

ПРИМЕНА НА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ ВО БИОЛОГИЈА

Абдула Букла ¹

Бесник Исмаили ²

1. НЕЛИНЕАРНИ ДИНАМИЧКИ СИСТЕМИ И ФИКСНИ ТОЧКИ

До крајот на осумнаесеттиот век главен проблем во теоријата на диференцијални равенки бил да се определат екзактни експлицитни решенија или апроксимации на решенијата во облик на степенски редови. Но, во 1880 година Поанкаре (Poincaré) открил дека наместо да се бараат решенија на равенките, во некои случаи доволно е да се определат квалитативни информации за тоа како се однесува главното решение, [6].

Во овој труд главно ќе се разгледуваат системи од диференцијални равенки од облик:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

каде што F и G се непрекинати функции со непрекинати први парцијални изводи долж рамнината. Системите од облик (1) во кои променливата t не се појавува во функциите F и G се нарекуваат *автономни*. Решенијата на системот (1) преставуваат фамилија од функции. Тие може да се интерпретираат графички како дводимензионално векторско поле каде што секој вектор е градиентот $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$, [1]. Ако нацртаме

доволно многу од овие вектори, може да донесеме одлуки за тоа како се однесува системот (1) во околните на стационарните (еквибриум,

фиксни) точки т.е. точките (x_0, y_0) за кои е исполнет условот
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0 \\ \frac{dy}{dt} = 0 \end{cases} .$$

Ако со t се означува времето, тогаш за секоја фиксирана точка (x', y') геометриското место на сите точки $(x(t), y(t))$ од решението на системот (1) во рамнината xOy , којашто минува низ (x', y') , претставува една фазна патека за (1). Рамнината xOy каде се цртат сите фазни патеки, се нарекува фазна рамнина. Обично фазните патеки се илустрираат преку дијаграм, наречен фазен дијаграм.

Да претпоставиме дека (x^*, y^*) е стационарна точка за (1), т.е. $F(x^*, y^*) = 0$, $G(x^*, y^*) = 0$. Нека земаме $u = x - x^*$ и $v = y - y^*$. За мали вредности на x, y , изразите u, v се малку оддалечени од x^*, y^* соодветно. За системот од диференцијални равенки (1) имаме, [7,10]:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{d(x - x^*)}{dt} = \frac{dx}{dt} = F(x^* + u, y^* + v) \\ \frac{dv}{dt} = \frac{d(y - y^*)}{dt} = \frac{dy}{dt} = G(x^* + u, y^* + v) \end{cases} \quad (2)$$

Од следните релации

$$F(x^* + u, y^* + v) = F(x^* + u, y^* + v) - F(x^*, y^*) \approx dF(u, v),$$

$$G(x^* + u, y^* + v) = G(x^* + u, y^* + v) - G(x^*, y^*) \approx dG(u, v)$$

и користејќи дека $dF = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{bmatrix}$, имаме дека системот (2) во матри-

чен облик може да се претстави како

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

Овој процес се нарекува линеаризација на системот (1) и овозможува да се користи теоријата од линеарни диференцијални равенки за да се донесат одлуки за нелинеарниот систем.

Матрицата $A = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{bmatrix}_{(x^*, y^*)}$ се нарекува матрица на

Јакобијанот во фиксната точка (x^*, y^*) .

Ако бараме општо решение од облик $B = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ на

линеарниот систем $\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, тогаш имаме:

$$\lambda e^{\lambda t} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = e^{\lambda t} A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

од каде што добиваме дека $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ е сопствен вектор, а λ соодветната сопствена вредност. Ако $\lambda_1 \neq \lambda_2$ се сопствени вредности и w_1, w_2 се соодветни сопствени вектори, тогаш изразот $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} w_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} w_2$ преставува општо решение на системот (2).

Знаејќи дека сопствените вредности на матрицата A се добиваат од карактеристичната равенка $\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$, ја добиваме равенката $\lambda^2 - \tau\lambda + \det A = 0$, каде што $\tau = \text{Tr}A = a + d$, $\det A = ab - bc$. Од Виетовите формули уште имаме дека $\det A = \lambda_1 \lambda_2$, $\tau = \lambda_1 + \lambda_2$.

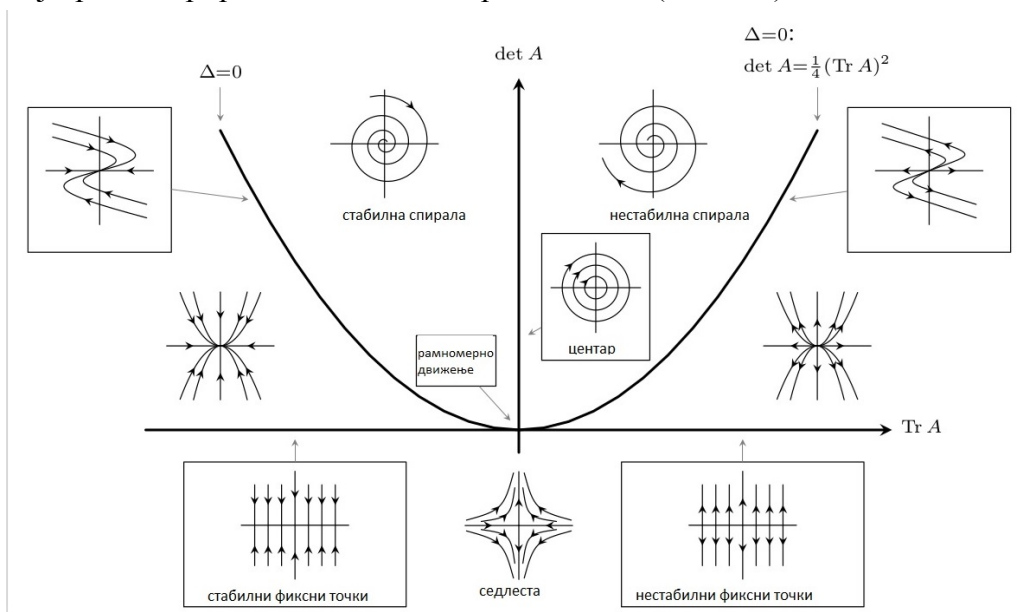
Зависно од вредностите на детерминантата A ги имаме следните можни случаи за стационарната точка:

- 1) Ако $\det A < 0$, тогаш сопствените вредности се реални и имаат различни знаци. Во овој случај имаме седлеста точка.
- 2) Ако $\det A > 0$, тогаш сопствените вредности се реални и имаат исти знаци. Во овој случај имаме центар или ако тие се заемно

конјугирани комплексни броеви – стационарната точка е спирала или јазол.

- 3) Ако $\det A = 0$, тогаш една од сопствените вредности е нула. Во овој случај координатниот почеток не е изолирана стационарна точка и постои права од стационарни точки или рамнина од стационарни точки ако $A = 0$.

Зависно од вредностите на детерминантата A го имаме следниот дијаграм за природата на стационарните точки (Слика 1).



Слика 1. Дијаграм на Пуанкаре за стационарни точки ([9]).

2. МОДЕЛ НА ЛОТКА ВОЛТЕРА

Равенките на Лотка Волтера се откриени независно од Алфред Лотка (Alfred Lotka) и Вито Волтера (Vito Volterra) во 1925-26. Лотка ги добил овие резултати додека се обидува да ги опише биолошките системи на сличен начин како што се опишуваат хемиските системи. Тој увидел дека компонентите на еден биолошки систем (организмите) може да се споредуваат со атомите и молекулите па на тој начин да се анализира растот на популацијата кај животните. Тој смртта на едно живо суштество ја споредил со радиоактивното распаѓање на атомите [4].

Од друга страна, Волтера стигнал до овие равенки сакајќи да даде одговор на прашањето: Зошто во текот на првата светска војна бројот на предаторски риби расте забележително?

Во системот што ќе го разгледуваме, ќе претпоставиме дека се исполнети следните услови, [3]:

- 1) Пленот секогаш има извори за храна,
 - 2) Грабливецот се храни само со разгледуваниот плен,
 - 3) Промените на популацијата се пропорционални со бројот на жителите,
 - 4) Природните услови не влијаат во растот на популациите.
- Земајќи ги предвид дадените услови, се формираат равенките:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax - Bxy \\ \frac{dy}{dt} = Dxy - Cy \end{cases} .$$

Значи претпоставуваме дека пленот со број x расте експоненцијално со стапка A сè додека не е изеден од грабливецот со број y кој расте со стапка D (t е времето во системот). Смртта на пленот е диктиран од стапката B , а од друга страна популацијата на грабливецот паѓа за стапка C кога нема ресурси од пленот.

Од математички аспект горните равенки претставуваат систем од нелинеарни диференцијални равенки од прв ред. Земајќи го предвид фактот дека нелинеарните системи не се едноставни за да се решат експлицитно ние ќе ги разгледуваме нивните нумерички решенија (добие-ни со софтверот `dfield` и `rplane` [8]) и на тој начин ќе ги скицираме интегралните криви.

Во биолошките системи може да се случи популациите да бидат во еквилибриум – бројот на жители да стане константен во текот на времето. Тоа ќе се случи кога:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0 \\ \frac{dy}{dt} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Ax - Bxy = 0 \\ Dxy - Cy = 0 \end{cases} .$$

Со решавање на горниот систем ги добиваме следните стационарни

точки: $(0, 0), \left(\frac{C}{D}, \frac{A}{B}\right)$.

Стационарната точка $(0, 0)$ е случајот кога и грабливецот и пленот се во состојба на истребување а вториот случај $\left(\frac{C}{D}, \frac{A}{B}\right)$ зависи само од дадените биолошки параметри.

Земајќи го предвид фактот дека во дадена точка (x, y) Јакобијанот на системот е еднаков со

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(Ax - Bxy) & \frac{\partial}{\partial y}(Ax - Bxy) \\ \frac{\partial}{\partial x}(Dxy - Cy) & \frac{\partial}{\partial y}(Dxy - Cy) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - By & -Bx \\ Dy & Dx - C \end{pmatrix},$$

за стационарните точки добиваме дека

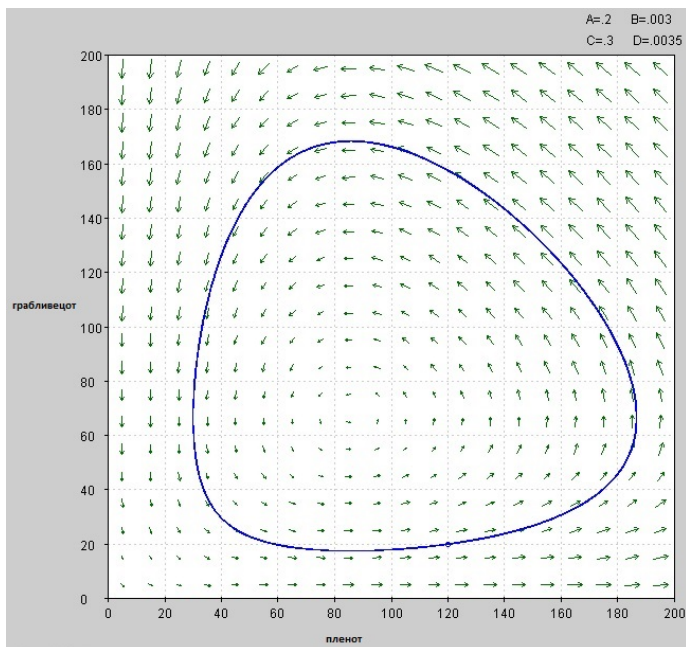
$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -C \end{pmatrix}, J\left(\frac{C}{D}, \frac{A}{B}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{BC}{D} \\ \frac{AD}{B} & 0 \end{pmatrix},$$

односно се добива дека првата точка е нестабилна седлеста точка а втората е стабилна фиксна точка со центар $\left(\frac{C}{D}, \frac{A}{B}\right)$.

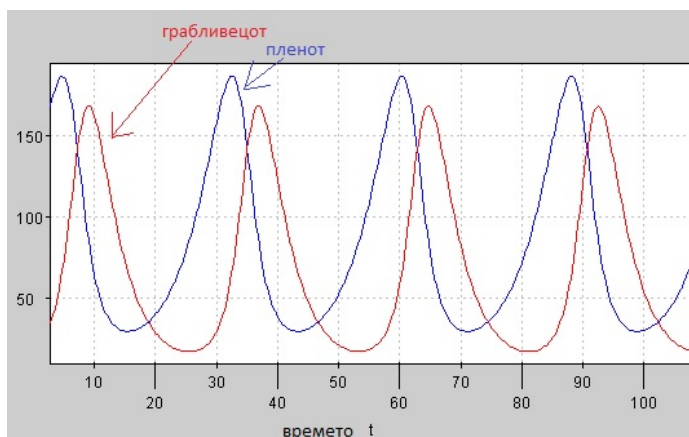
Пример 1. Да го разгледаме следниот пример. Да претпоставиме дека имаме биолошки систем каде што ни се дадени коефициентите

$$A = 0,2, B = 0,003, C = 0,3 \text{ и } D = 0,0035. \quad (3)$$

Ако претпоставиме дека $x_0 = 120$, $y_0 = 20$, тогаш за време од 100 години се добива следниот фазен дијаграм:

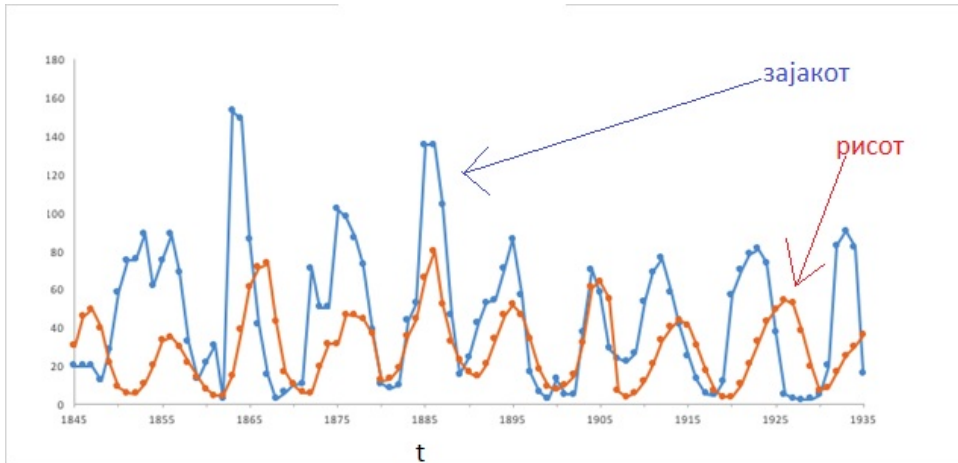


Слика 2. Фазен дијаграм на системот на Лотка Волтера за почетните услови (3) ([8]).



Слика 3. Графици на функциите $x(t), y(t)$ за системот на Лотка-Волтера, при почетните услови (3) ([8]).

Сега, ако се разгледува реален модел каде што грабливецот е ристот и пленот е зајакот, се е добива следниот модел:



Слика 4. Реален модел за рисот и зајакот за 90 годишен период ([11]).

Како што спомнавме на почеток, Вито Волтера го анализираше растот на популацијата во една фамилија риби од Јадранско море, [2]. Тој дошол до заклучок дека за време на првата светска војна моделот зависел само од биолошките параметри и се развивал како што предвидува моделот, но во периодот надвор од војната интензивниот риболов го нарушил овој систем и довел до оштетувања на популациите на разгледуваните организми.

Значи, растот на популацијата во биолошки системи од две компоненти, осцилира во одредени периоди, додека во тие системи не започне да влијае човекот.

3. МОДЕЛ НА КОНКУРЕНЦИЈА НА ЛОТКА ВОЛТЕРА

Ако два вида се натпреваруваат за ресурси, како што е храната, водата, светлината, итн., тогаш таквиот натпревар е познат како конкурентна интеракција, односно овие два вида се борат за опстанок во нивната животна средина. Ако само еден вид ги користи ресурсите, другиот вид може одвај да преживее. Значи, тука е прашањето, како можат да коегзистираат овие два конкурентни видови?

Нека $x(t)$ и $y(t)$ ја означуваат густината на популацијата на секој вид. Да претпоставиме дека во отсуство на еден вид другата популација станува ограничена и од ефектот на конкуренцијата секоја популација е обратно пропорционална со производот xy .

Затоа, моделот за конкурентна интеракција е:

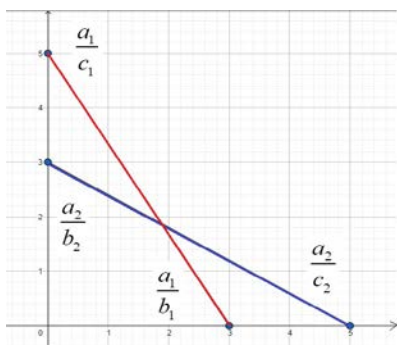
$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1x - b_1x^2 - c_1xy = x(a_1 - b_1x - c_1y) \\ \frac{dy}{dt} &= a_2y - b_2y^2 - c_2xy = y(a_2 - b_2y - c_2x) \end{aligned}$$

каде што a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 и c_2 се реални позитвни константи. Системот има четири стационарни точки: $(0,0), (0, a_2/b_2), (a_1/b_1, 0), (\tilde{x}, \tilde{y})$, каде што последната точка е дефинирана како пресек на правите:

$$\begin{aligned} b_1x + c_1y &= a_1 \\ c_2x + b_2y &= a_2 \end{aligned} \quad (4)$$

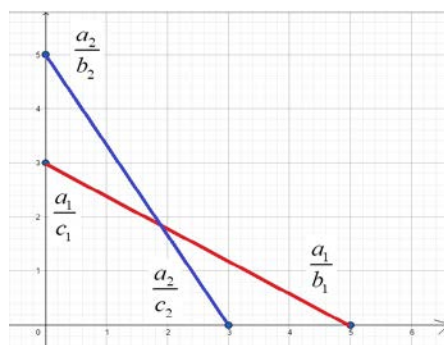
Од анализата на првите три точки на еквилибриум, лесно може да се заклучи дека, [5]:

- i) За $(0,0)$, еквилибриумот $x(t) \equiv 0, y(t) \equiv 0$ покажува пад и во двата вида.
- ii) За точката $(0, a_2/b_2)$, еквилибриумот $x(t) = 0, y(t) = a_2/b_2$ покажува дека вториот вид победил на натпреварот и првиот вид исчезнува.
- iii) За точката $(a_1/b_1, 0)$, еквилибриумот $x(t) = a_1/b_1, y(t) = 0$, покажува дека првиот вид ги користи сите ресурси и недостатокот на ресурси предизвикува истребување на втор вид.



Слика 5. Графикот на правите

(4) за $c_1c_2 < b_1b_2$.



Слика 6. Графикот на правите

(4) за $c_1c_2 > b_1b_2$.

Соживотот е наш примарен интерес, така што стабилноста на последната стационарна точка (\tilde{x}, \tilde{y}) е поважна од другите очигледни случаи споменати погоре.

Стабилноста на (\tilde{x}, \tilde{y}) може да се дискутира со споредување на наклоните на две линии во Сликата 5. Имаме две можности прикажани на Сликите 5 и 6. Да забележиме дека црвената линија на сликите ја покажува првата равенка во (4), додека сината линија ја покажува втората равенка во (4).

На Сликата 5, $\frac{a_2 / b_2}{a_2 / c_2} < \frac{a_1 / c_1}{a_1 / b_1}$, каде $c_1 c_2 < b_1 b_2$, и на сликата 6,

$\frac{a_2 / b_2}{a_2 / c_2} < \frac{a_1 / c_1}{a_1 / b_1}$, каде што $c_1 c_2 > b_1 b_2$. Знаеме дека b_1, b_2 ја ограничува-

ат стапката на раст на секоја популација и c_1, c_2 се константи, што претставува конкуренција меѓу два вида. Користејќи ги овие неравенства, може да се направат следните дискусии.

i) Ако $c_1 c_2 < b_1 b_2$, тогаш ефектот на конкуренцијата е помал од ефектот на ограничување, па фазните патеки се приближуваат кон стационарната точка (\tilde{x}, \tilde{y}) кога $t \rightarrow \infty$. Значи, точката (\tilde{x}, \tilde{y}) е асимптотски стабилна. Ова гарантира коегзистенција на двата вида.

ii) Ако $c_1 c_2 > b_1 b_2$, т.е. ако ефектот на конкуренцијата е поголем од ефектот на инхибиција, тогаш еден од видовите исчезнува бидејќи или $x(t)$ или $y(t)$ тежат кон 0 кога $t \rightarrow \infty$, што одговара на нестабилната стационарна точка (\tilde{x}, \tilde{y}) . Во овој случај, коегзистенцијата е невозможна.

Пример 2. Да го дискутираме грабливец-плен системот моделиран со равенките:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 7x - x^2 - xy = x(7 - x - y) \\ \frac{dy}{dt} &= xy - 4y = y(x - 4) \end{aligned} \quad (5)$$

Ако десните страни на равенките ги изедначиме со 0, т.е.

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= x(7 - x - y) = 0 \\ f_2(x, y) &= y(x - 4) = 0 \end{aligned} ,$$

добиваме неподвижни точки како што се: $(0, 0)$, $(7, 0)$ и $(4, 3)$. Го линеаризираме системот за да најдеме Јакобиевата матрица:

$$J = \begin{bmatrix} \partial f_1 / \partial x & \partial f_1 / \partial y \\ \partial f_2 / \partial x & \partial f_2 / \partial y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 - 2x - y & -x \\ y & x - 4 \end{bmatrix}.$$

За точката $(0, 0)$, линеаризаниот систем е:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = J_{(0,0)} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \text{ тоа е } \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Карактеристичната равенка е $(7 - \lambda)(-4 - \lambda) = 0$, т.е. $\lambda_1 = 7 > 0$, и $\lambda_2 = -4 < 0$. Оттука, точката $(0, 0)$ е седлеста, па таа е нестабилна.

За точката $(7, 0)$ ја користиме смената $\begin{matrix} u_1 = x - 7 \\ u_2 = y \end{matrix}$ за да се добие

линеаризаниот систем со стационарна точка $(0, 0)$, т.е. $\begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = J_{(7,0)} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$,

така што се добива $\begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -7 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$. Карактеристичната равенка е

$(-7 - \lambda)(3 - \lambda) = 0$. Корените на оваа равенка се:

$$\lambda_1 = -7 < 0 \text{ и } \lambda_2 = 3 > 0,$$

па значи точката $(7, 0)$ е нестабилна седлеста точка.

За точката $(4, 3)$ заменуваме во равенките и го добиваме следното

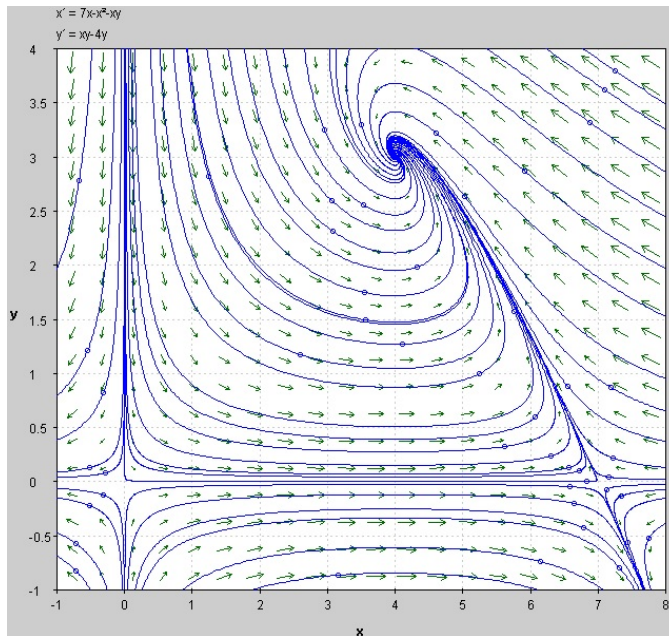
$$\begin{matrix} v_1 = x - 4 \\ v_2 = y - 3 \end{matrix}.$$

Потоа $(0, 0)$ е соодветната стационарна точка за $(4, 3)$, а соодветниот систем е

$$\begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \end{bmatrix} = J_{(4,3)} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \text{ или, еквивалентно } \begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}.$$

Карактеристичната равенка $\lambda^2 + 4\lambda + 12 = 0$ има комплексни корени $\lambda_1 = -2 + i2\sqrt{2}$ и $\lambda_2 = -2 - i2\sqrt{2}$. Оттука $\text{Re}(\lambda) < 0$, па стационарната точка $(4, 3)$ е асимптотски стабилна спирала.

Можеме да заклучиме дека, за секој пар почетни вредности (x_0, y_0) и двата вида коегзистираат со густини на населението кои се приближуваат кон константни вредности $x(t) \equiv 4$ и $y(t) \equiv 3$.



Слика 7. Комплетен фазен дијаграм за системот (5) ([8]).

4. ЗАКЛУЧОК

Во овој труд се разгледени два различни биолошки модели кои се изразуваат преку нелинеарни системи од диференцијални равенки. Тие обично се поедноставни во идеални услови. Од друга страна, во природните процеси тешко може да се предвидат сите надворешни фактори, но сепак овие модели дават доволна индикација дека еколошките модели како и многу други природни појави се стремат кон стабилност. Некогаш, ние како свесни суштества, влијаеме за да се наруши стабилноста на системот и кога ги чувствуваме последниците обично немаме време за поправање. Еколошкиот систем е како синцир: ако отстраниме една алка тешко е дека веднаш ќе ги почувствуваме последиците, но тие постојат и во некој момент ќе се појават во нашиот живот.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] К. Т. Alligood, T.D. Sauer, J.A. Yorke, *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*, Springer, 1996.

- [2] M. C. Anisiu, *Lotka Volterra and their model*, Didactica Mathematica, 32 (2014), 9-17.
- [3] T. Blaszkak, C. Castillo-Chavez, *Lotka-Volterra models of Predator-Prey Relationships*, Lecture Notes.
- [4] J. A. Oakes, *Managing Life: Human Biology*, Phd thesis.
- [5] Ī. Savun, *Stability of Systems of Differential Equations and Biological Applications*, Master thesis.
- [6] F. Simons, F. George, *Differential equations with applications and historical notes*, CRC Press, 2016.
- [7] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, Avalon Publishing, 2014.
- [8] dfield and pplane (Java versions),
<https://www.cs.unm.edu/~joel/dfield/>
- [9] Example: Poincare Diagram, Classification of Phase Portraits,
<http://www.texample.net/tikz/examples/poincare/>
- [10] Linearizing Systems of First Order Nonlinear Differential Equations,
<https://www.youtube.com/watch?v=ZJ3MiNhrMbs>
- [11] Predator-Prey Interaction,
http://www2.nau.edu/lrm22/lessons/predator_prey/predator_prey.html

¹ Универзитет Св. Кирил и Методиј, Скопје
Природно-математички факултет
Архимедова 3, 1000 Скопје, Р. Северна Македонија
e-mail: abdullabuklla@hotmail.com

² О.О.У “Исмаил Кемали”,
Ленинградска бб, 1230, Гостивар, Р. Северна Македонија
e-mail: besnik_ismaili@hotmail.com

Примен: 31.1.2020

Поправен: 1.4.2020

Одобен: 3.4.2020

Објавен на интернет: 24.4.2020