МАТЕМАТИЧКИ ОМНИБУС, 1 (2017), 33 – 43

ЛАМБЕРТОВА ФУНКЦИЈА – ГРАФИК, ПРЕСМЕТКИ И ПРИМЕНА

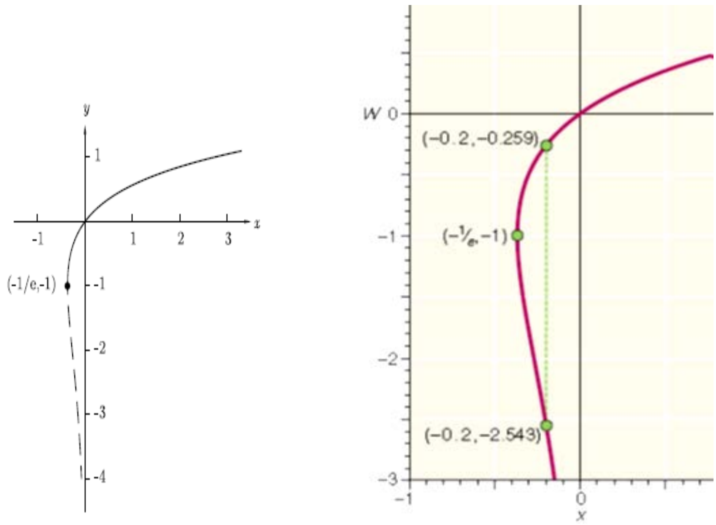
Емилија Целакоска [1]

1. ВОВЕД

Математичарите поретко слушнале за Јохан Хајнрих Ламберт (1728–1777) бидејќи неговиот придонес во науката е универзален. Сепак, сите негови придонеси се базирани и мотивирани од математиката. Името Ламбертова функција е дадено во чест на овој научник дури во раните 80-ти години од XX век, кога во софтверскиот пакет Maple дошла потребата таа да се именува. Потребата за именување на функцијата воопшто не е случајна. Имено, професорот Роберт Корлес од Одделот за применета математика на Универзитетот на Западен Онтарио заедно со своите соработници за Maple-овиот Computer algebra system, поминал долги часови рачно прелиствувајќи книги и списанија од применетата математика во библиотеката (да се потсетиме дека тогаш електронските книги и списанија биле реткост, а интернет немало), при што откриле дека истата неименувана функција се појавува во литературата премногу пати за да се игнорира. Всушност, во сите науки кои ја применуваат математиката проблемите често се моделираат по принцип на повторувачка појава, односно врз база на итерација на елементарен процес. Начинот на формулирање на овие проблеми се состои во поставување равенки или диференцијални равенки кои многу често ги вклучуваат трансцендентните експоненцијална или логаритамска функција. Познатиот број e најчесто е нивна основа. Токму Ламбертовата функција $W(x)$, за x од множеството реални броеви, дефинирана имплицитно преку инверзијата на функцијата $f(x) = xe^x$, дава затворен облик на решенијата на наведените проблеми во природните, општествените и инженерските науки ([5]).

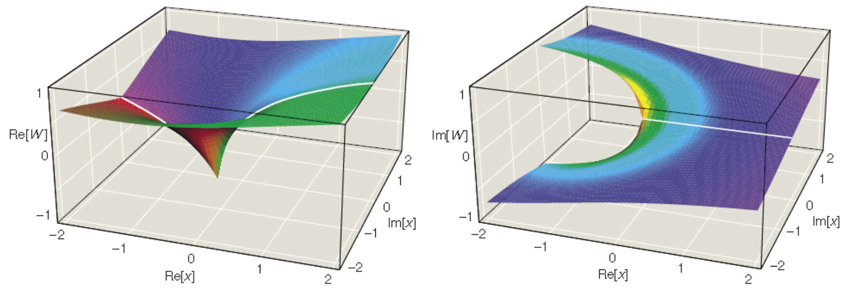
2. ГРАФИЧКИ ПРЕТСТАВУВАЊА НА ЛАМБЕРОВАТА ФУНКЦИЈА

Функцијата $f(x) = xe^x$ е немонотона, односно е монотона по делови и има минимум во точката $(-1, -1/e)$. Ова значи дека Ламбертовата функција, како нејзина инверзија, не е вистинска функција бидејќи е повеќевредносна. Затоа таа се дели на две функции, наречени гранки на Ламбертовата функција. Двете гранки се несиметрични, немаат ни осна, ни централна симетрија, па затоа Ламбертовата функција е згодна како прв, најлесен пример за изучување на функции со нетривијално разгранување. Гранките на реалниот домен се нарекуваат главна гранка (полната линија на цртеж 1 лево) и негативна гранка (испрекинатата линија на цртеж 1 лево). Главната гранка се означува со $W_0(x)$, а негативната се означува со $W_{-1}(x)$. Дефинирачката равенка за Ламбертовата функција е $x = W(x)e^{W(x)}$. Решенијата на $x = W(x)e^{W(x)}$ се такви што за $x \geq 0$ има единствено решение, за $-1/e \leq x < 0$ има две решенија, а за сите $x < -1/e$, нема решение.



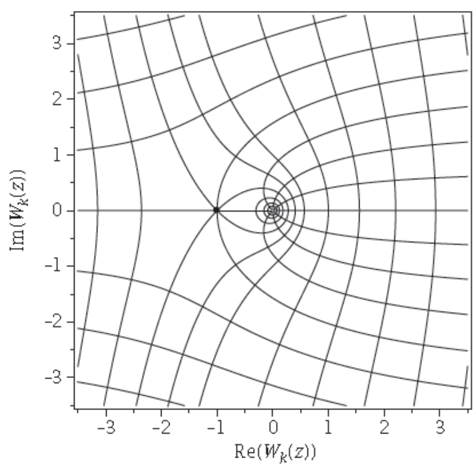
Цртеж 1. Лево: Ламбертовата функција на реалниот домен. Едната гранка е означена со испрекината линија, а другата – со полна линија ([11]).
Десно: Двојна вредност, на пример за $x = -0.2$ ([10]).

Во множеството на комплексни броеви (по домен и опсег), графичкиот приказ е тридимензионален и уште поинтересен. Површината одлево на цртежот 2 го прикажува реалниот дел од Ламбертовата функција, а површината оддесно – имагинарниот дел за вредности на комплексната рамнина, блиску до комплексната нула. Белата линија на површините е проекција на реалната оска – линијата по која броевите имаат имагинарен дел 0. Шпицот на реалната површина и прекинот кај имагинарната површина е за $x = -1/e$.



Цртеж 2. Цртежот е од визуелизациите [15].
Доменот и опсегот е множеството на комплексни броеви.
Лево е прикажана реалната компонента, а десно е
прикажана имагинарната компонента од вредностите.

За даден комлексен број z, равенката $z = W(z)e^{W(z)}$ има решенија во пребројлив број гранки означени со $W_k(z)$ каде што k е цел број. На Цртеж 3, за различни k и z, се дадени проекциите на гранките во комплексната рамнина.

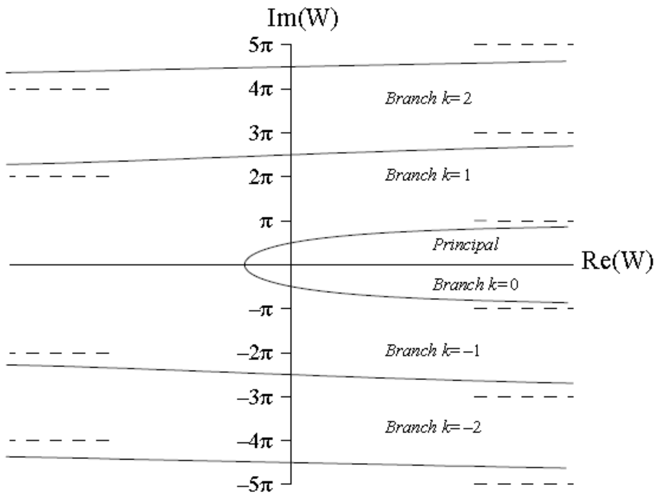


Цртеж 3. $W_k(z)$ проектирани на комплексната рамнина. Црната точка одговара на црната точка од цртеж 1 лево ([7]).

Линиите отворени оддесно неслучајно потсетуваат на кривата квадратрикса позната уште од античка Грција, првата крива за која било потребно повеќе од само шестар и линијар за да се конструира. Оваа крива била прилично популарна во антиката заради нејзината корисност за проблемите на трисекција на агол и мерење квадратура на круг. Денес квадратриксата е попозната како график на функцијата $y = x$ ctg(x). Да ја видиме нејзината поврзаност со Ламбертовата функција. За $z = W(z)e^{W(z)}$ да ја направиме следната замена, $w = W(z)$. Тогаш може да се запише $z = we^w$. Ако направиме претставување $w = \xi + i\eta$ и $z = x + iy$, каде што i е имагинарната единица, добиваме

$$x = e^{\xi}(\xi\cos\eta - \eta\sin\eta),$$
$$y = e^{\xi}(\eta\cos\eta + \xi\sin\eta).$$

За $y = 0$ имаме $\eta = 0$ или $\xi = -\eta ctg\,\eta$. За $\xi\cos\eta - \eta\sin\eta < 0$, ги добиваме сите негативни реални вредности на z-оската. Ги означуваме областите во w-рамнината со цели броеви, како на цртеж 4 и k-тата гранка на Ламбертовата функција која зема вредности во областа k е означена со $W_k(z)$. Главната гранка е означена со $k = 0$. Хоризонталните асимптоти на гранките ја сечат η оската во целите множители на π. Кривата која ја разделува главната гранка $W_0(z)$ од $W_1(z)$ и $W_{-1}(z)$ е $\{-\eta ctg\,\eta + i\eta;\ -\pi < \eta < \pi\}$ заедно со -1, т.е. едноставно $(-\infty,-1]$. Кривите кои ги разделуваат останатите гранки се $\{-\eta ctg\,\eta + i\eta;\ -2k\pi < \pm\eta < (2k + 1)\pi\}$, $k=1,2,\ldots$. Овие две множества формираат квадратрикса, без деловите кои одговараат на интервалите $(2k - 1)\pi < \pm\eta < 2k\pi$.



Цртеж 4. Областите на гранките на $W(x)$. ([6])

3. ПРЕСМЕТКИ ВО ВРСКА СО ЛАМБЕРТОВАТА ФУНКЦИЈА

Појавата на Ламбертовата функција е историски документирана во 1758 г., кога во списанието *Acta Helvetica* Јохан Хајнрих Ламберт објавил решение на равенката $x^m + px = q$ во облик на ред. Методот со кој Ламберт пристапил кон решавањето го заинтересирало неговиот современик, познатиот математичар Леонард Ојлер. Методот е таков што е основа за подоцнежната теорема на Лагранж за инверзија на редови, за која кон крајот на 18-ти век Ханс Хајнрих Борман дал обопштување, денес познато како формула на Лагранж-Борман. Уредниците на *Acta Helvetica*, пак, според искажувањето на Ламберт во писмата до Ојлер, му скратиле еден доказ за попрост случај, а тој ги загубил белешките. Обидувајќи се да го изведе одново, стасал многу блиску до Лагранжовата теорема за инверзија. Од друга страна, Ојлер, запишувајќи го триномот на Ламберт во поинаков облик, имено $x^{\alpha} - x^{\beta} = (\alpha - \beta)vx^{\alpha+\beta}$ со замените $x^{-\beta}$ наместо x и $m = \alpha\beta$, $q = (\alpha - \beta)v$, дошол до решение во облик на ред, со кој за специјалниот случај $\alpha = \beta$ добил решение на трансцендентната равенка $x \ln x = v$. Во тоа решение е документирано најраното појавување на редот за функцијата W.

Да разгледаме како се пресметува вредност на функцијата и како се користи. Графикот на $W(x)$ (и во реалниот и во комплексниот случај) е секако корисна алатка во проценката на одредена вредност на функцијата за даден аргумент, но аналитичкото пресметување не е очигледно заради имплицитноста на дефинирањето на функцијата. Прво, да разгледаме едноставни случаи. Некои од поочигледните вредности на Ламбертовата функција се: $W(-1/e) = -1$, $W(0) = 0$, $W(e) = 1$, $W(2e^2) = 2$, $W((-1/2)\ln 2) = -\ln 2$. Вредноста на $W(1)$, позната како Омега константа, има приближна вредност 0.567143. Така, $W(1)$ е „приближен“ роднина на златниот пресек ϕ, бидејќи $1/\phi$ е решение на $1/x = 1 + x$, а $W(1)$ е решение на $1/x = e^x$, при што, да се потсетиме, $1 + x$ е апроксимација за e^x.

Како да се пресмета $W(x)$ за произволен реален број x? Еден начин ([8]), според Лагранжовата теорема за инверзија е да се пресметува според развојот во Тејлоров ред

$$W_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} x^n,$$

кој има радиус на конвергенција од $1/e$. Бидејќи именителот со факториел брзо расте, згодно е редот да се запише рекурзивно од облик $W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$, за $c_1 = 1$, $c_n = -\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-2} c_{n-1}$, за секој $n \geq 2$.

Тестот за оваа нумеричка шема на повеќе членови, на пример 150 –

што е поприлично, со оглед дека $|x| \leq 1/e$, за, на пример, $x = (-1/2)\ln 2 \approx -0.3465736$, дава парцијална сума $S = -0.69314684$, која се разликува од точната вредност на $-\ln 2$ за 0.0000003. За $|x| < 1/e$, употребата на редот е сосема оправдана. Ако, пак, $|x| > 1/e$, една можност за пресметка е редот $W(x) = \ln x - \ln(\ln x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\ln x)^n} a_n(x)$, каде што $a_n(x)$ е една специфична алтернативна сума, која содржи Стирлингови броеви од прв вид $S(p,q)$ (кои го покажуваат бројот на пермутациите на p елементи со q дисјунктни циклуси; на пример: $S(3,1) = 2$, односно двете пермутации со еден дисјунктен циклус се 312=(132) и 231=(123)), т.е. $a_n(x) = \sum_{m=1}^{n} (-1)^m \frac{\left(\ln(\ln x)\right)^m}{m!} S(n, n-m+1)$. Истата формула може да се користи и за гранките W_k на Ламбертовата функција [6], каде што логаритмите се повеќевредносни, односно со $\ln_k x = \ln x + 2\pi i k$ е означена k-тата логаритамска гранка. Оваа опција е, јасно, непрактична и затоа е подобро да се определи позгодна нумеричка постапка.

Еден нумерички метод за наоѓање нули е познатиот Њутнов метод, кој може да се примени за функцијата $g(y) = ye^y - x$. Притоа се става $W(x) = y$ и се решава $ye^y = x$: апроксимираме за y во $g(y) = 0$, со што се добива $y_{n+1} = y_n - \frac{g(y_n)}{g'(y_n)} = \frac{{y_n}^2 + xe^{-y_n}}{y_n + 1}$, доста практично за пресметка. Њутновиот метод е лесен, но поспор од Халеевиот,

$$y_{n+1} = y_n - \frac{\frac{g(y_n)}{g'(y_n)}}{1 - \frac{g(y_n)}{g'(y_n)} \cdot \frac{g''(y_n)}{2g'(y_n)}} = \frac{y_n e^{y_n} - x}{(y_n + 1) e^{y_n} - \frac{(y_n + 2)(y_n e^{y_n} - x)}{2y_n + 2}}.$$

Затоа во софтверите Халеевиот метод е избран за пресметки на реалните вредности за Ламбертовата функција.

Со оглед дека има опции за одлична точност на нумеричките методи за пресметка на вредности на Ламбертовата функција [9], од математичка и применета гледна точка таа е интересна со нејзиното вклучување во проблеми кои бараат решение преку инверзија. На пример, за функцијата $A(x)$ дефинирана со $x = 2A(x) + \ln(A(x))$, имаме $e^x = A(x)e^{2A(x)}$, т.е. $2e^x = 2A(x)e^{2A(x)}$ од што $2A(x) = W(2e^x)$, па $A(x) = \frac{1}{2} W(2e^x)$. Еве и друг пример: да ја разгледаме функцијата

$B(x)$ дефинирана со $x = B(x)^{B(x)}$. Тогаш, $\ln(x) = B(x) \ln B(x)$, односно $\ln(x) = e^{\ln B(x)} \ln B(x)$ од што имаме $\ln B(x) = W(\ln x)$, па $B(x) = e^{W(\ln x)}$. Еве и подиректен пример: Да се реши равенката $3^x = 7x + 2$. За полесно снаоѓање со слободниот член ставаме смена $t = -x - 2/7$, па равенката станува $t \cdot 3^t = (-1/7) \cdot 3^{(-2/7)}$. Сега, лесно може да се види дека $t = W((-1/7) \cdot 3^{(-2/7)} \ln 3) / \ln 3$.

Многумина нема да се изненадат дека Ламбертовата функција лесно се диференцира (всушност со имлицитно диференцирање) и се добива $W' = \dfrac{e^{-W}}{1+W}$, без $-1/e$ каде што не е диференцијабилна. Но, секако е изненадувачки што функции кои ја содржат може да се интегрираат. Имаме:

$$\int W(x)dx = (W^2(x) - W(x) + 1)e^{W(x)} + C\,,$$

$$\int xW(x)dx = \frac{1}{8}(2W(x)-1)(2W^2(x)+1)e^{2W(x)} + C\,,$$

а се користат и идентитетите $\int_0^e W(x)dx = 1 - e$ и $\int_0^\infty \frac{W(x)}{x\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{2\pi}$.

4. ПРИМЕНА НА ЛАМБЕРТОВАТА ФУНКЦИЈА

Во науката и техниката се среќаваат ситуации кои го наведуваат истражувачот математички да ги моделира со итерирано „експоненцирање“, таканаречено тетрација. Во овој вид проблеми, од важна помош во доведувањето до затворен облик на решението е токму Ламбертовата функција. Тетрацијата наречена „кула од степени“ е функцијата $y = x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$. На прв поглед, изгледа дека за $x > 1$, вредностите за y се бесконечни. Но, се покажува дека оваа функција може да се запише во затворен облик со помош на Ламбертовата функција, а вредностите се конечни и за некои $x > 1$. Имено, спомената тетрација може да се запише како итеративна низа $y_1 = x,\ y_{n+1} = x^{y_n}$, за која Ојлер всушност добил резултат дека конвергира за $e^{-e} < x < e^{1/e}$ (десната страна изнесува приближно 1.445). Со неколку смени, излегува дека $y = \dfrac{W(-\ln x)}{-\ln x}$. Овој затворен облик на тетрацијата има примена кај фракталите (интересни разгледувања има во [16] и [17]).

Во врска со тетрациите се итерираните експоненцијали и логаритми. Се покажува дека, зависно од тоа дали $|W(x)|< 1$ или $|W(x)|> 1$, може да се запише

$$W(x) = \ln\frac{x}{\ln\frac{x}{\ln\frac{x}{\cdots\cdots}}} \quad \text{или} \quad W(x) = \frac{x}{\exp\frac{x}{\exp\frac{x}{\exp\frac{x}{\cdots\cdots}}}}$$

соодветно, каде што exp x значи e^x. Овие формули се откриени природно, само преку записите $W(x) = \ln\frac{x}{W(x)}$ и $W(x) = \frac{x}{\exp W(x)}$.

Чест пример во науките е диференцијалната равенка со аргумент на одложување (delay differential equations, DDE) ([2]). Овие равенки ги проучувал Лаплас, заедно со маркизот Кондорсѐ. Во своите истражувања тие имаат допирни точки со диференцијалните равенки со кои се занимавале Ојлер и Ламберт, но всушност тие допирни точки се откриле два века подоцна ([12]). Наједноставниот облик на диференцијална равенка со аргумент на одложување е $y' = Ay(x-t)$. Ако претпоставиме решение од облик $e^{\lambda x}$ тогаш $\lambda - Ae^{-\lambda t} = 0 \Leftrightarrow \lambda t e^{\lambda t} = tA$, па $\lambda t = W(tA)$, т.е. решението е $y(x) = Ce^{\frac{W(tA)}{t}x}$. Во [1] е пронајден начин на преоѓање од обични кон диференцијални равеки со аргумент на одложување со помош на концептот на Ламбертовата функција.

Во физиката, Ламбертовата функција се применува во оптиката, електромагнетизмот, физиката на мали честички, општата релативност и геофизиката. Познати се Виновиот закон за радијација на црно тело, добиен со наоѓање на максимуми на функцијата од брановите должини според Планковиот спектрален закон. Во решението фигурира Ламбертовата функција ([14]). Потоа, во проблемите на полиња на кондензатори се јавуваат равенства меѓу полиномна и експоненцијална функција, типично за користење на Ламбертовата функција ([12]). Исто така, таа се користи во барањето аналитичко решение на равенката на Хаисински од областа на проблемите на акцелераторите на честички, со цел да се добие лонгитудинална распределба на електроните во кружен акцелератор. Понатаму, според Шварцшилдовото решение и решението за Шварцшилдов хоризонт во општата релативност, со помош на Ламбертовата функција може да се добие закон за деформација околу масивното тело во затворен облик ([4]). Во проблемите на тек на флуид низ порозен медиум, се користат двете гранки W_0 и W_{-1} на Ламбертовата функција, зависно од стабилноста на системот. Во акустиката, Ламбертовата функција има улога во фреквенциското разложување за препознавање на звук. Во квантната оптика има улога за конструкцијата на инструментот наречен Зиманов успорувач кој мора да произведе оптимално магнетно поле во методите за заробување на атоми со ласерски зрак. Ламбертовата функција се појавува и во квантномеханичкиот потенцијал $V = \dfrac{V_0}{1+W(e^{-x/\sigma})}$.

Во електрониката, Ламбертовата функција има улога во нумеричките методи за изразување на обопштен облик на равенка за опишување на Гаусовиот шум. Исто така во електрониката е важна во моделирањето на диодно коло. Во 3Д невровизуелизацијата (neuroimaging) Ламбертовата функција се користи во функцијата која го поврзува мозочниот проток на крв со промените во примањето на кислород. Во биохемијата, Ламбертовата функција се користи за опишување на ензимската кинетика во временско-зависен облик, односно со примена на диференцијалните равенки со аргумент на одложување ([5]).

Во [3] е објавен метод со кој битно се олеснува постапката од имплицитна во експлицитно аналитичко решение на равенките кои ги моделираат проблемите за дефекти и критична дебелина на кристалите: Ламбертовата функција ја опишува критичната кривина на бараната дебелина на кристалите. Во проблемите од областа на хемиското инженерство, аналогно, таа се користи за определување на дебелината на стаклениот јаглерод за суперкондензатор.

Благодарение на употребата на Ламбертовата функција во геофизиката е најден попрецизен и експлицитен алгоритам за нелинеарен систем поврзан со проблемот на формирање на електромагнетни и диелектрични снопови во бушотините ([13]).

Во градежништвото се користат истите методи од графови (дрва) кои се користат и во информатичките науки, за пресметка на растот на пукнатини и фрактури во градбите и законот е изразен преку Ламбертовата функција.

Во хидрауличното инженерство позната е Колбруковата формула за триењето на флуид низ цевки. Со трансформација на формулата преку Ламбертовата функција и користејќи ги нумеричките методи дизајнирани за неа, пресметките стануваат попрецизни.

Листата не е исцрпена со наведените примени, вклучувајќи ги и примените подетално опишани во наведената литература и сигурно е интересно секое ново појавување на област во науката која ја користи Ламбертовата функција.

ЛИТЕРАТУРА

[1] F. M. Asl, A. G. Ulsoy, *Analysis of a system of linear delay differential equations,* Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, 125 (2) (2003) 215 – 223.

[2] P. B. Brito, F. Fabiao, A. Staubyn, *Euler, Lambert, and the Lambert W Function Today*, The Mathematical Scientist, 33 (2) (2008) 127 – 133.

[3] A. Braun, K. M. Briggs, P. Boni, *Analytical solution to Matthews' and Blakeslee's critical dislocation formation thickness of epitaxially grown thin films*, Journal of Crystal Growth 241, (2002) 231 – 234.

[4] B. Coll, *A Universal Law of Gravitational Deformation for General Relativity, Relativity and Gravitation in General,* Proceedings of the Spanish Relativity Meeting in Honour of the 65th Birthday of Lluis Bel, Salamanca, Spain, 22–25 September, 1998. Ed. J. Martín, E. Ruiz, F. Atrio, and A. Molina, World Scientific Publishers, (1999) 91 – 98.

[5] R. M. Corless, G.H. Gonnet, D. E. G. Hare, D. J. Jeffrey, D. E. Knuth, *On the Lambert W Function,* Advances in Computational Mathematics, 5 (1996) 329 – 359.

[6] R. M. Corless, D. J. Jeffrey, D. E. Knuth, *A Sequence of Series for the Lambert W Function*, ISSAC '97 Proceedings of the 1997 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, ACM, (1997) 197 – 204.

[7] R.M. Corless, D.J. Jeffrey, *The Lambert W Function,* Article III.17, The Princeton Companion to Applied Mathematics, Ed. N. Higham et al, Princeton University Press, 2015.

[8] T. P. Dence, *A Brief Look into the Lambert W Function*, Applied Mathematics, 4, (2013) 887 – 892.

[9] T. Fukushima, *Precise and fast computation of Lambert W functions, without transcendental function evaluations*, Journal of Computational & Applied Mathematics, 244, (2013) 77 – 89.

[10] B. Hayes, *Why W?*, American Scientist , 93, (2005) 104 – 109.

[11] S. Stewart, *A new elementary function for our curricula?*, Australian Senior Mathematics Journal, 19 , 2 (2005) 8 – 26.

[12] S. R. Valluri, D. J. Jeffrey, R. M. Corless, *Some Applications of the Lambert W Function to Physics*, Canadian Journal of Physics, 78(9) (2000) 823 – 831.

[13] Y. Wang, *The Ricker wavelet and the Lambert W function*, Geophysical Journal International, 200, (2015) 111 – 115.

[14] B. W. Williams, *A Specific Mathematical Form for Wien's Displacement Law as vmax/T= constant*, Journal of Chemical Education, 91, (2014) 623 – 623.

[15] *Generalized Lambert function: 3D plots over the complex plane* http://functions.wolfram.com/ElementaryFunctions/ProductLog2/visualizations/2/

[16] *Iterated powers fractal >> Cleve's Corner: Cleve Moler on Mathematics and Computing* http://blogs.mathworks.com/cleve/2013/09/30/iterated-powers-fractal/

[17] *The Power Tower Fractal | ThatsMaths* https://thatsmaths.com/2016/04/14/the-power-tower-fractal/

[1] Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје
Машински факултет,
Оддел за математика и информатика
Карпош II бб, 1000 Скопје, Р. Македонија
e-mail: emilija.celakoska@mf.edu.mk

Примен: 30.03.2017
Поправен: 20.04.2017
Одобрен: 26.04.2017