + M = 0 \quad (k\text{-цело број}) \quad (5)$$

своди управо на услов интеграбилитета (2) који је навео Карамата.

Затим, пошто се диференцијална једначина (4) може свести на хипергеометриску диференцијалну једначину<sup>2)</sup>

$$x(1-x)y'' + [(\gamma - \alpha + \beta + 1)]y' - \alpha\beta y = 0, \quad (6)$$

ми ћемо показати да се општи интеграл диференцијалне једначине (1) може увек изразити помоћу хипергеометриских функција  $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ . С друге стране, познато је да је диференцијална једначина (6) интеграбилна квадратурама, када је један од четири броја<sup>3)</sup>  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma - \alpha$ ,  $\gamma - \beta$  цео број.

Показаћемо да се сваки од ових четири услова интеграбилитета своди на услов (3), када се пређе од диференцијалне једначине (6) на диференцијалну једначину (1).

\*) Професори Карамата и Митриновић прочитали су овај рад у рукопису и учинили су ми корисна примедбе.

<sup>1)</sup> J. Карамата, *Весник Друштва математичара и физичара Н. Р. С. I*, Београд, 1949, стр. 72-73, задатак 8.

<sup>2)</sup> E. Kamke, *Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen*, Bd. I, 1942, S. 22.

<sup>3)</sup> Goursat, *Propriétés générales de l'équation d'Euler et de Gauss*, *Actualités scientifiques et industrielles*, 1936, p. 6.

2. Уношењем функције  $\rho(x)$  у (1) и сменом

$$e^{nx} = t, \quad (7)$$

добиамо Riccati-еву диференцијалну једначину по променљивој  $t$ , облика

$$(1 - y^2) \frac{dt}{dy} - [nAt^2 + (nv + nR)t + nb] = 0.$$

Сменом променљиве  $y$  са  $x$  имаћемо диференцијалну једначину

$$(1 - x^2) \frac{dt}{dx} - [nAt^2 + (nx + nR)t + nB] = 0. \quad (8)$$

Новом трансформацијом

$$z = \exp\left(\int \frac{nA}{(1-x^2)} t dx\right) \quad (9)$$

диференцијална једначина (8) постаје

$$(1 - x^2)^2 z'' - [(n+2)x + nR](1 - x^2) z' + n^2 ABz = 0.$$

После увођења нових ознака

$$a = n^2 AB; \quad r = nR; \quad n+2 = m \quad (10)$$

и сменом променљиве  $z$  са  $y$  имамо једначину

$$(x^2 - 1)^2 y'' + [(mx + r)(x^2 - 1)] y' + ay = 0, \quad (11)$$

одакле трансформацијом

$$y = (x-1)^p (x+1)^q v \quad (12)$$

где су  $p$  и  $q$  за сада још неодређени параметри, диференцијална једначина (11) после сређивања, постаје

$$(x^2 - 1)^2 z'' + (x^2 - 1) [(mx + r) + 2p(x+1) + 2q(x-1)] z' + \\ + p(p-1)(x+1)^2 + 2pq(x^2 - 1) + q(q-1)(x-1)^2 + \\ + p(mx+r)(x+1) + q(mx+r)(x-1) + az = 0. \quad (13)$$

Означимо ли са

$$P(x) \equiv (p+q)(p+q+m-1)x^2 + [2(p^2 - q^2) - (m-2)(p-q) + \\ + r(p+q)]x + (p-q)^2 - (p+q) + r(p-q) + a,$$

диференцијална једначина (13) постаје

$$(x^2 - 1)^2 z'' + (x^2 - 1) \{ [2(p+q) + m]x + 2(p-q) + \\ + r \} z' + P(x)z = 0. \quad (14)$$

Параметре  $p$  и  $q$  можемо изабрати увек тако да буде

$$P(x) = M(x^2 - 1), \quad (15)$$

где  $M$  означава једну константу.

Уношењем ове вредности за  $P(x)$  у диференцијалну једначину (14) и увођењем нових ознака

$$c \equiv 2(p+q) + m \\ b \equiv 2(p-q) + r \quad (16)$$

добиамо, после скраћивања са  $(x^2 - 1)$ , диференцијалну једначину облика

$$(x^2 - 1)z'' + (cx + b)z' + Mz = 0. \quad (17)$$

3. Потражимо сада везу између констаната  $A$ ,  $B$ ,  $R$  и  $n$  и ново уведених  $p$ ,  $q$  и  $M$ . Идентитет (15) доводи нас до три релације

$$\begin{aligned} (p+q)(p+q+m-1) &= M, \\ 2(p^2 - q^2) + (m-2)(p-q) + r(p+q) &= 0, \\ (p-q)^2 + r(p-q) - (p+q) + a &= -M. \end{aligned} \quad (18)$$

Одавде добијамо

$$\begin{aligned} 4p &= -(m+r-2) \pm \sqrt{(m+r-2)^2 - 4a}, \\ 4q &= -(m+r-2) \pm \sqrt{(m-r-2)^2 - 4a}, \\ M &= (p+q)(p+q+m-1), \end{aligned}$$

или с обзиром на (10)

$$\begin{aligned} p &= -\frac{n}{4} \{R+1 \pm \sqrt{(R+1)^2 - 4AB}\}, \\ q &= -\frac{n}{4} \{R-1 \pm \sqrt{(R-1)^2 - 4AB}\}, \\ M &= s(s+n+1), \end{aligned}$$

где је стављено

$$s = p + q.$$

Елиминацијом  $(p-q)$  и  $M$  из релација (18) налази се

$$\frac{r^2}{[2(p+q)+m-2]^2} = \frac{a}{(p+q)[(p+q)+m-2]} + 1$$

одакле с обзиром на (10) следује једначина

$$\frac{R^2}{(2s+n)^2} = \frac{AB}{s(s+n)} + \frac{1}{n^2} \quad (19)$$

која је управо истог облика као и услов интеграбилитета (3) који је навео Карамата.

Да би Legendre-ова диференцијална једначина (17) имала за партикуларни интеграл један полином  $Q(y)$  степена  $k$ , потребно и довољно је да услов

$$k(k-1) + ck + M = 0 \quad (k - \text{цео број})$$

буде задовољен. Узимајући у обзир релације (10), (16), и (18), овај услов постаје

$$s^2 + (2k+n+1)s + k(k+n+1) = 0,$$

одакле излази

$$s = -k \quad \text{или} \quad s = -(k+n+1).$$

Ако се ове вредности за  $s$  унесу у услове (19), добија се очевидно услов интеграбилитета (3) у коме је  $k$  замењено респективно са  $-k$  и са  $k+1$ .

У овом случају један партикуларан интеграл балистичке једначине (1) дат је изразом

$$sy - \frac{nRs}{n+2s} + (y^2 - 1) \frac{Q'}{Q} = nAe^{nx},$$

где  $Q(y)$  претставља полином степена  $k$ , који је један партикуларан интеграл Legendre-ове диференцијалне једначине (17).

4. До истог резултата долазимо, свдећи Legendre-ову диференцијалну једначину (17) сменом

$$z(x) = \eta(\xi), \quad 2\xi = x + 1$$

на једначину

$$\xi(1-\xi)\eta'' + \left(\frac{c-b}{2} - c\xi\right)\eta' - M\eta = 0,$$

тј. на једначину

$$x(1-x)y'' + \left(\frac{c-b}{2} - cx\right)y' - Mx = 0 \quad (20)$$

$$(\xi = x, \quad \eta = y).$$

Последња једначина претставља хипергеометриску диференцијалну једначину, чији општи облик гласи

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' - \alpha\beta y = 0, \quad (6)$$

где су  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  произвољни, али од  $x$  независни бројеви.

Потражимо везу између констаната опште хипергеометриске једначине  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и констаната  $b$ ,  $c$ ,  $M$  хипергеометриске једначине (20).

Из (20) и (6) имамо

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + 1 &= b, \\ 2\gamma &= c - b, \\ \alpha\beta &= M. \end{aligned} \quad (21)$$

Прва и трећа од ових једначина, имајући у виду вредности за  $c$  и  $M$  из (16) односно (18), дају

$$\alpha = s, \quad \beta = s + m - 1.$$

Из друге од једначина (21), а с обзиром на другу од једначина (16) излази

$$\gamma = \frac{2s+m}{2} - \frac{r(m-2)}{2(2s+m-2)}.$$

Имајући у виду вредности констаната  $r$  и  $m$  из (10), добијамо

$$\alpha = s, \quad \beta = s + n + 1, \quad \gamma = \frac{2s+n+2}{2} - \frac{n^2 R}{2(2s+n)}. \quad (22)$$

Како је партикуларни интеграл диференцијалне једначине (6) дат хипергеометриским редом, који се краткоће ради означава са  $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ , један партикуларан интеграл диференцијалне једначине (20) биће дат редом

$$y = F\left(s, s+n+1, \frac{2s+n+2}{2} - \frac{n^2 R}{2(2s+n)}, x\right)$$

где је  $s$  дефинисано са

$$s = p + q.$$

Да бисмо нашли услов интеграбилности диференцијалне једначине (1) помоћу квадратура, потражићемо један партикуларан интеграл једначине (6) у коначном облику.

Из теорије хипергеометриске диференцијалне једначине познато<sup>1)</sup> је да ће хипергеометриска диференцијална једначина имати један партикуларан интеграл облика

$$\begin{aligned} y &= P(x), \\ y &= x^{1-\gamma} P(x), \\ y &= (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} P(x), \\ y &= x^{1-\gamma} (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} P(x), \end{aligned} \quad (23)$$

( $P(x)$  — полином по  $x$ )

ако је један од бројева  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma - \alpha$ ,  $\gamma - \beta$  цео број.

Применимо сада ове услове на диференцијалну једначину (20).

а) Добијамо прво да  $\alpha$  односно  $s$  мора бити цео број, позитиван или негативан. При томе чинимо дакле ограничење за произвољно изабране параметре  $p$  и  $q$  чији је збир  $s$ .

Но тако постављени услов за  $s$  показује да је веза (19) између коефицијената диференцијалне једначине (1) и  $s$  у ствари Караматин услов интеграбилитета диференцијалне једначине (1), замењујући  $s$  са  $k$ .

Из овога следује да ће диференцијална једначина (20) имати партикуларан интеграл облика (23).

б) Претпоставимо с обзиром на (23) да је  $s$  различито од целог броја, а  $\beta$  цео број тј.

$$s + n = k \quad (k = \text{цео број})$$

одакле добијамо за  $s$  вредност

$$s = k - n. \quad (24)$$

Ако се ова вредност за  $s$  замени у услов (19), добијамо услов интеграбилитета облика

$$\frac{R^2}{(n-2k)} = \frac{AB}{-k(n-k)} + \frac{1}{n^2}$$

који се своди на (3), где је  $k$  замењено са  $-k$ .

Хипергеометриска једначина имаће и у овом случају један интеграл облика (23). Диференцијална једначина биће интеграбилна, јер је услов (19) односно (3) задовољен.

в) Из услова да  $\gamma - \alpha$  буде цео број, изостављајући случај када је  $s$  цео број, добијамо

$$\frac{n}{2} - \frac{n^2 R}{2(2s+n)} = k, \quad (k = \text{цео број}) \quad (25)$$

Одавде за  $s$  налазимо вредност

<sup>1)</sup> Forsyth-Jacobsthal, *Lehrbuch der Differential-Gleichungen* 1912, S. 221.

$$s = \frac{n(R-1) + 2k}{2(n-2k)} n.$$

Тако добивена вредност за  $s$  унешена у (19) своди последњу једначину на услов интеграбилитета (3) балистичке диференцијалне једначине. Разуме се да вредност за  $s$  дата формулом (25) садржи и вредност за  $s$  која је добијена из (24) и обратно.

г) Услов да  $\gamma - \beta$  буде цео број даје

$$\frac{n}{2} - \frac{n^2 R}{2(2s+n)} = k \quad (k = \text{цео број}).$$

Одавде налазимо за  $s$  вредност

$$s = -\frac{nR + (n+2k)}{2(n+2k)} n,$$

која унешена у (19) своди ову релацију на Караматин услов интеграбилитета (3) диференцијалне једначине (1).

5. Претпоставимо да смо нашли један партикуларан интеграл хипергеометриске диференцијалне једначине (20) и означимо га са

$$\eta = F(\alpha, \beta, \gamma, \xi),$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  узимају одређене вредности и где је бар један од бројева  $\alpha, \beta, \gamma - \alpha, \gamma - \beta$  цео број, односно да је један од услова у § 4 испуњен.

Партикуларни интеграл Legendre-ове диференцијалне једначине биће у том случају

$$= F\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{x+1}{2}\right)$$

водећи рачуна о смени

$$\eta(\xi) = z(x); \quad 2\xi = x+1. \quad (26)$$

За линеарну диференцијалну једначину, овај партикуларни интеграл добија облик

$$z = (x-1)^p (x+1)^q F\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{x+1}{2}\right)$$

ако се има у виду релација (12) и промена у са  $z$ .

Параметре  $p$  и  $q$  одређујемо из (18) према датим вредностима констаната  $A, B, R$  и  $n$ .

Riccati-ева диференцијална једначина (8) има у овом случају партикуларни интеграл облика

$$t_1 = \frac{\frac{d}{dx} \left[ (x-1)^p (x+1)^q F\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{x+1}{2}\right) \right]}{nA (x-1)^{p-1} (x+1)^{q-1} F\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{x+1}{2}\right)}.$$

Свођењем Riccati-еве диференцијалне једначине помоћу партикуларног интеграла на линеарну, налазимо општи интеграл ове, а одавде и општи интеграл Riccati-еве диференцијалне једначине.

Смена (7) доводи до општег интеграла балистичке диференцијалне једначине.

6. Пример. На крају ћемо навести један нумерички пример.

Узмимо за параметре  $p, q$  и произвољни цео број  $k$ , следеће вредности

$$p = \frac{1}{2}, \quad q = 1, \quad k = -1.$$

У том случају имаћемо према (22)

$$s = \alpha = \frac{3}{2}, \quad \beta = -1, \quad m = -\frac{3}{2}. \quad (27)$$

Из (18) добијамо

$$M = -\frac{3}{2}, \quad r = -\frac{1}{6}, \quad a = \frac{8}{3}$$

или с обзиром на (10)

$$AB = \frac{32}{147}, \quad R = \frac{1}{21}, \quad n = -\frac{7}{2}.$$

Релације (16) дају

$$c = \frac{3}{2}, \quad b = -\frac{7}{6},$$

па имамо за  $\gamma$

$$\gamma = \frac{4}{3}. \quad (28)$$

Облик балистичке диференцијалне једначине у овом случају је

$$\left( y + e^{-\frac{7}{2}x} + \frac{32}{147} e^{\frac{7}{2}x} + \frac{1}{21} \right) y' + y^2 - 1 = 0. \quad (29)$$

Сменом

$$e^{-\frac{7}{2}x} = t, \quad (30)$$

добијамо Riccati-еву диференцијалну једначину

$$(y^2 - 1) \frac{dy}{dt} - \frac{7}{2} t^2 + \left( \frac{1}{21} + y \right) t + \frac{32}{147} = 0. \quad (31)$$

Нова трансформација

$$t = \frac{2}{7} (1 - y^2) \frac{z'}{z}; \quad -z = (y - 1)^{\frac{1}{2}} (y + 1) u, \quad (32)$$

доводи до Legendre-ове диференцијалне једначине

$$(y^2 - 1) u'' + \left( \frac{3}{2} y - \frac{7}{6} \right) u' - \frac{3}{2} u = 0.$$

Ова последња с обзиром на смену (26) прелази у хипергеометриску једначину

$$\xi (\xi - 1) \eta'' + \left( \frac{3}{2} \xi - \frac{4}{3} \eta' \right) - \frac{3}{2} \eta = 0,$$

а ту једначину смо могли добити директно с обзиром на (27) и (28).

Партикуларни интеграл последње диференцијалне једначине биће дат изразом

$$\eta = C_1 F\left(\frac{3}{4}, -1, \frac{4}{3}, \xi\right),$$

који можемо писати и овако:

$$\eta = C_1 (7 - 9\xi),$$

где је  $C_1$  произвољна константа интеграције.

С обзиром на смене (26) и (32), партикуларни интеграл Ріссати-еве диференцијалне једначине (31) имаће облик

$$t_1 = \frac{1}{7} \frac{30y - 45y^2 + 11}{9y - 7}.$$

Општи интеграл Ріссати-еве диференцијалне једначине биће

$$\varphi(y) [C + \psi(y)] (t - t_1) = 1,$$

где је

$$\varphi(y) = (y+1)^{\frac{1}{3}} (y-1)^{-\frac{5}{6}} (9y-7)^2,$$

$$\psi(y) = -\frac{7}{2} \int \frac{dy}{(y+1)(y-1)\varphi(y)}.$$

С обзиром на смену (30), општи интеграл балистичке диференцијалне једначине (29) је

$$\varphi(y) [C + \psi(y)] \left( e^{-\frac{7}{2}x} - t_1 \right) = 1.$$

Ради проверавања добијеног резултата, из последње релације елиминисали смо  $C$  и добили једначину облика (1) која одговара у овом случају.

## ОБ ОДНОМ УСЛОВИИ КАРАМАТЫ, О ИНТЕГРИРОВАНИИ БАЛЛИСТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

(Вывод)

С помошћу дифференцијалног уравнения Лежандра, а потом и гипергеометричког дифференцијалног уравнения, автор доказује Караматино условие интегрирования баллистического дифференцијалног уравнения, каторое имеет вид (3) и каторый при  $k=1$ , превращается в условие Даламбера.

## SUR LA CONDITION D'INTÉGRABILITÉ DE KARAMATA DE L'ÉQUATION DE LA BALISTIQUE EXTÉRIEURE

(Résumé)

1. Soit donnée l'équation différentielle de la balistique

$$(y+\rho)y'+y^2-1=0, \quad (1)$$

où la fonction  $\rho(x)$  est de la forme

$$\rho(x) = Ae^{nx} + Be^{-nx} + R,$$

$A, B, R$  et  $n$  étant des constantes.

En généralisant la condition d'intégrabilité de d'Alembert

$$\frac{\Gamma}{n^2} + \frac{AB}{n+1} = \frac{R^2}{(2+n)^2}.$$

Karamata<sup>1)</sup> a donné, sous forme de problème, la condition suivante



$$\frac{1}{n^2} + \frac{AB}{k(k+n)} = \frac{R}{(2k+n)^2}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \quad (2)$$

qui se réduit à celle de d'Alembert pour  $k=1$ .

En ramenant l'équation différentielle (1) à celle de Legendre

$$(y^2-1)v'' + (cy+b)v' + Mv = 0, \quad (3)$$

nous allons montrer, en premier lieu, que la condition d'intégrabilité de cette dernière équation, à savoir

$$k(k-1) + ck + M = 0, \quad k \text{ entier}, \quad (4)$$

se réduit justement à la condition d'intégrabilité (2) donnée par Karamata.

En second lieu, étant donné que l'on peut ramener l'équation différentielle (3) à celle des fonctions hypergéométriques

$$\xi(1-\xi)\eta'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)\xi]\eta' - \alpha\beta\gamma = 0, \quad (5)$$

nous montrerons que, dans le cas générale de l'équation différentielle (1) peut toujours s'exprimer au moyen des fonctions hypergéométriques  $F(\alpha, \beta, \gamma, \eta)$ . D'autre part, étant donné que l'équation hypergéométrique (5) est intégrable par quadrature<sup>2)</sup>, lorsque l'un des quatres nombres

$$\alpha, \beta, \gamma - \alpha \text{ ou bien } \gamma - \alpha \text{ est entier}, \quad (6)$$

nous montrerons que chacune de ces quatres conditions d'intégrabilité se réduit à la condition (2), lorsque l'on passe de l'équation différentielle (5) à l'équation différentielle (1). D'ailleurs ce résultat est presque évident puisque, d'une part, les conditions (6) sont équivalente à la condition (4), lorsqu'on passe de l'équation différentielle (5) à l'équation différentielle (3), et d'autre part, la condition (4) est équivalente à la condition (2), lorsqu'on passe de l'équation différentielle (3) à l'équation différentielle (1).

2. Pour ramener l'équation différentielle (1) à l'équation différentielle (3), effectuons d'abord la substitution

$$z = \exp\left(\int \frac{nA}{y^2-1} e^{ny} dy\right).$$

En posant, pour abrégier,

$$a = n^2 AB, \quad r = nB \text{ et } m = n+2, \quad (7)$$

l'équation différentielle (1) se déduit alors à l'équation linéaire du second ordre, suivante

$$(y^2-1)^2 z'' + (my+r)(y^2-1)z' + az = 0. \quad (8)$$

En y effectuant, en second lieu, la substitution

$$z = (y-1)^p (y+1)^q v,$$

$p$  et  $q$  étant des paramètres encore indéterminés, (qui me fut suggéré par Karamata), l'équation (8) se réduit à la suivante

$$(y^2-1)^2 v'' + (y^2-1) \{ [2(p+q)+m]y + 2(p-q)+r \} v' + P(y)v = 0, \quad (9)$$

où l'on a posé

$$P(y) =$$

$$= (p+q)(p+q+m-1)y^2 + [2(p^2-q^2) + (m-2)(p-q) + r(p+q)]y + (p-q)^2 - (p+q) + r(p-q) + a.$$

Or, on peut toujours déterminer les paramètres  $p$  et  $q$  et une constante  $M$  de manière que le polynôme  $P(y)$  prenne la forme

$$P(y) = M(y^2 - 1). \quad (10)$$

En introduisant cette valeur de  $P(y)$  dans l'équation différentielle (9) et en y posant, pour abrégé,

$$c = 2(p+q) + m \quad \text{et} \quad b = 2(p-q) + r, \quad (11)$$

cette équation se réduit à l'équation de Legendre<sup>3</sup>

$$(y^2 - 1)v'' + (cy + b)v' + Mv = 0. \quad (12)$$

Or, pour que l'identité (10) ait lieu, il faut que  $p$ ,  $q$  et  $M$  satisfassent aux conditions

$$\begin{aligned} (p-q)(p+q+m-1) &= M, \\ 2(p^2 - q^2) + (m-2)(p-q) + r(p+q) &= 0, \\ (p-q)^2 + r(p-q) - (p+q) + a &= -M. \end{aligned} \quad (13)$$

On en tire, en tenant compte de relation (7), que

$$\begin{aligned} p &= -\frac{n}{4} \left\{ R+1 \pm \sqrt{(R+1)^2 - 4AB} \right\}, \\ q &= -\frac{n}{4} \left\{ R-1 \pm \sqrt{(R-1)^2 - 4AB} \right\}, \\ M &= s(s+n+1), \end{aligned} \quad (14)$$

où l'on a posé

$$s = p+q.$$

Mais, en éliminant  $(p-q)$  et  $M$  des équations du système (13), l'on obtient pour  $p+q=s$  l'équation

$$\frac{R^2}{(2s+n)^2} = \frac{AB}{s(s+n)} + \frac{1}{n^2}, \quad (s=p+q), \quad (15)$$

qui est justement de la même forme que la condition d'intégrabilité (2) de Karamata.

Or, pour que l'équation différentielle de Legendre (12) ait pour intégrale particulière un polynôme  $Q(y)$  de degré  $k$ , il faut et il suffit que la condition (4), c. à d. la condition

$$k(k-1) + ck + M = 0, \quad k \text{ entier},$$

soit satisfaite. En tenant compte des relations (7), (11) et (14) cette condition se réduit à

$$s^2 + (2k+n+1)s + k(k+n+1) = 0,$$

c. à d. à

$$s = -k, \quad \text{ou bien} \quad s = -(k+n+1).$$

Ces valeurs de  $s$  introduites dans la condition (15) donnent justement la condition d'intégrabilité (2), dans laquelle  $k$  est à remplacer d'une part par  $-k$ , d'autre part par  $k+1$ .

Remarquons, enfin, que dans ce cas une intégrale particulière de l'équation de la balistique (1) est donnée par l'expression

$$sy - \frac{nRs}{n+2s} + (y^2 - 1) \frac{Q'}{Q} = nAe^{nx},$$

$Q(y)$  désignant le polynôme du degré  $k$ , qui est une intégrale particulière de l'équation de Legendre (12).

3. On parvient au même résultat en réduisant l'équation (12) de Legendre, par les substitutions

$$v(y) = \eta(\xi), \quad 2\xi = y + 1, \quad (16)$$

à l'équation hypergéométrique

$$\xi(1-\xi)\eta'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)\xi]\eta' - \alpha\beta\eta = 0, \quad (17)$$

où l'on a, d'après (7), (11) et (14)

$$\alpha = s, \quad \beta = s + n + 1, \quad \gamma = \frac{2s + n + 2}{2} - \frac{n^2 R}{2(2s + n)}. \quad (18)$$

Étant donné qu'une intégrale particulière de l'équation (17) est la fonction hypergéométrique même

$$\eta = F(\alpha, \beta, \gamma, \xi),$$

il s'en suit, d'après les substitutions (16), qu'une intégrale particulière de l'équation de Legendre (12) est donnée par

$$v(y) = F\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{y+1}{2}\right),$$

d'où il résulte que l'intégration générale de l'équation de la balistique (1) peut s'exprimer au moyen des fonctions hypergéométriques.

D'autre part, en désignant par  $P(\xi)$  un polynôme en  $\xi$ , il est connu<sup>4)</sup> que l'équation différentielle (17) possède une intégrale particulière de la forme

$$\begin{aligned} \eta &= P(\xi) \text{ lorsque } \alpha \text{ est un entier,} \\ \eta &= 1 - \gamma P(\xi) \text{ lorsque } \beta \text{ est un entier,} \\ \eta &= (1 - \xi)^{\gamma - \alpha - \beta} P(\xi) \text{ lorsque } \gamma - \alpha \text{ est un entier,} \\ \eta &= \xi^{1 - \gamma} (1 - \xi)^{\gamma - \alpha - \beta} P(\xi) \text{ lorsque } \gamma - \beta \text{ est entier.} \end{aligned} \quad (19)$$

En posant donc, respectivement,

$$\alpha = k, \quad \beta = k, \quad \gamma - \alpha = k, \quad \gamma - \beta = k,$$

$k$  étant un entier, on en tire pour  $s$  les expressions suivantes  $s = k, s = n - k,$

$$s = \frac{n^2(R-1) + 2nk}{2(n-2k)} = n \frac{nR - (n-2k)}{2(n-2k)}, \quad s = \frac{n^2(R+1) + 2nk}{4k+2n} = -n \frac{nR + (n+2k)}{2(n+2k)}.$$

Ces valeurs de  $s$  introduites dans la condition (15) se réduisent toujours à la condition d'intégrabilité (2) de Karamata, où  $k$  est à remplacer respectivement par

$$k, \quad -k, \quad -k \text{ et } k.$$

Ainsi les quatre conditions de l'intégrabilité de l'équation hypergéométrique (17) se réduisent à la seule condition d'intégrabilité (2) de l'équation de la balistique (1). Quant à l'intégrale de l'équation (1), dans ces cas on l'obtient moyennant les intégrales particulières (19) de l'équation (17).

#### Index bibliographique

- 1) Karamata J. — Problème N° 3. *Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. P. de Serbie*, 1, p. 72 (1949).
- 2) Forsyth-Jacobsthal, *Lehrbuch der Differentialgleichungen*, 1912, S. 221.
- 3) Kamke E. *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen*, Bd. 1, 1942, S. 22.
- 4) Goursat, *Propriétés générales de l'équation d'Euler et de Gauss*, Actualités scientifiques et industrielles, 1936, p. 6.