СУМИ ОД СТЕПЕНИ НА НЕКОИ НИЗИ ОД БРОЕВИ

Год. Збор. Матем. Фак. Скопје, 29(9-10) (1978), 9-19

За бројни низи од видот $u_n = pu_{n-1} - qu_{n-2}$ се даваат релации, кои се однесуваат за конечни суми од нивните степени.

1. Увод. Во теоријата на рекурзивните низи од втор ред, две основни низи се на Fibonacci (F_n) и на Lucas (L_n) определени со $F = F_{n-1} + F_{n-2}$ и $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, односно со $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ и $L_0 = 2$, $L_1 = 1$.

Класичните проширувања на овие низи се определени со:

$$(U_n) \qquad U_n = pU_{n-1} - q\,U_{n-2}, \qquad U_0 = 0,\ U_1 = 1,$$

и

$$(V_n) \qquad V_n = pU_{n-1} - qV_{n-2}, \qquad V_0 = 2,\ V_1 = p,$$

каде што $\Delta = p^2 - 4q \neq 0$.

Постојат и други проширувања на низите (F_n) и (L_n).

Својствата на низите (U_n) и (V_n) се изучени во бројни трудови [1], [2], [3].

Нашиот интерес во овој труд ќе биде да дадеме некои релации, кои се однесуваат за сумите од степените на тие низи.

2. Суми од степени на низата (U_u). Познато е дека [1]

$$\Delta^{\left[\frac{k}{2}\right]} U_n^k = \sum_{r=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} (-1)^r C_k^r q^{rn} W_{(k-2r)n} \tag{1}$$

каде што е

$$W_{kn} = \tilde{V}_{kn}, \text{ ако е } k \text{ парен број,}$$

односно

$$W_{kn} = U_{kn}, \text{ ако е } k \text{ непарен број}$$

и

$$\tilde{V}_n = \begin{cases} V_n, & n \neq 0 \\ \frac{1}{2} V_n, & n = 0. \end{cases}$$

Според тоа имаме

$$\Delta^k U_n^{2k} = \sum_{r=0}^{k} (-1)^r C_{2k}^r q^{rn} \tilde{V}_{2(k-r)n}\,.$$

Оттука се добива

$$\Delta^k \sum_{s=1}^{m} \frac{U_{sn}^{2k}}{q^{snk}} = \sum_{s=1}^{m} \sum_{r=0}^{k} (-1)^r C_{2k}^r q^{sn(r-k)} \tilde{V}_{2(k-r)sn}$$

$$= \sum_{r=0}^{k} (-1)^r C_{2k}^r \sum_{s=1}^{m} q^{sn(r-k)} \tilde{V}_{2(k-r)sn}\,.$$

Поради

$$\sum_{r=0}^{n} q^{-rk} V_{m+2rk} = q^{-nk} \frac{U_{(n+1)k}}{U_k} V_{m+nk}. \tag{2}$$

наоѓаме

$$\Delta^k \sum_{s=1}^{m} \frac{U_{sn}^{2k}}{q^{skn}} = (-1)^k m\, C_{2k}^k + \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^r C_{2k}^r \left(\frac{U_{n(k-r)(m+1)}}{q^{(k-r)mn}} \frac{V_{(k-r)mn}}{U_{(k-r)n}} - V_0 \right).$$

Бидејќи

$$U_{n+2r} = V_r\, U_{n+r} - q^r U_n \tag{3}$$

за сумата од степените на низата (U_n) ќе имаме

$$\Delta^k \sum_{s=1}^{m} \frac{U_{sn}^{2k}}{q^{snk}} = (-1)^k \left(m + \frac{1}{2}\right) C_{2k}^k + \sum_{r=1}^{k} (-1)^{k-r} C_{2k}^{k-r} \frac{U_{rn\,(2m+1)}}{q^{rmn}\, U_{rn}}. \tag{4}$$

Оттука лесно се наоѓа

$$\Delta^k \sum_{s=1}^{m} \frac{U_{(2s-1)n}^{2k}}{q^{(2s-1)kn}} = (-1)^k\, m\, C_{2k}^k + \sum_{r=1}^{k} (-1)^{k-r} C_{2k}^{k-r} \frac{U_{4rmn}}{q^{rn(2m-1)}\, U_{2rn}}. \tag{5}$$

Посебно, ако е $k = 1$, од (4) добиваме

$$\Delta \sum_{s=1}^{m} \frac{U_{sn}^2}{q^{sn}} = \frac{U_{(2m+1)n}}{q^{mn}\, U_n} - 2m - 1,$$

а од (5)

$$\Delta \sum_{s=1}^{m} \frac{U_{(2s-1)\,n}}{q^{(2\;-1)\,n}} = \frac{U_{4mn}}{q^{(2m-1)\,n}\; U_{2n}} - 2m.$$

За сумата од непарни степени, според (1), ќе имаме

$$\Delta^k\, U_{2n}^{2k+1} = \sum_{r=0}^{k} (-1)^r\, C_{2k+1}^r\, q^{2rn}\, U_{2(2k-2r+1)\,n},$$

од каде што

$$\begin{aligned} \Delta^k \sum_{s=1}^{m} \frac{U_{2sn}^{2k+1}}{q^{sn(2k+1)}} &= \sum_{s=1}^{m} \sum_{r=0}^{k} (-1)^r\, C_{2k+1}^r\, q^{sn(2r-2k+1)}\, U_{2(2k-2r+1)sn} = \\ &= \sum_{r=0}^{k} (-1)^{k-r}\, C_{2k+1}^{k-r} \sum_{s=1}^{m} q^{(1-2r)\,sn}\, U_{2(2r+1)sn}. \end{aligned} \tag{6}$$

Поради (2) од (5) наоѓаме

$$\Delta^k \sum_{s=1}^{m} \frac{U_{2sn}^{2k+1}}{q^{sn(2k+1)}} = \sum_{r=0}^{k} (-1)^{k-r}\, C_{2k+1}^{k-r} \frac{U_{n\,(2r+1)\,(m+1)}\, U_{(2r+1)mn}}{q^{(2r+1)mn}\, U_{(2r+1)\,n}}.$$

Посебно ако $k = 1$ добиваме

$$\Delta \sum_{s=1}^{m} \frac{U_{2sn}^3}{q^{3sn}} = \frac{U_{3(m+1)n}\, U_{3mn}}{q^{3mn}\, U_{3n}} - 3\, \frac{U_{(m+1)\,n}\, U_{mn}}{q^{mn}\, U_n}.$$

3. Суми од степени на низата (V_n). За степенот на V_n изразен како сума од членови на низата (V_n) чии индекси се повеќекратни на n имаме

$$V_n^k = \sum_{r=0}^{[k/2]} C_k^r\, q^{rn}\; \tilde{V}_{(k-2r)\,n}. \tag{7}$$

Според тоа

$$V_{sn}^{2k} = \sum_{r=0}^{k} C_{2k}^r\, q^{rsn}\, \tilde{V}_{2(k-r)\,sn}.$$

Да ја образуваме сумата

$$(8) \qquad \sum_{s=1}^{m} \frac{V_{sn}^{2k}}{q^{snk}} = \sum_{s=1}^{m} \sum_{r=0}^{k} C_{2k}^{k-r} q^{-rsn} \tilde{V}_{2rsn} =$$

$$= \sum_{s=1}^{m} C_{2k}^{k-r} \sum_{r=0}^{k} q^{-rsn} V_{2rsn} .$$

Поради (2) добиваме

$$\sum_{s=1}^{m} \frac{V_{sn}^{2k}}{q^{snk}} = m C_{2k}^{k} + \sum_{r=1}^{k} C_{2k}^{k-r} \left(\frac{U_{(m+1)nr} V_{mnr}}{q^{mnr} U_{nr}} - 2 \right) .$$

Земајќи предвид (3) наоѓаме за сумата од степените на низата (V_n)

$$(9) \qquad \sum_{s=1}^{m} \frac{V_{sn}^{2k}}{q^{snk}} = \left(m + \frac{1}{2} \right) C_{2k}^{k} - 2^{2k-1} + \sum_{r=1}^{k} C_{2k}^{k-r} \frac{U_{(2m+1)nr}}{q^{rmn} U_{rn}} .$$

Оттука лесно се наоѓа

$$(10) \qquad \sum_{s=1}^{m} \frac{V_{(2s-1)n}^{2k}}{q^{(2s-1)nk}} = m C_{2k}^{k} + \sum_{r=1}^{k} C_{2k}^{k-r} \frac{U_{4rmn}}{q^{(2m-1)rn} U_{2rn}} .$$

Посебно, ако е $k = 1$ ќе имаме од (9)

$$\sum_{s=1}^{m} \frac{V_{sn}^{2}}{q^{sn}} = 2 m - 1 + \frac{U_{(2m+1) n}}{q^{mn} U_{n}}$$

а од (10) добиваме

$$\sum_{s=1}^{m} \frac{V_{(2s-1)n}^{2}}{q^{(2s-1)n}} = 2m + \frac{U_{4mn}}{q^{(2m-1)n} U_{2n}} .$$

За непарни степени од (7) наоѓаме

$$V_{2n}^{2k+1} = \sum_{r=0}^{k} C_{2k+1}^{r} q^{2rn} V_{2(2k-2r+1)n} .$$

Да ја образуваме сумата

$$\sum_{s=1}^{m} \frac{V_{2sn}^{2k+1}}{q^{sn(2k+1)}} = \sum_{s=1}^{m} \sum_{r=0}^{k} C_{2k+1}^{k-r} q^{-sn(2r+1)} V_{2(2r+1)sn}$$

$$= \sum_{r=0}^{k} C_{2k+1}^{k-r} \sum_{s=1}^{m} q^{-sn(2r+1)} U_{2(2r+1)sn} .$$

Поради (2) имаме

$$(11) \qquad \sum_{s=1}^{m} \frac{V_{2sn}^{2k+1}}{q^{sn(2k+1)}} = \sum_{r=0}^{k} C_{2k+1}^{k-r} \left(\frac{U_{n(2r+1)(m+1)} V_{(2r+1)mn}}{q^{(2r+1)mn} U_{(2r+1)n}} - 2 \right)$$

$$= \sum_{r=0}^{k} C_{2k+1}^{k-r} \frac{U_{n(2r+1)(m+1)}}{q^{(2r+1)mn} U_{(2r+1)n}} - 2^{2k} .$$

Посебно ако е $k = 0$ имаме

$$\sum_{s=1}^{m} \frac{V_{2sn}}{q^{sn}} = \frac{U_{(2m-1)n}}{q^{mn} U_n} - 1.$$

За $k = 1$, наоѓаме

$$\sum_{s=1}^{m} \frac{V_{2sn}^3}{q^{3sn}} = 3 \frac{U_{(2m+1)n}}{q^{mn} U_n} + \frac{U_{3(2m+1)n}}{q^{3mn} U_{3n}} + 4.$$

4. Збир и разлика од суми на степени. Од (4) и (9) добиваме

$$\sum_{s=1}^{m} \frac{V_{sn}^{2k} \pm \Delta^k U_{sn}^{2k}}{q^{snk}} = (1 \pm (-1)^k)\left(m + \frac{1}{2}\right) C_{2k}^k - 2^{2k-1} +$$

$$+ \sum_{r=1}^{k} (1 \pm (-1)^{k-r}) \ C_{2k}^{k-r} \frac{U_{(2m+1)nr}}{q^{rmn} U_{rn}}.$$

Посебно, ако е $k = 1$ имаме

$$\sum_{s=1}^{m} \frac{V_{sn}^2 \pm \Delta U_{sn}^2}{q^{sn}} = \begin{cases} -2 + \dfrac{U_{(2m+1)n}}{q^{mn} U_n}, \\ 4m. \end{cases}$$

Слично од (5) и (10) добиваме

$$\sum_{s=1}^{m} \frac{V_{(2s-1)n}^{2k} \pm \Delta^k U_{(2s-1)n}^{2k}}{q^{(2s-1)kn}} = (1 \pm (-1)^k)\, m\, C_{2k}^k +$$

$$+ \sum_{r=1}^{k} (1 \pm (-1)^{k-r}) \ C_{2k}^{k-r} \frac{U_{4rmn}}{q^{(2m-1)rn} U_{2rn}},$$

и за $k = 1$ следува

$$\sum_{s=1}^{m} \frac{V_{(2s-1)n}^2 \pm \Delta U_{(2s-1)n}^2}{q^{(2s-1)n}} = \begin{cases} \dfrac{2U_{4mn}}{q^{(2m-1)n} U_{2n}}, \\ 4m. \end{cases}$$

5. Суми од степени на сукцесивни членови од (U_n). Од

$$\Delta^k \sum_{s=1}^{m} \frac{U_{sn}^{2k}}{q^{snk}} = (-1)^k \left(m + \frac{1}{2}\right) C_{2k}^k + \sum_{r=1}^{k} (-1)^{k-r} C_{2k}^{k-r} \frac{U_{(2m+1)rn}}{q^{rmn} U_{rn}},$$

наоѓаме

$$(12) \quad \Delta^k \sum_{r=m-s}^{m+s} \frac{U_{rn}^{2k}}{q^{rnk}} = (-1)^k (2s+1)\, C_{2k}^k + \sum_{r=1}^{k} (-1)^{k-r} C_{2k}^{k-r} \frac{V_{2rmn} U_{(2s+1)rn}}{q^{(m+s)nr} U_{rn}}$$

Забележуваме дека

$$\frac{U_{(2s+1)rn}}{U_{nr}} = \sum_{r=0}^{s} \tilde{V}_{2rkn}\, q^{rkn}.$$

За $s = 1$ од (12) ќе имаме

$$\Delta^k \left(\frac{U_{(m-1)n}^{2k}}{q^{(m-1)nk}} + \frac{U_{nm}^{2k}}{q^{mnk}} + \frac{U_{(m+1)n}^{2k}}{q^{(m+1)nk}} \right) = (-1)^k \ 3C_{2k}^k +$$

$$+ \sum_{r=1}^{k} (-1)^{k-r} \ C_{2k}^{k-r} \frac{V_{2rmn} U_{3nr}}{q^{rmn} U_{rn}},$$

или земајќи предвид дека

$$(13) \qquad \frac{U_{3nr}}{U_{nr}} = V_{2nr} + q^{nr}$$

наоѓаме

$$\Delta^k (q^{nk} U^{2k}_{(m-1)n} + U^{2k}_{mn} + q^{-nk} U^{2k}_{(m+1)n}) = (-1)^k 3C^k_{2k} q^{mnk} +$$

$$+ \sum_{r=1}^{k} (-1)^{k-r} C^{k-r}_{2k} q^{(k-r)mn} V_{2mnr} (V_{2nr} + q^{rn}).$$

Слично од (12) добиваме

$$\Delta^k \sum_{r=m-s+1}^{m} \frac{U^{2k}_{(2r-1)n}}{q^{(2r-1)kn}} = (-1)^k s C^k_{2k} + \sum_{r=1}^{k} (-1)^{k-r} C^{k-r}_{2k} \frac{U_{2rsn} V_{2(2m-s)nr}}{q^{(2m-1)\cdot n} U_{2rn}},$$

од каде за $s = 3$ имаме

$$\Delta^k (q^{4nk} U^{2k}_{(2m-3)n} + q^{2nk} U^{2k}_{(2m-1)n} + U^{2k}_{(2m+1)n}) = (-1)^k 3 C^k_{2k} q^{(2m+1)nk} +$$

$$+ \sum_{r=1}^{k} (-1)^{k-r} C^{k-r}_{2k} \frac{U_{6nr} V_{2(2m-1)nr}}{q^{n(2m+1)(k-r)} U_{2rn}}.$$

6. Суми од степени на сукцесивни членови од ($\mathbf{V_n}$). Од (9) наоѓаме

$$\sum_{r=m-s}^{m+s} \frac{V^{2k}_{rn}}{q^{rnk}} = (2s+1) C^k_{2k} + \sum_{r=1}^{k} C^{k-r}_{2k} \frac{V_{2rmn} U_{(2s+1)nr}}{q^{(m+s)nr} U_{rn}}.$$

Оттука за $s = 1$ наоѓаме

$$\frac{V^{2k}_{(m-1)k}}{q^{(m-1)nk}} + \frac{V^{2k}_{mn}}{q^{mnk}} + \frac{V^{2k}_{(m+1)n}}{q^{(m+1)nk}} = 3C^k_{2k} + \sum_{r=1}^{k} C^{k-r}_{2k} q^{-(m+1)nr} V_{2rmn}(V_{2rn}+q^{rn}).$$

Од (11) ќе имаме

$$\sum_{r=m-s}^{m+s} \frac{V^{2k+1}_{2rn}}{q^{(2k+1)rn}} = \sum_{r=0}^{k} C^{k-r}_{2k+1} \frac{U_{(2r+1)(2s+1)n} V_{2(2r+1)nm}}{q^{(2r+1)(s+m)n} U_{(2r+1)n}},$$

и за $s = 1$ следува дека

$$q^{2(2k+1)n} V^{2k+1}_{2(m-1)n} + q^{(2k+1)n} V^{2k+1}_{2mn} + V^{2k+1}_{2(m+1)n} =$$

$$= \sum_{r=0}^{k} C^{k-r}_{2k+1} \frac{U_{3n(2r+1)} V_{2(2r+1)mn}}{q^{2(r-k)(m+1)n} U_{(2r+1)n}}.$$

7. Степени од $\mathbf{U_n}$ и $\mathbf{V_n}$. Од (4) за $n = 1$ наоѓаме

$$(14) \qquad \Delta^k U^{2k}_n = (-1)^k \frac{3}{2} C^k_{2k} q^{nk} + \sum_{r=1}^{k} (-1)^k C^{k-r}_{2k} q^{n(k-r)} \frac{U_{3nr}}{U_{rn}}.$$

Поради (13) и

$$V_{2rn} = \Delta U_{nr-s} U_{rn+s} + q^{rn-s} V_{2s}, \qquad s = 0, 1, 2, \ldots,$$

од (14) ќе имаме

$$\Delta^k U_n^{2k} = (-1)^k \frac{3}{2} C_{2k}^k q^{kn} +$$

$$+ \sum_{r=1}^{k} (-1)^{k-r} C_{2k}^{k-r} (\Delta U_{rn+s} U_{rn-s} q^{n(k-r)} + q^{kn-s} V_{2s} + q^{kn}),$$

или

$$\Delta^k U_n^{2k} = (-1)^k \left(1 - \frac{q^s}{2} V_{2s}\right) C_{2k}^k q^{nk} + \tag{15}$$

$$+ \Delta \sum_{r=1}^{k} (-1)^{k-r} C_{2k}^{k-r} q^{n(k-r)} U_{nr-s} U_{nr+s}.$$

Поради произволноста на s, да земеме $s = 0$. Добиваме

$$\Delta^{k-1} U_n^{2k} = \sum_{r=1}^{k} (-1)^{k-r} C_{2k}^{k-r} q^{(k-r)n} U_{rn}^2.$$

Слично, од (9) за $m = 1$ ќе имаме

(16)

$$V_n^{2k} = \left(\frac{3}{2} C_{2k}^k - 2^{2k-1}\right) q^{nk} + \sum_{r=1}^{k} C_{2k}^{k-r} q^{(k-r)n} \frac{U_{3rn}}{U_{rn}} =$$

$$= \left(\frac{3}{2} C_{2k}^k - 2^{2k-1}\right) q^{nk} + \sum_{r=1}^{k} C_{2k}^{k-r} q^{(k-r)n} (V_{2rn} + q^{rn}).$$

Поради

$$V_{2nr} = V_{rn+s} V_{rn-s} - q^{rn-s} V_{2s}, \qquad s = 0, 1, 2, \ldots$$

Од (16) наоѓаме

(17)

$$V_n^{2k} = \left(1 + \frac{q^{-s}}{2} V_{2s}\right) C_{2k}^k q^{nk} - 2^{2k-1} q^{-s} V_{2s} +$$

$$+ \sum_{r=1}^{k} C_{2k}^{k-r} q^{(k-r)n} V_{rn-s} V_{rn+s}.$$

Земајќи $s = 0$, добиваме

$$V_n^{2k} = 2C_{2k}^k q^{nk} - 2^{2k} q^{nk} + \sum_{r=1}^{k} C_{2k}^{k-r} q^{n(k-r)} V_{rn}^2.$$

8. Некои додатни релации. Да земеме во (15) $n = 1$. Добиваме

$$\Delta \sum_{r=1}^{k} (-1)^{k-r} C_{2k}^{k-r} q^{-r} U_{r-s} U_{r+s} =$$

$$= (-1)^k \left(\frac{q^s}{2} V_{2s} - 1\right) C_{2k}^k + (\Delta q^{-1})^k, \qquad s = 0, 1, 2, \ldots$$

Ако е $s = 0$, ќе имаме

$$\Delta \sum_{r=1}^{k} (-1)^{k-r} C_{2k}^{k-r} q^{-r} U_r^2 = (\Delta q^{-1})^k.$$

Од (17) за $n = 1$ наоѓаме

$$\sum_{r=1}^{k} C_{2k}^{k-r} q^{-r} V_{r-s} V_{r+s} = 2^{2k-1} q^{-s} V_{2s} - \left(1 + \frac{q^{-s}}{2} V_{2s}\right) C_{2k}^k + (p^2 q^{-1})^k.$$

Ако е $s = 0$, добиваме

$$\sum_{r=1}^{k} C_{2k}^{k-r} q^{-r} V_r^2 = 2^{2k} - 2C_{2k}^{k} + (p^2 q^{-1})^k.$$

Од (15) за $n = 2$ при $s = 0$ имаме

$$\Delta \sum_{r=1}^{k} (-1)^{k-r} C_{2k}^{k-r} q^{2(k-r)} U_{2r}^2 = (\Delta p^2)^k.$$

БИБЛИОГРАФИЈА

[1] E. Lucas: Theorie des nombres, Paris, 1891.

[2] A. F. Horadam: Generating Functions for Powers of Certain Generalised Sequences of Numbers, Duke Math. J. Vol. 32 (1965), pp. 437—446.

[3] B. S. Popov: Generating Functions for Powers of Certain Second-order Recurrence Sequences, The Fibonacci Quarterly, Vol. 13, N. 3 (1977). pp. 221—224.

SUMS OF POWERS OF CERTAIN SEQUENCES OF NUMBERS

Summary

The object of this paper is to give some relations concerning the sums of powers of the sequences defined by

(U_n) $\quad U_n = pU_{n-1} - qU_{n-2}, \quad U_0 = 0, \quad U_1 = 1,$

and

(V_n) $\quad V_n = pV_{n-1} - qV_{n-2}; \quad V_0 = 2, \quad V_1 = p,$

with $\Delta = p^2 - 4q \neq 0$

1. We find

$$\Delta^k \sum_{s=1}^{m} \frac{U_{sn}^{2k}}{q^{snk}} = (-1)^k \left(m + \frac{1}{2}\right) C_{2k}^{k} + \sum_{r=1}^{k} (-1)^{k-r} C_{2k}^{k-r} \frac{U_{rn(2m+1)}}{q^{rnm} U_{rn}}, \tag{4}$$

from where it follows also that

$$\Delta^k \sum_{s=1}^{m} \frac{U_{(2s-1)n}^{2k}}{q^{(2s-1)nk}} = (-1)^k m C_{2k}^{k} + \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-r} C_{2k}^{k-r} \frac{U_{4rmn}}{q^{rn(2m-1)} U_{2rn}}. \tag{5}$$

Similarly, we have

$$\Delta^k \sum_{s=1}^{m} \frac{U_{2sn}^{2k+1}}{q^{sn(2k+1)}} = \sum_{r=0}^{k} (-1)^{k-r} C_{2k+1}^{k-r} \frac{U_{(2r+1)(m+1)n} U_{(2r+1)mn}}{q^{(2r+1)mn} U_{(2r+1)n}}.$$

For the sequence (V_n) we obtain

$$\sum_{s=1}^{m} \frac{V_{sn}^{2k}}{q^{snk}} = \left(m + \frac{1}{2}\right) C_{2k}^{k} + \sum_{r=1}^{k} C_{2k}^{k-r} \frac{U_{r(2m+1)n}}{q^{rmn} U_{rn}} - 2^{2k-1} \tag{9}$$

and

$$\sum_{s=1}^{m} \frac{V_{(2s-1)n}^{2k}}{q^{(2s-1)nk}} = m C_{2k}^{k} + \sum_{r=1}^{k} C_{2k}^{k-r} \frac{U_{4rmn}}{q^{rn(2m-1)} U_{2rn}}. \tag{10}$$

Similarly, for the sum of odd powers we find

$$\sum_{s=1}^{m} \frac{V_{2sn}^{2k+1}}{q^{sn(2k+1)}} = \sum_{r=0}^{k} C_{2k+1}^{k-r} \frac{U_{n(2r+1)(m+1)}}{q^{(2r+1)mn} U_{(2r+1)}} - 2^{2k}.$$

2. From (4) and (9) we obtain

$$\sum_{s=1}^{m} \frac{V_{sn}^{2k} \pm \Delta^k U_{sn}}{q^{snk}} = (1 \pm (-1)^k)\left(m + \frac{1}{2}\right) C_{2k}^{k} - 2^{2k-1} +$$

$$+ \sum_{r=1}^{k} (1 \pm (-1)^{k-r}) \, C_{2k}^{k-r} \frac{U_{rn(2m+1)}}{q^{rmn} U_{rn}}$$

and from (5) and (10)

$$\sum_{s=1}^{m} \frac{V_{(2s-1)n}^{2k} \pm \Delta^k U_{(2s-1)n}^{2k}}{q^{(2s-1)kn}} = (1 \pm (-1)^k)\, m \, C_{2k}^{k} +$$

$$+ \sum_{r=1}^{k} (1 \pm (-1)^{k-r}) \, C_{2k}^{k-r} \frac{U_{4rmn}}{q^{rn(2m-1)} U_{2rn}} .$$

In particular, if $k=1$ we have

$$\sum_{s=1}^{m} \frac{V_{sn}^{2} \pm \Delta U_{sn}^{2}}{q^{sn}} = \begin{cases} -2 + \dfrac{U_{(2m+1)n}}{q^{mn} U_n} , \\ 4m, \end{cases}$$

and

$$\sum_{s=1}^{m} \frac{V_{(2s-1)n}^{2} \pm \Delta U_{(2s-1)n}^{2}}{q^{(2s-1)n}} = \begin{cases} \dfrac{2U_{4mn}}{q^{(2m-1)n} U_{2n}} , \\ 4m. \end{cases}$$

3. For th sum of successive members of the sequences (U_n) and (V_n), resprectively, we find

$$\Delta^k \sum_{r=m-s}^{m+s} \frac{U_{rn}^{2k}}{q^{rnk}} = (-1)^k (2s+1) \, C_{2k}^{k} + \sum_{r=1}^{k} (-1)^{k-r} C_{2k}^{k-r} \frac{U_{rn(2s+1)} V_{2rmn}}{q^{rn(m+s)} U_{rn}}$$

and

$$\sum_{r=m-s}^{m+s} \frac{V_{rn}^{2k}}{q^{rnk}} = (2s+1) \, C_{2k}^{k} + \sum_{r=1}^{k} C_{2k}^{k-r} \frac{U_{rn(2s+1)} V_{2rmn}}{q^{rn(m+s)} U_{rn}} ,$$

and

$$\sum_{r=m-s}^{m+s} \frac{V_{2rn}^{2k+1}}{q^{rn(2k+1)}} = \sum_{r=0}^{k} C_{2k+1}^{k-r} \frac{U_{(2r+1)(2s+1)n} V_{2(2r+1)mn}}{q^{(2r+1)(s+m)n} U_{(2r+1)n}}$$

4. In the case $m=1$, the preceding formulas become

$$\Delta^k U_n^{2k} = (-1)^k \left(1 - \frac{q^s}{2} V_{2s}\right) C_{2k}^{k} q^{nk} +$$

$$+ \Delta \sum_{r=1}^{k} (-1)^{k-r} C_{2k}^{k-r} q^{n(k-r)} U_{nr-s} U_{nr+s} \qquad s = 0, 1, 2, \ldots ,$$

or, if $s=0$

$$\Delta^{k-1} U_n^{2k} = \sum_{r=1}^{k} (-1)^{k-r} C_{2k}^{k-r} q^{(k-r)n} U_{rn}^{2} .$$

Similarly

$$V_n^{2k} = \left(1 + \frac{q^{-s}}{2} V_{2s}\right) C_{2k}^{k} q^{nk} - 2^{2k-1} q^{-s} V_{2s} + \sum_{r=1}^{k} C_{2k}^{k-r} q^{(k-r)n} V_{rn-s} V_{rn+s}$$

or, if $s=0$

$$V_n^{2k} = 2 \, C_{2k}^{k} q^{nk} - 2^{2k} q^{nk} + \sum_{r=1}^{k} C_{2k}^{k} q^{(k-r)n} V_{rn}^{2} .$$