БИЛИНЕАРНИ ГЕНЕРАТРИСКИ ФУНКЦИИ ЗА РЕКУРЗИВНИ НИЗИ ОД ВТОР РЕД

Прилози МАНУ, Оддел. за мат.-тех. науки, X/2, 1978, 5-15

1. Увод. Познато е дека бројните низи од втор ред се потчинети на следнава рекурентна релација

$$W_{n+2} = pW_{n+1} - qW_n,$$

каде што p и q се цели броеви чиј продукт не е нула.

Земајќи за почетни услови дадени вредности, добиваме посебни бројни низи. Така имаме

$$U_{n+2} = pU_{n+1} - qU_n$$

со

$$U_0 = 0, \quad U_1 = 1,$$

за низата (U_n) и

$$V_{n+2} = pV_{n+1} - qV_n$$

со

$$V_0 = 2, \quad V_1 = p$$

за низата (V_n).

Во една поранешна работа [1] изведовме релации за генератриските функции на степените од низите (U_n) и (V_n) во облик

$$\sum_{n=0}^{\infty} W_n^k x^n, \qquad K \text{— цел број.}$$

Наша намера е во овој труд да дадеме билинеарни генератриски функции за низите (U_n) и (V_n), како и за низите (F_n) на Fibonacci и (L_n) Lucas, кои се добиваат од овие за $p = -q = 1$.

H. Gould [2] разгледува сличен проблем за низите на Fibonacci и на Lucas, со метод различен од нашиот, и не дава експлицитен резултат.

2. Некои основни релацин. Да ставиме [3]

$$p = a + b, \quad q = ab, \quad b = a - b.$$

Тогаш добиваме,

$$2a^n = V_n + \delta\, U_n,$$

$$2b^n = V_n - \delta\, U_n.$$

Оттука имаме

$$\begin{aligned} 4a^{m+n} &= V_m V_n + \Delta\, U_m U_n + \delta\,(U_m V_n + U_n V_m), \\ 4b^{m+n} &= V_m V_n + \Delta\, U_m U_n + \delta\,(U_m V_n + U_n V_m), \end{aligned} \tag{1}$$

каде што е

$$\Delta = p^2 - 4q.$$

По собирање и вадење од (1) следува

(2)
$$2\,U_{m+n} = U_m\,V_n + U_n\,V_m\,,$$
$$2\,V_{m+n} = V_m\,V_n + \Delta\,U_m\,U_n\,,$$

односно

(3)
$$2q^n\,U_{m-n} = U_m V_n - U_n V_m\,,$$
$$2q^n\,V_{m-n} = V_m V_n - \Delta\,U_m U_n\,.$$

Да земеме во (2) и (3)

$$m = r + (s-1)\,n, \qquad r, s \in N \cup \{0\}.$$

Со собирање и вадење оттука наоѓаме

$$U_{r+(s-1)n}\,V_n = U_{r+sn} + q^n\,U_{r+(s-2)n}\,,$$
$$V_{r+(s-1)n}\,U_n = U_{r+sn} - q^n\,U_{r+(s-2)n}\,,$$
$$V_{r+(s-1)n}\,V_n = V_{r+sn} + q^n\,V_{r+(s-2)n}\,,$$
$$\Delta\,U_{r+(s-1)n}\,U_n = V_{r+sn} - q^n\,V_{r+(s-2)n}\,.$$

3. Билинеарни генератриски функции за (V_n). Нека релацијата

(4)
$$V_{r+sn} = V_n\,V_{r+(s-1)n} - q^n\,V_{r+(s-2)n}\,,$$

ја помножиме со x^s и сумираме за $s = 0, 1, 2, \ldots$. Добиваме

$$\sum_{s=0}^{\infty} V_{r+sn}\,x^s = V_n\left(\sum_{s=0}^{\infty} V_{r+sn}\,x^{s+1} + V_{r-n}\right) -$$
$$- q^n\left(\sum_{s=0}^{\infty} V_{r+sn}\,x^{s+2} + V_{r-2n} + x\,V_{r-n}\right),$$

од каде следува

$$\sum_{s=0}^{\infty} V_{r+sn}\,x^s = \frac{V_n V_{r-n} - q^n\,(V_{r-2n} + x\,V_{r-n})}{1 - x\,V_n + x^2\,q^n}\,,$$

или поради

$$V_n\,V_{r-n} = V_r + q^n\,V_{r-2n}\,,$$

добиваме

(5)
$$\sum_{s=0}^{\infty} V_{r+sn}\,x^s = \frac{V_r - x\,q^n\,V_{r-n}}{1 - x\,V_n + x^2\,q^n}\,.$$

Да ја помножиме истата релација (4) напишана како

$$V_n\,V_{r+(s-1)\,n} = V_{r+sn} + q^n\,V_{r+(s-2)\,n}\,,$$

со x^n и сумираме за $n = 0, 1, 2, \ldots$. Ќе добиеме

$$\sum_{n=0}^{\infty} V_n V_{r+(s-1)\,n}\,x^n = \sum_{n=0}^{\infty} V_{r+sn}\,x^n + \sum V_{r+(s-2)\,n}\,(x\,q)^n,$$

или согласно (5)

(6)
$$\sum_{n=0}^{\infty} V_n V_{r+(s-1)n} x^n = \frac{V_r - xq^s\,V_{r-s}}{1 - xV_s + x^2\,q^s} + \frac{V_r - xq^{s-1}\,V_{r-s+2}}{1 - xq\,V_{s-2} + x^2\,q^s}\,.$$

4. Билинеарни генератраски функции за (U_n). По истиот начин од релацијата

$$\Delta\, U_n\, U_{r+(s-1)n}\, x^n = V_{r+sn} - q^n\, V_{r+(s-2)\, n}$$

наоѓаме

$$\Delta \sum_{n=0}^{\infty} U_n\, U_{r+(s-1)\, n}\, x^n = \frac{V_r - xq^s\, V_{r-s}}{1 - x\, V_s + x^2 q^s} - \tag{7}$$

$$- \frac{V_r - xq^{s-1}\, V_{r-s+2}}{1 - xq\, V_{s-2} + x^2 q^s}\, .$$

5. Генератриски функции за низата $(U_n V_m)$. Од релацијата

$$U_{r+sn} = V_n\, U_{r+(s-1)n} - q^n\, U_{r+(s-2)\, n} \tag{8}$$

по множење со x^s и собирајќи за $s = 0,\, 1,\, 2\ldots,$ добиваме

$$\sum_{s=0}^{\infty} U_{r+sn}\, x^s = V_n \left(\sum_{s=0}^{\infty} U_{r+sn}\, x^{s+1} + U_{r-n}\right) -$$

$$- q^n \left(\sum_{s=0}^{\infty} U_{r+sn}\, x^{s+2} + U_{r-2n} + x\, U_{r-n}\right)$$

од каде следува

$$\sum_{s=0}^{\infty} U_{r+sn}\, x^s = \frac{V_n\, U_{r-n} - q^n\,(U_{r-2n} + x\, U_{r-n})}{1 - x\, V_n + x^2\, q^n}$$

или поради

$$V_n\, U_{r-n} = U_r + q^n U_{r-2n}$$

се добива

$$\sum_{s=0}^{\infty} U_{r+sn}\, x^s = \frac{U_r - xq^n\, U_{r-n}}{1 - x\, V_n + x^2\, q^n}\, . \tag{9}$$

Од истата релација (8) по множење со x^n и собирање за $n=0,\, 1{,}2\ldots$ наоѓаме

$$\sum_{n=0}^{\infty} V_n\, U_{r+(s-1)\, n}\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} U_{r+sn}\, x^n + \sum_{n=0}^{\infty} U_{r+(s-2)n}\, (xq)^n$$

или согласно (9)

$$\sum_{n=0}^{\infty} V_n\, U_{r+(s-1)n}\, x^n = \frac{U_r - xq^s\, U_{r-s}}{1 - x\, V_s + x^2 q^s} + \frac{U_r - xq^{s-1}\, U_{r-s+2}}{1 - xq\, V_{s-2} + x^2\, q^s}\, . \tag{10}$$

Слично наоѓаме

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n V_{r+(s-1)\, n}\, x^n = \frac{U_r - xq^s\, U_{r-s}}{1 - x\, V_s + x^2\, q^s} - \frac{U_r - xq^{s-1}\, U_{r-s+2}}{1 - xq\, V_{s-2} + x^2\, q^s}\, . \tag{11}$$

6. Посебни случаи. 1°. Ако земеме $s = 2$ од (6) и (7), добиваме

$$\sum_{n=0}^{\infty} V_n V_{n+r} x^n = \frac{V_r - xq^2 V_{r-2}}{1 - x V_2 + (xq)^2} + \frac{V_r}{1-xq} \tag{12}$$

и

$$\Delta \sum_{n=0}^{\infty} U_n U_{n+r} x^n = \frac{V_r - xq^2 V_{r-2}}{1 - x V_2 + (xq)^2} - \frac{V_r}{1-xq} \tag{13}$$

и исто така од (10) и (11) наоѓаме

$$\sum_{n=0}^{\infty} V_n U_{n+r} x^n = \frac{U_r - xq^2 U_{r-2}}{1 - x V_2 + (xq)^2} + \frac{U_r}{1-xq} \tag{14}$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n V_{n+r} x^n = \frac{U_r - xq^2 U_{r-2}}{1 - x V_2 + (xq)^2} - \frac{U_r}{1-xq}. \tag{15}$$

2°. Да земеме $r = 0$. За генератриските функции од квадратите на бројните низи (U_n) и (V_n) наоѓаме

$$\sum_{n=0}^{\infty} V_n^2 x^n = \frac{2 - x V_2}{1 - x V_2 + (xq)^2} + \frac{2}{1-xq}$$

и

$$\Delta \sum_{n=0}^{\infty} U_n^2 x^n = \frac{2 - x V_2}{1 - x V_2 + (xq)^2} - \frac{2}{1-xq},$$

имајќи предвид дека е

$$q^n V_{-n} = V_n.$$

Слично имаме

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n V_n x^n = \frac{x U_2}{1 - x V_2 + (xq)^2}$$

каде што земаме

$$q^n U_{-n} = - U_n.$$

7. Билинеарни генератриски функции за низите (F_n) и (L_n). Да земеме

$$p = - q = 1.$$

Знаеме дека во тој случај се добиваат низата на Fibonacci определена со релацијата

$$F_{n+r} = F_{n+1} + F_n$$

и $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, и низата на Lucas, определена со

$$L_{n+r} = L_{n+1} + L_n,$$

каде што е

$$L_0 = 2, \quad L_1 = 1.$$

Ако ги внесеме овие вредности за p и q во (6) и (7), добиваме

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n L_{r+(s-1)n} x^n = \frac{L_r - (-1)^s x L_{r-s}}{1 - x L_s + (-1)^s x^2} + \frac{L_r + (-1)^s x L_{r-s+2}}{1 + x L_{s-2} + (-1)^s x^2}$$

и

$$5\sum_{n=0}^{\infty} F_n F_{r+(s-1)n} x^n = \frac{L_r-(-1)^s x L_{r-s}}{1-xL_s+(-1)^s x^2} - \frac{L_r+(-1)^s x L_{r-s+2}}{1+xL_{s-2}+(-1)^s x^2}.$$

Од (10) наоѓаме

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n F_{r+(s-1)n} x^n = \frac{F_r-(-1)^s x F_{r-s}}{1-xL_s+(-1)^s x^2} + \frac{F_r+(-1)^s x F_{r-s+2}}{1+xL_{s-2}+(-1)^s x^2},$$

а од (11)

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n L_{r+(s-1)n} x^n = \frac{F_r-(-1)^s x F_{r-s}}{1-xL_s+(-1)^s x^2} - \frac{F_r+(-1)^s x F_{r-s+2}}{1+xL_{s-2}+(-1)^s x^2}.$$

8. Посебни случаи за (F_n) и (L_n). Ако е $s=2$, добиваме од (12)

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n L_{n+r} x^r = \frac{L_r-xL_{r-2}}{1-3x+x^2} + \frac{L_r}{1+x}$$

и од (13)

$$5\sum_{n=0}^{\infty} F_n F_{n+r} = \frac{L_r-xL_{r-2}}{1-3x+x^2} - \frac{L_r}{1+x},$$

како и од (14)

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n F_{n+r} x^n = \frac{F_r-xF_{r-2}}{1-3x+x^2} + \frac{F_r}{1+x},$$

односно (15)

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n L_{n+r} x^n = \frac{F_r-xF_{r-2}}{1-3x+x^2} - \frac{F_r}{1+x}.$$

Земеме ли $r=0$, добиваме

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^2 x^n = \frac{2-3x}{1-3x+x^2} + \frac{2}{1+x} = \frac{4-7x-x^2}{1-2x-2x^2+x^3},$$

односно

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n^2 x^n = \frac{2-3x}{1-3x+x^2} - \frac{2}{1+x} = \frac{x-x^2}{1-2x-2x^2+x^3},$$

како и

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n F_n x^n = \frac{x}{1-3x+x^2}.$$

9. Обопштување. Погоре дадената постапка дава можност да се дадат поопшти резултати, т. е. да се изведат трилинеарни генератриски функции за разгледаните низи, т. е. генератриски функции за продукт од повеќе такви низи. Ова, од своја страна, овозможува да ги добиеме генератриските функции за степените од тие низи.

1°. Од релацијата

$$V_n V_{r+n} = V_{r+2n} + q^n V_r$$

по множење со V_{s+r+2n}, врз основа на истата релација, добиваме

$$
\tag{16}
\begin{aligned}
V_n V_{r+n} V_{r+s+2n} = V_{s+2(r+2n)} + q^{r+2n} V_s + \\
+ q^n V_{s+2(r+n)} + q^{r+n} V_{s+2n}\,.
\end{aligned}
$$

Множејќи ја левата и десната страна на последната релација со x^n и собирајќи за $n = 0, 1, 2 \ldots$, имаме

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} V_n V_{r+n} V_{s+r+2n} x^n = \frac{V_{s+2r} - xq^4 V_{s+2r-4}}{1 - x V_4 + x^2 q^4} + \frac{V_{s+2r} - xq^3 V_{s+2r-2}}{1 - xq V_2 + x^2 x^4} + \\
+ \frac{V_s - xq^3 V_{s-2}}{1 - xq V_2 + x^2 q^4} q^r + \frac{q^r V_s}{1 - xq^2}\,.
\end{aligned}
$$

2°. На сличен начин за низите (U_n) од

$$\Delta U_n U_{n+r} = V_{r+2n} - q^n V_r$$

по множење со U_{s+2n} врз основа на релацијата

$$V_n U_{r+n} = U_{r+2n} + q^n U_r$$

добиваме

$$
\tag{17}
\begin{aligned}
\Delta U_n U_{r+n} U_{s+2n} = U_{s+r+4n} + q^{r+2n} U_{s-r} - \\
- q^n U_{s+r+2n} - q^{r+n} U_{s-r+2n}\,.
\end{aligned}
$$

Оттука по множење со x^n и собирање за $n = 0, 1, 2 \ldots$ наоѓаме

$$
\begin{aligned}
\Delta \sum_{n=0}^{\infty} U_n U_{n+r} U_{s+2n} x^n = \frac{U_{s+r} - xq^4 U_{s+r-4}}{1 - x V_4 + x^2 q^4} - \frac{U_{s+r} - xq^3 U_{s+r-2}}{1 - xq V_2 + x^2 q^4} \\
- \frac{U_{s-r} - xq^3 U_{s-r-2}}{1 - xq V_2 + x^2 q^4} q^r + \frac{U_{s-r}}{1 - xq^2} q^r.
\end{aligned}
$$

3°. За мешан продукт на три члена од низите (U_n) и (V_n) ќе имаме

$$
\begin{aligned}
V_n V_{r+n} U_{s+2n} = U_{s+r+4n} + q^{r+2n} U_{s-r} + \\
+ q^n U_{s+r+2n} + q^{r+n} U_{s-r+2n}
\end{aligned}
$$

од каде следува по множење со x^n и собирање за $n = 0, 1, 2 \ldots$

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} V_n V_{r+n} U_{s+2n} x^n = \frac{U_{s+r} - xq^4 U_{s+r-4}}{1 - x V_4 + x^2 q^4} + \frac{U_{s+r} - xq^3 U_{s+r-2}}{1 - xq V_2 + x^2 q^4} \\
+ \frac{U_{s-r} - xq^3 U_{s-r-2}}{1 - xq V_2 + x^2 q^4} q^r + \frac{U_{s-r}}{1 - xq^2} q^r.
\end{aligned}
$$

За производот $U_n U_{n+r} V_{s+2n}$ ќе имаме

$$\Delta U_n U_{n+r} V_{s+2n} = V_{r+s+4n} + q^{r+2n} V_{s-r} - q^n V_{s+r+2n} - q^{r+n} V_{s-r+2n}\,,$$

од каде се добива

$$
\begin{aligned}
\Delta \sum_{n=0}^{\infty} U_n U_{r+n} V_{s+2n} x^n = \frac{V_{r+s} - xq^4 V_{s+r-4}}{1 - x V_4 + x^2 q^4} - \frac{V_{r+s} - xq^3 V_{s+r-2}}{1 - xq V_2 + x^2 q^4} - \\
- \frac{V_{s-r} - xq^3 V_{s-r-2}}{1 - xq V_2 + x^2 q^4} q^r + \frac{V_{s-r}}{1 - xq^2} q^r.
\end{aligned}
$$

4°. Ако земеме $r = 0$, $s = -n$, од (16) наоѓаме

(18)
$$V_n^3 = V_{3n} + 3q^n V_n,$$

па следува:

$$\sum_{n=0}^{\infty} V_n^3 x^n = \frac{2 - V_3 x}{1 - xV_3 + q^3 x^2} + 3\frac{2 - xq V_1}{1 - xq V_1 + q^3 x^2}.$$

Слично, од

$$\Delta U_n^3 = U_{3n} - 3q^n U_n$$

наоѓаме:

$$\Delta \sum_{n=0}^{\infty} U_n^3 x^n = \frac{U_3 x}{1 - x V_3 + q^3 x^2} - 3\frac{U_1 xq}{1 - xqV_1 + q^3 x^2}.$$

За мешаниот продукт

$$\Delta U_n^2 V_n = V_{3n} - V_n q^n,$$

наоѓаме

$$\Delta \sum_{n=0}^{\infty} U_n^3 V_n x^n = \frac{2 - x V_3}{1 - x V_3 + x^2 q^3} - \frac{2 - V_1 xq}{1 - xq V_1 + x^2 q^3},$$

односно,

$$\sum_{n=0}^{\infty} V_n^2 U_n x^n = \frac{U_3 x}{1 - x V_3 + x^2 q^3} + \frac{xq U_1}{1 - xq V_1 + x^2 q^3}.$$

10. Обопштувања за (F_n) и (L_n). 1°. За низите на Fibonacci и Lucas ќе имаме

$$L_n L_{n+r} L_{n+s} = L_{r+s+3n} + (-1)^r L_{s-r-n}$$
$$+ (-1)^n L_{s+r+n} + (-1)^{r+n} L_{s-r+n}$$

од каде се добива

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n L_{n+r} L_{n+s} x^n = \frac{L_{s+r-n} - x L_{s+r-n-4}}{1 - 7x + x^2} + \frac{L_{s+r-n} + x L_{s+r-n-2}}{1 + 3x + x^2} +$$
$$+ (-1)^r \frac{L_{s-r-n} + x L_{s-r-n-2}}{1 + 3x + x^2} + (-1)^r \frac{L_{s-r-n}}{1 - x}.$$

Слично ќе имаме

$$5 F_n F_{n+r} F_{n+s} = F_{r+s+3n} + (-1)^r F_{s-r-n} +$$
$$+ (-1)^n F_{s+r+n} - (-1)^{n+r} F_{s-r+n}$$

од каде наоѓаме

$$5 \sum_{n=0}^{\infty} F_n F_{n+r} F_{n+s} x^n = \frac{F_{s+r-n} - x F_{s+r-n-4}}{1 - 7x + x^2} - \frac{F_{s+r-n} + x F_{s+r-n-2}}{1 + 3x + x^2} -$$
$$- (-1)^r \frac{F_{s-r-n} + x F_{s-r-n-2}}{1 + 3x + x^2} + (-1)^r \frac{F_{s-r-n}}{1 - x}.$$

2°. Ако ставиме $r = s = 0$, добиваме од (18)

$$L_n^3 = L_{3n} + (-1)^n 3 L_n,$$

од каде е

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^3 x^n = 2\frac{1-2x}{1-4x-x^2} + 3\frac{2+x}{1+x-x^2},$$

а од

$$5F_n^3 = F_{3n} - (-1)^n 3F_n,$$

имаме

$$5\sum_{n=0}^{\infty} F_n^3 x^n = \frac{2x}{1-2x-x^2} + \frac{3x}{1+x-x^2}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Blagoj S. Popov*, Generating Functions for Powers of Certain Second-order Recurrence Sequences. The Fibonacci Quarterly V. 15 (1977), pp. 221—224.

2. *H. W. Gould*, Generating Functions for Product of Powers of Fibonacci Numbers, The Fibonacci Quarterly, V. 1 (1963) pp. 1—16.

3. *E. Lucas*, Theorie des nombres, Paris, 1891.

4. *J. Riordan*, Generating Functions for Powers of Fibonacci Numbers, Duke. Math. J., V. 29 (1962), p. p. 5—12.

5. *L. Carlitz*, Generating Functions for Powers of Certain Sequences of Numbers, Duke. Math. J., V. 29 (1965), pp. 437—446.

6. *A. F. Horadam*, Generating Functions for Powers of Certain Generalised Sequences of Numbers, Duke. Math. J., V. 32 (1965), pp. 437—446.

SUMMARY

BILINEAR GENERATING FUNCTIONS
OF CERTAIN SEQUENCES OF NUMBERS

The object of this paper is to give some so-called bilinear generating functions concerning the second-order recurrence sequences (U_n) and (V_n) defined by

$$U_{n+r} = pU_{n+1} - qU_n, \quad U_0 = 0, \quad U_1 = 1,$$

and

$$V_{n+2} = pV_{n+1} - qV_n, \quad V_0 = 2, \quad V_1 = 1,$$

where p and q are integer.

Following a method established earlier [1] we find

$$1^\circ \quad \sum_{n=0} V_{r+sn} x^s = \frac{V_r - xq^n V_{r-n}}{1 - xV_n + x^2 q^n}$$

$$2^\circ \quad \sum_{n=0} V_n V_{r+(s-1)n} x^n = \sum_{k=0}^{1} \frac{V_r - xq^{s-k} V_{r-s+rk}}{1 - xq^k V_{s-2k} + x^r q^s}, \quad r, s = N \cup \{0\}$$

$$3^\circ \quad \sum_{n=0} V_n U_{r+(s-1)n} x^n = \sum_{k=0}^{1} \frac{U_r - xq^{s-k} U_{r-s+2p}}{1 - xq^k V_{s-2k} + x^2 q^s}$$

$$4^\circ \quad \sum_{n=0} V_n V_{r+n} V_{s+2n} x^n = \sum_{k=0}^{1} \left(\frac{V_{s+r} - xq^{4-k} V_{s+r-4+k}}{1 - xq^k V_{4+2k} + x^2 q^4} + \frac{V_s - xq^{2+k} V_{s-2k}}{1 - xq^{r-h} V_{2k} + x^2 q^4} \right).$$

Some formulas analogous for the sequences (U_n) are given too.

The special cases, the Fibonacci (F_n) and the Lucas (L_n) sequences are considered too.