

ЉУБОВТА КАКО ДИНАМИЧКИ СИСТЕМ

*Моника Пешевска*¹

*Александар Ѓурчиновски*¹

Нелинеарните динамички системи се мошне актуелна тема на проучување во математиката и физиката, и тие се присутни во математичките модели на речиси секој дел од природата и општеството. Промените во овие системи најчесто не се периодични и не се одвиваат по предвидлив закон, па затоа и нивната анализа опфаќа повеќе аспекти. Од самите срцеви и нервни клетки на човекот до струјните кола и проблемот на три тела, нелинеарните системи се среќаваат во голем број на области, вклучувајќи ја и економијата, екологијата, географијата, оптиката како и многу други. Со цел да се дојде поблизу до точното решение на системот и да се најде начин како најдобро да се определи неговото поведење, се анализираат квалитативните промени во системот до кои доаѓа кога има мала промена во системските параметрите. Овие промени се наречени бифуркации. Тие се претставуваат на таканаречен бифуркационен дијаграм со цел да се има увид во однесувањето на системот и неговата историја. Анализата на овие системи ги опфаќа и зависностите кои постојат меѓу самите променливи кои го дефинираат системот, па за таа цел тие се претставуваат во фазна рамнина. На тој начин можеме да видиме како зависи, на пример, бројот на бактерии од количеството на хранливи материи, или, пак, како зависи љубовта на една индивидуа од чувствата на другата индивидуа ([2]).

1. НЕЛИНЕАРНА ДИНАМИКА НА ЉУБОВТА

Професорот Стивен Строгац, американски професор на катедрата по применета математика на универзитетот Корнел, е еден од луѓето кои ја прочувале нелинеарната динамика која се појавува во една љубовта афера помеѓу двајца партнери ([1]). Во реалноста одредена љубовна врска зависи од повеќе нешта. Целта на секое наредно обработување на оваа тема е токму добивањето на што пореален модел во кој би се внеле соодветни константи и променливи кои би биле аналогни на одредено надворешно влијание врз некоја љубовна врска. Кај системите кои го опфаќаат човекот и

неговите одлуки потребно е да се внимава на сложеноста на процесот на оформување и носење одлука бидејќи луѓето истовремено анализираат повеќе надворешни влијанија. Чувствувањето повеќе чувства истовремено, како и чувствувањето чувства кои се целосно противречни, доведува до речиси непредвидливо однесување на индивидуата, а со тоа, речиси непредвидлив тек на поведението на системот.

Колку повеќе се внесуваат влијанијата на надворешните фактори во системот, толку повеќе се доближуваме до реалниот модел, а и толку повеќе тој се комплицира. Веројатноста да се појави динамички хаос во ваквите континуирани динамички системи е значително голема, па затоа се тргнува од систем во кој се занемарени надворешните фактори меѓу кои е и мислењето на пријателите и останатите блиски луѓе.

Професорот Спрот, професор по физика на Висконскиот универзитет во Медисон, започнал со разгледување на наједноставниот модел – модел во кој љубовната афера зависи единствено од чувствата на самите индивидуи коишто учествуваат во врската. Во својот текст, тој ја разгледува динамиката на љубовната афера на Ромео и Јулија, а потоа и на третиот партнер Гиневра.

Во овој текст ние воведуваме ([3]) љубовен пар од еден од 50 најдобри цртани филмови на сите времиња: Попај и Олива.

$$\frac{dP}{dt} = cO + dP \qquad \frac{dO}{dt} = aO + bP \qquad (1)$$

Во (1) се претставени диференцијалните равенки со кои се опишува променливоста во чувствата на Попај, односно на Олива. Кај овие равенки решението не е конкретен број туку точно определена функција според која се менува одредена променлива. За функцијата да биде еднозначно определена потребно е да ги знаеме почетните услови на системот (1). Во нашиот случај, променливите во диференцијалните равенки се: љубовта на Олива кон Попај, која ја означуваме со **O**, односно љубовта на Попај кон Олива, која ја означуваме со **P**. Променливите **O** и **P** може да имаат и позитивни и негативни вредности, при што ако тие се поголеми од нула, тогаш тоа претставува количество љубов во дадено време, а ако се помали од нула, тогаш тоа е омраза. Ако, пак, вредностите на **P** и **O** се еднакви на нула, тогаш станува збор за апатија. За овие променливи има точно одредена законитост по која тие се менуваат со текот на

времето t и тоа е дадено со изразите $cO + dP$, односно $aO + bP$, на десната страна од системот на диференцијални равенки (1). Овој систем е линеарен дводимензионален систем токму поради едноставната линеарна законитост по која се менуваат двете променливи O и P со времето. Едноставноста произлегува од претпоставката дека текот на љубовната афера зависи само од чувствата кои партнерите ги имаат еден за друг. Параметрите a, b, c и d се веројатно најзначајниот дел од диференцијалната равенка бидејќи од нивните вредности зависи како ќе се одвива љубовната афера. Напоменуваме дека параметарот d не треба да се поврзува со употребата на d во изразите $\frac{dP}{dt}$ односно $\frac{dO}{dt}$. Во овие изрази d е ознака за диференцијал.

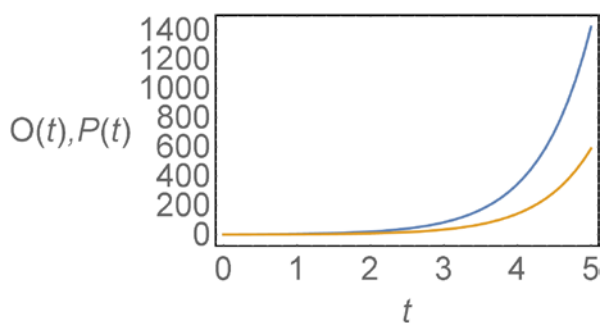
2. ЗНАЧЕЊЕТО НА ЉУБОВНИТЕ СТИЛОВИ

Четири параметри a, b, c и d од системот равенки (1) всушност ни даваат четири различни романтични стилови односно ни покажуваат како се однесува индивидуата во љубовната врска. Направена е анализа на чувствата на Олива во зависност од параметрите a и b . И за Попај важи истата дискусија, при што неговиот романтичен стил е опишан со другите два параметра c и d .

- **Љубовција ($a > 0, b > 0$)** – Олива е охрабрена и од своите чувства кон Попај и од чувствата на Попај кон неа за да преземе нешто во врска со нивната љубовна афера. Како пример за ваквиот тип на романтичен стил е Дон Жуан, лик од литературата кој е препознатлив како исклучителен љубител на жени.
- **Самобендисан чудаќ (бубалица) ($a > 0, b < 0$)** – Олива е поттикната од своите чувства кон Попај, но е обесхрабрена од неговите чувства кон неа. Пример е данскиот филозоф Сорен Кјеркегор кој иако бил силно вљубен во својата свршеница Регина, сепак ја оставил сметајќи дека таа никогаш нема да може да биде среќна со човек каков што е тој. До крајот на својот живот Кјеркегор никогаш не бил со ниту една друга жена.
- **Претпазлив љубовник ($a < 0, b > 0$)** – Олива е обесхрабрена од своите чувства, но чувствата на Попај ја охрабруваат. Најголем дел од луѓето спаѓаат токму во оваа група.
- **Осаменик ($a < 0, b < 0$)** – Олива негативно реагира и на своите чувства и на чувствата на Попај кон неа. Како пример го

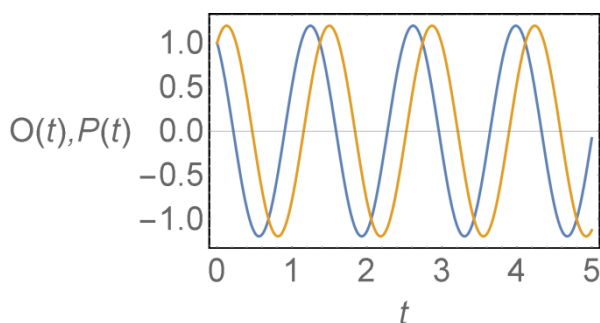
посочуваме Раскољников кој живеејќи во беда е растргнат меѓу она што е морално и неморално, она што смета дека го заслужува или не го заслужува. Токму затоа тој сметал дека не ја заслужува љубовта на девојката Соња и пробувал да ја отргне од себе, како и да ги поттисне своите чувства.

Во зависност од романтичните стилови можни се различни промени на променливите O и P со текот на времето. Во програмскиот пакет Wolfram Mathematica направени се решенија на системот равенки (1) за неколку вредности на параметрите a, b, c и d , Слики 1–4. На графиците со сина боја е означена промената на променливата O , а со портокалова боја промената на променливата P .



Слика 1. $a=1, b=1, c=1, d=-1$

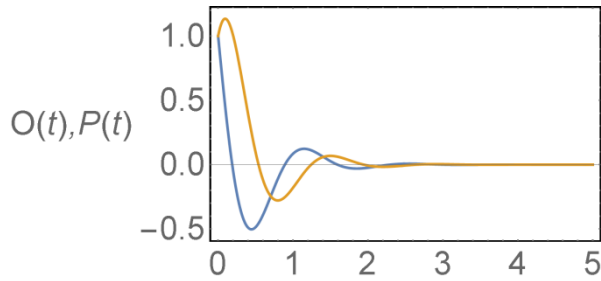
Олива е љубовција, Попај е претпазлив љубовник.



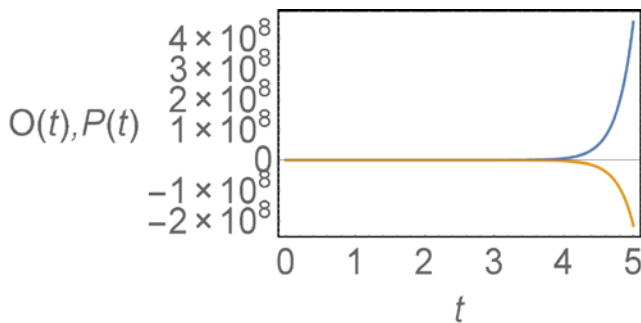
Слика 2. $a=2, b=-5, c=5, d=-2$

Олива е самобендисан чудаќ, Попај е претпазлив љубовник.

Љубовта како динамички систем



Слика 3. $a=-2, b=-4, c=5, d=-2$
Олива е осаменик, Попај е претпазлив љубовник.

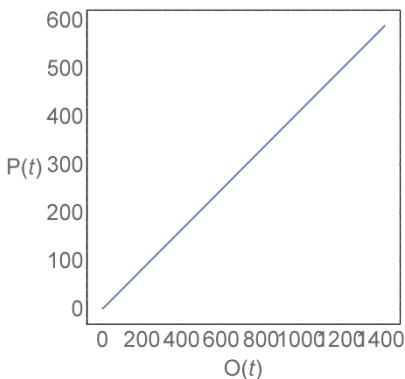


Слика 4. $a=-2, b=-5, c=-3, d=-2$
Олива е самобендисан чудак, Попај е осаменик.

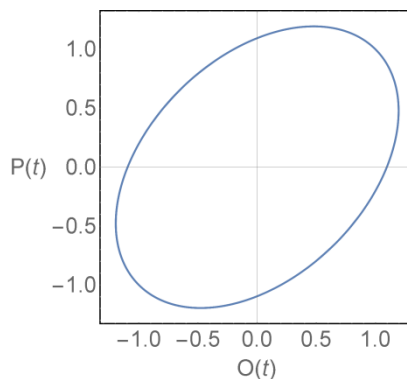
На Слика 1 е прикажан случај во кој љубовта на Олива, а и љубовта на Попај растат со текот на времето. На Слика 2 се појавува периодичност, односно одреден период Олива го сака Попај, а одреден период го мрази. Исто така, Попај одреден период ја сака Олива, а одреден период ја мрази. Ова е пример за периодично движење. На Слика 3 е прикажан случај во кој првенствено и љубовта на Олива и љубовта на Попај опаѓа со времето, па потоа одреден период расте за на крајот чувствата да преминат во апатичност. Со текот на времето, системот асимптотски се стреми кон фиксна точка, која што се наоѓа во координатниот почеток на фазната рамнина. На Слика 4, љубовта на Олива расте со текот на времето, но љубовта на Попај кон Олива опаѓа. Овие графици ја претставуваат промената на променливите со текот на времето. Нив можеме да ги претставиме на график на кој ќе ја прикажеме зависноста на едната променлива од другата односно во овој случај тоа е зависноста на

променливата P од променливата O . Овие промени ги претставуваме во таканаречена фазна рамнина.

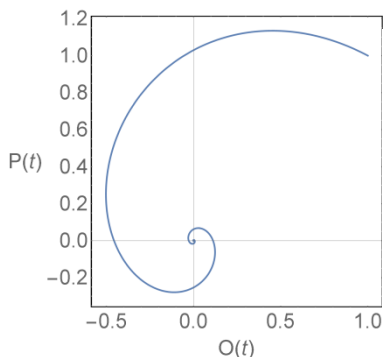
Фазните рамнини на четирите (погоре прикажани) случаи на сликите 1–4 се прикажани соодветно од а) до г):



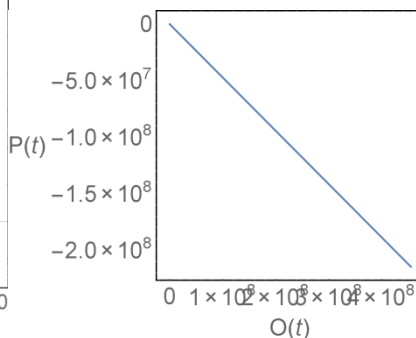
а)



б)



в)



г)

Слика 5. Фазните рамнини на случаите од Сликите 1 – 4.

Во психологијата, канадскиот психолог Џон Алан Ли го создал таканареченото колоритно тркало на љубовта. Во ова тркало има три примарни (*Eros*, *Ludus* и *Storge*) и три секундарни романтични стилови (*Mania*, *Pragma* и *Agape*). Но, овие романтични стилови опфаќаат многу повеќе карактеристики на самата личност, т.е. тие се тесно поврзани со карактерот на личноста.

3. ЛУБОВНИ ТРОЈКИ

Со воведувањето на трет партнер во љубовната афера, димензионалноста на системот станува поголема од два, а тоа значи посложени системи на диференцијални равенки и многу веројатна појава на хаос во динамиката на љубовната афера доколку врските меѓу партнерите се нелинеарни од математички аспект. Во овој случај, линеарните диференцијални равенки се заменуваат со нелинеарни диференцијални равенки за поверодостојно опишување на интеракцијата помеѓу партнерите. Во нашиот случај, го воведуваме третиот партнер Дибек.

Комплицираноста на случајот е многу голема доколку ги земеме чувствата на секој од партнерите во љубовниот триаголник спрема другите двајца. Ќе биде потребно да разгледуваме 6 димензионален систем, односно систем со 6 временски променливи. За поедноставување и намалување на димензионалноста на системот, се претпоставува дека Попај и Дибек не знаат еден за друг. Исто така, Олива го има истиот романтичен стил и кон двата љубовника – таа е еднакво заинтересирана за двајцата. Ситуацијата уште повеќе се поедноставува доколку земеме дека чувствата на Попај за Олива влијаат на чувствата на Олива за Дибек спротивно од начинот на кој што влијаат чувствата на Дибек за Олива од чувствата на Олива за Попај. Во најпрост линеарен случај, тоа во математичка форма може да се претстави со линеарниот систем од четири диференцијални равенки (2):

$$\frac{dO_P}{dt} = aO_P + b(P - D)$$

$$\frac{dP}{dt} = cO_P + dP$$

$$\frac{dO_D}{dt} = aO_D + b(D - P)$$

$$\frac{dD}{dt} = eO_D + fD \quad (2)$$

Тука O_P е променлива која ја карактеризира љубовта на Олива кон Попај, O_D е љубовта на Олива кон Дибек, P е љубовта на Попај кон Олива, а D е љубовта на Дибек кон Олива.

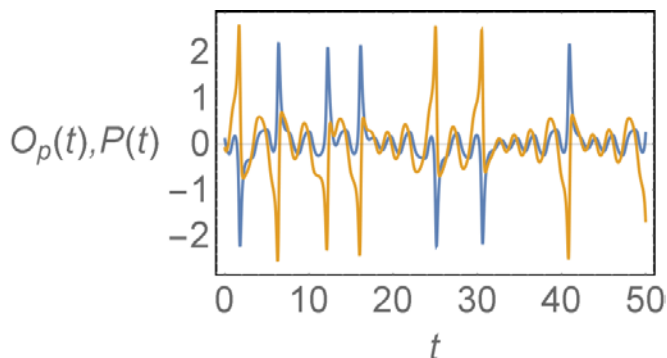
Но ние ќе одиме чекор понатаму и ќе разгледаме специфична модификација на овој систем кој ќе опишува нелинеарен љубовен триаголник, земајќи ги предвид нелинеарните ефекти на романтичната динамика на Олива кон нејзините љубовници Попај и Дибек. Нелинеарниот систем на ваквата врска е зададен во (3):

$$\begin{aligned}\frac{dO_P}{dt} &= aO_P + b(P - D)(1 - |P - D|) \\ \frac{dP}{dt} &= cO_P(1 - |O_P|) + dP \\ \frac{dO_D}{dt} &= aO_D + b(D - P)(1 - |D - P|) \\ \frac{dD}{dt} &= eO_D(1 - |O_D|) + fD\end{aligned}\tag{3}$$

Дополнителните множители кои ги вметнавме во однос на линеарниот систем имаат реална смисла. На пример, во втората равенка, наместо членот cO_P ја имаме логистичката поправка $cO_P(1 - |O_P|)$, чиешто значење е следно: во линеарниот случај, позитивната вредност за параметарот c би значела дека Попај е охрабрен од љубовта на Олива кон него и како таа љубов расте, расте и охрабреноста на Попај кон таа врска. Меѓутоа, во нелинеарниот систем дополнителниот множител $(1 - |O_P|)$ предизвикува охрабреноста на Попај да има нелинеарно поведење, односно ако љубовта на Олива кон Попај е претерана, тој се обесхрабрува од таквиот однос и започнува да ја избегнува. Спротивно, доколку Олива претерано го мрази Попај, тој е охрабрен од таквиот однос на Олива кон него и започнува да искажува симпатии кон неа, иако пред тоа ја избегнувал, односно ја мразел. Ова поведење одговара на реалните ситуации, кога претераната љубов, односно омраза на еден од партнерите во врската, буди спротивни чувства кај другиот партнер. Во конкретниот нелинеарен случај за одредени параметри на системот се појавува хаотична динамика на романтичното поведење, што се согледува во чувствителноста на романтичното поведење на љубовниците од почетните услови.

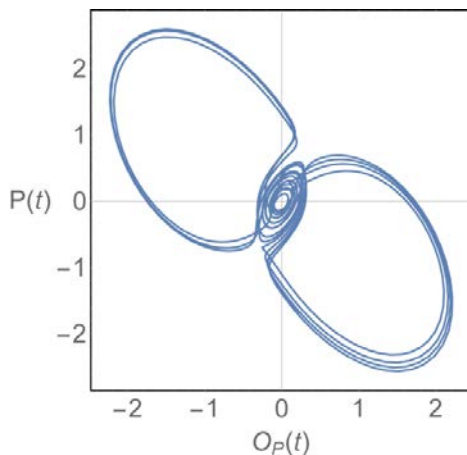
Графичкиот приказ на променливите O_P и P во зависност од времето се прикажани на Слика 6. Параметрите на романтичните стилови на тројцата љубовници изнесуваат : $a = -3$, $b = 4$ (Олива е

претпазлив љубовик), $e = 2$ and $f = -1$ (Дибек е претпазлив љубовник) и $c = -7$ и $d = 2$ (Попај е самобендисан чудаќ).



Слика 6. Динамиката на романтичните стилови на Попај и Олива во љубовен триаголник со Дибек. Со сино е означена промената на променливата O_p , а со портокалова боја е означена промената на променливата P .

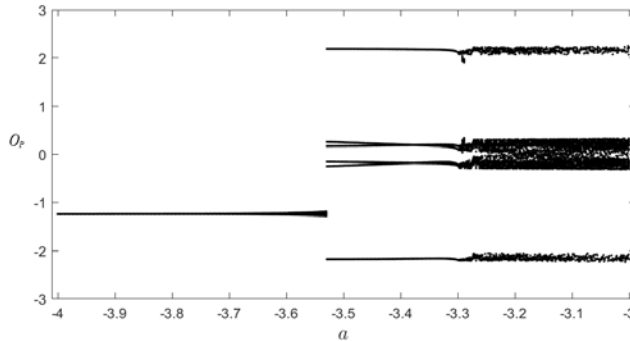
Приказот на динамичкото поведење на овие параметри во фазна рамнина е даден на Слика 7.



Слика 7. Динамиката на романтичните стилови на Попај и Олива во фазна рамнина. Се појавува таканаречен „чуден атрактор“.

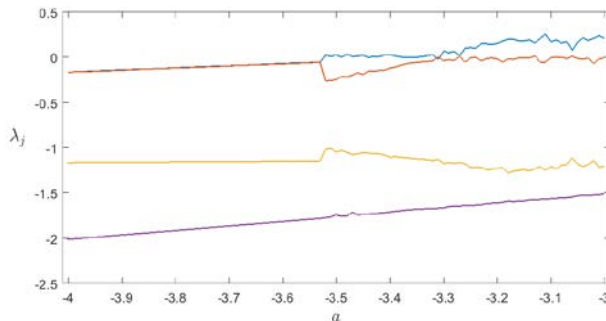
Тука се забележува дека фазната траекторија за овие параметри има комплицирана структура. Подеталното испитување на траекторијата во рамките на нелинеарната динамика кажува дека таа конвергира кон „чуден атрактор“ при што променливите се менуваат непериодично и се ограничени во фиксен фазен волумен. Во нашиот случај, добивме чуден атрактор за веќе запишаните вредности на

параметрите **a**, **b**, **c**, **d**, **e** и **f**. Доколку го менуваме само параметарот **a**, а другите ги чуваме фиксни, тогаш за одредени вредности на параметарот **a** чудниот атрактор преминува во периодична орбита, а со понатамошно менување на **a**, периодичната орбита преминува во стабилна фиксна точка. Ваквите промени во системот при дадена вредност на некој контролен параметар, во случајов параметарот **a**, се наречени бифуркации (Слика 8).



Слика 8. Бифуркационен дијаграм во зависност од параметарот **a**. Доколку ја зголемуваме вредноста на параметарот **a**, добиваме неколку типа на бифуркација. За вредност на параметарот $a \approx -3,52$, имаме премин од фиксна точка кон периодична орбита. Кога $a \approx -3,28$, периодичната орбита преминува во хаотичен (чуден) атрактор.

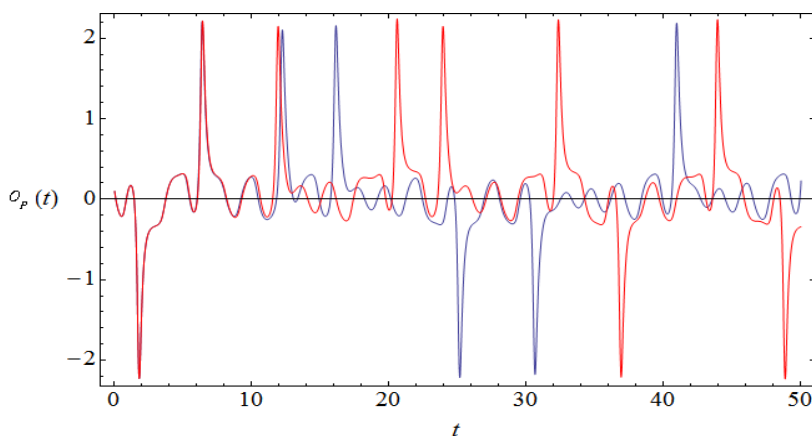
Чудниот атрактор има нецелобројна (фрактална) димензија и поседува еден експонент на Љапунов поголем од нула, што укажува на хаотичното поведење на системот за ваквиот романтичен стил на љубовниците, Слика 9:



Слика 9. Приказ на спектарот на експонентите на Љапунов во зависност од параметарот **a**.

"Ефектот на пеперутка" е појава во нелинеарната динамика при која чувствителноста на динамиката на хаотичниот систем од почетните услови доведува до значајни промени во развојот на системот. Во првиот случај имаме точно определени вредности за почетните услови и имаме едно поведење на системот. Но, со промена на почетните услови за многу мали вредности, по некое време системот повеќе нема да го има истото поведење како во првиот случај.

На Слика 10 се прикажани две поведенија на љубовта на Олива кон Попај, каде што црвената крива одговара на почетни услови коишто многу малку се разликуваат во однос на сината крива (за околу 0,1 %).



Слика 10. "Ефект на пеперутка" кај љубовта на Олива кон Попај.

Иако промената на почетните услови е незначителна и на почетокот нема разлика, романтичното поведење на Олива кон Попај значително е променето по одредено време.

4. ЗАКЛУЧОК

Динамиката на љубовните афери е мошне интересна област за истражување во физиката на нелинеарните системи. Всушност, резултантното поведење и не е многу далеку од реалноста. Двомензионалните системи никогаш не се хаотични, па кај нив нема појава на чудни атрактори. Најкомплицираниот случај кај ваквиот систем е периодичната орибита односно периодичното „сакање и мразење“ на Попај и Олива. На пример, Олива првата недела го сака Попај, втората го мрази, третата повторно го сака, па четвртата повторно го мрази и ваквите промени постојано се повторуваат. Но,

доколку промената на љубовта на Олива кон Попај се случува на непериодичен начин (на пример, Олива првата недела го сака Попај, па потоа три дена го мрази, па два дена го сака, па пет месеци го мрази...) тоа веќе укажува на постоење на трето лице во оваа врска. Она што останува е да се запрашаме како би изгледал системот доколку имаме повеќе од тројца партнери и сите тие знаат еден за друг. Можеби нивното проучување ќе доведат до нови и уште поинтересни сознанија за динамиката на љубовните афери, па и општо, за нелинеарната динамика во физиката.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Julien C. Sprott, *Dynamical models of love*, Journal of Nonlinear Dynamics, Psychology and Life Sciences, 8 (2004) 303 – 313.
- [2] Steven H. Strogatz, *Nonlinear dynamics and chaos: With applications to physics, biology, chemistry and engineering*, Perseus Books, 1994.
- [3] М. Пешевска, А. Ѓурчиновски, *Нелинеарната динамика на љубовните афери*, Портал ПОИМ на Институтот за математика, ПМФ, Скопје, 3 август 2016,
<http://poim-pmf.weebly.com/ljubovni-aferi.html>

¹ Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје
Природно-математички факултет,
Институт за физика
ул. Архимедова 3, 1000 Скопје, Р. Македонија
e-mail: monika.pesevska@gmail.com
e-mail: aleksandar.gjurchinovski@gmail.com

Примен: 30.12.2016
Поправен: 28.02.2017
Одобрен: 15.03.2017