О ОДРЕЂИВАЊУ ОПЕРАТОРА МОМЕНТА КОЛИЧИНЕ КРЕТАЊА У КВАНТНОЈ МЕХАНИЦИ[1])

Т. П. Анђелић (Београд)

У уџбеницима квантне и таласне механике се квадрат

$$M^2 = -\frac{h^2}{4\pi^2}(\mathbf{r}\times\nabla)\cdot(\mathbf{r}\times\nabla) \tag{1}$$

интензитета оператора момента количине кретања (импулсног момента)

$$\mathbf{M} = \frac{h}{2\pi i}(\mathbf{r}\times\nabla),$$

где као обично $\mathbf{r}$ обележава вектор положаја а ∇ Хамилтонов оператор, израчунава редовно полазећи од Декартових правоуглих координата овог момента. То значи полази се од

$$M_x = \frac{h}{2\pi i}\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

$$M_y = \frac{h}{2\pi i}\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right),$$

$$M_z = \frac{h}{2\pi i}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right).$$

Међутим, тај начин има својих незгода. Наиме, врло често треба одредити вредност квадрата интензитета овог оператора у неким другим координатама, па се онда морају

---

[1]) У овом „Билтену“ књ. V, 1954 год. стр. 55—56, објавио је Јосип Мозер чланак: „Један начин одређивања момента импулса у валној механици“ у коме је приказао један начин развијања израза за квадрат интензитета импулсног момента. Међутим, тај његов начин је у најмању руку *необразложен*.

вршити дугачке трансформације. Израз (1) развијен и написан у неком простијем векторском облику би овај посао знатно олакшао, али се и то развијање избегава и не налази по уџбеницима стога што се појављује оператор ∇ који је и диференцијални оператор и отежава такво развијање. Стога сматрам да није без интереса показати како се израз на десној страни од (1) може релативно кратким поступком написати у простијем облику који је згоднији за даљу употребу.

У ту сврху употребићемо прво само операције које су дефинисане у обичном векторском рачуну и ставити

$$(\mathbf{r}\times\nabla)\cdot(\mathbf{r}\times\nabla)=\Lambda. \tag{2}$$

Види се, кад се узме у обзир да је ∇ и диференцијални оператор, да у овом изразу треба оператор $\mathbf{r}\times\nabla$ применити скаларно на производ десно, тј. на сам тај оператор. Тада, ако по обичају сваки члан производа десно на који оператор ∇ не треба применити обележимо на неки начин, напр. подвучемо цртом, може се израз (2) написати

$$(\mathbf{r}\times\nabla)\cdot(\mathbf{r}\times\nabla)=(\mathbf{r}\times\nabla)\cdot(\underline{\mathbf{r}}\times\nabla)+(\mathbf{r}\times\nabla)\cdot(\mathbf{r}\times\underline{\nabla}). \tag{3}$$

Овај се израз сад на основу познатих правила векторског рачуна, строго водећи рачуна о томе на које се чланове оператор ∇ примењује а на које не, трансформише даље на наредни начин

$$(\mathbf{r}\times\nabla)\cdot(\underline{\mathbf{r}}\times\nabla)=r^2\,\nabla^2-(\mathbf{r}\cdot\nabla)\,(\underline{\mathbf{r}}\cdot\nabla)=r^2\,\Delta-\mathbf{r}\cdot[\nabla\,(\underline{\mathbf{r}}\cdot\nabla)]=$$
$$=r^2\,\Delta-\mathbf{r}\,[\nabla\,(\mathbf{r}\cdot\nabla)-\nabla]=r^2\,\Delta-(\mathbf{r}\cdot\nabla)^2+\mathbf{r}\cdot\nabla,$$

где је $\nabla^2=\Delta$ Лапласов оператор. Осим тога, пошто је

$$\nabla\,(\mathbf{r}\cdot\underline{\nabla})=\nabla,$$

биће

$$\nabla\,(\mathbf{r}\cdot\nabla)=\nabla\,(\underline{\mathbf{r}}\cdot\nabla)+\nabla\,(\mathbf{r}\cdot\underline{\nabla})=\nabla\,(\underline{\mathbf{r}}\cdot\nabla)=\nabla,$$

а одатле се одмах добива

$$\nabla\,(\underline{\mathbf{r}}\cdot\nabla)=\nabla\,(\mathbf{r}\cdot\nabla)-\nabla.$$

Са друге стране имамо

$$(\mathbf{r}\times\nabla)\cdot(\mathbf{r}\times\underline{\nabla})=[(\mathbf{r}\times\nabla)\times\mathbf{r}]\cdot\underline{\nabla}=[\nabla\,(\mathbf{r}\cdot\underline{\mathbf{r}})-\mathbf{r}\,(\nabla\cdot\mathbf{r})]\cdot\underline{\nabla}=$$
$$=(\mathbf{r}-3\,\mathbf{r})\cdot\nabla=-2\,(\mathbf{r}\cdot\nabla),$$

јер је

$$\nabla(\mathbf{r}\cdot\underline{\mathbf{r}})=\mathbf{r} \quad \text{и} \quad \nabla\cdot\mathbf{r}=3,$$

а диференцијалне операције се овде завршавају у потпуности у угластој загради.

Кад се овако израчунате вредности израза са десне стране једнакости (3) унесу на њихова места добива се тражени облик за (2)

$$(4) \qquad \Lambda=(\mathbf{r}\times\nabla)\cdot(\mathbf{r}\times\nabla)=r^2\Delta-(\mathbf{r}\cdot\nabla)^2-\mathbf{r}\cdot\nabla.$$

До истог резултата се може доћи и нешто друкчијим путем, а само развијање се може нешто упростити и скратити, ако се искористи и дефиниција дијадског множења вектора.

Израз (4) је напр. врло подесан за брзо израчунавање квадрата нашег оператора у сферним координатама

$$x=r\sin\vartheta\cos\varphi,\ y=r\sin\vartheta\sin\varphi,\ z=r\cos\vartheta.$$

Тада је

$$\mathbf{r}=\{r,o,o,\},\ \nabla=\left\{\frac{\partial}{\partial r},\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta},\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right\},$$

па ће бити

$$\mathbf{r}\cdot\nabla=r\frac{\partial}{\partial r} \quad \text{и} \quad (\mathbf{r}\cdot\nabla)^2=r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)=r\frac{\partial}{\partial r}+r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2},$$

дакле,

$$\Lambda=r^2\Delta-r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}-2r\frac{\partial}{\partial r}=r^2\Delta-\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right).$$

Кад се узме у обзир вредност Лапласовог оператора Δ у сферним координатама, добива се лако

$$\Lambda=\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

Међутим ни израз (4) за оператор Λ, који омогућује одређивање квадрата интензитета оператора импулсног момента, није увек подесан за употребу у случају криволиниских координата. Стога ћемо потражити израз за овај оператор у тензорском облику који ће онда важити за произвољне координате.

Ради тога треба, прво, наћи тензорски облик израза $\mathbf{u}=\mathbf{r}\times\nabla$. Узећемо да су r^i $(i=1,2,3)$ контраваријантне координате вектора положаја $\mathbf{r}$ према произвољном систему генералисаних координата x^i у тродимензионом Еуклидовом простору. Оператор ∇ имаће тада уопште узев координате $\frac{D}{Dx^i}$, где смо овим симболом означили коваријантни извод по x^i. При томе је јасно да се координате оператора ∇ своде на $\frac{\partial}{\partial x^i}$, тј. на обичне парцијалне изводе по генералисаним координатама x^i, кад се овај оператор примењује на скаларне функције. После овога може се у уоченом простору, како је познато, помоћу система e^{ijk} векторском производу $\mathbf{r}\times\nabla$ координирати релативни контраваријантни вектор

$$u^i = e^{ijk}\, g_{mj}\, r^m \frac{D}{Dx^k},$$

где је g_{ij} основни метрички тензор простора, а сви индекси узимају вредност 1, 2, 3.

Да бисмо најзад нашли тензорски израз који одговара скаларном производу

$$(\mathbf{r}\times\nabla)\cdot(\mathbf{r}\times\nabla) = (u)^2 = \Lambda,$$

где $(u)^2$ обележава квадрат интензитета оператора $\mathbf{r}\times\nabla$, искористићемо дефиницију скаларног производа у тензорском рачуну према којој ће бити

$$\Lambda = u^i\, u_i. \tag{5}$$

Релативни коваријантни вектор u_i може се написати сад помоћу система e_{ijk} у облику

$$u_i = e_{ijk}\, r^j\, g^{kl} \frac{D}{Dx^l},$$

где је g^{ij} контраваријантни метрички тензор.

Преме томе, на основу (5), тражени тензорски облик нашег оператора Λ биће

$$\Lambda = e^{ijk}\, e_{ipq}\, g_{mj}\, r^m \frac{D}{Dx^k}\left(r^p g^{ql}\frac{D}{Dx^l}\right) = \tag{6}$$

$$= \delta^{jk}_{pq}\, g_{mj}\, r^m \frac{D}{Dx^k}\left(r^p\, g^{ql}\frac{D}{Dx^l}\right),$$

где је δ^{jk}_{pq} Кронекеров делта-симбол четвртог реда, а сви индекси опет узимају вредности 1, 2, 3.

Најзад, у случају кад се оператор $M^2 = -\frac{h^2}{4\pi}\Lambda$. примењује на скаларне функције положаја, односна вредност оператора Λ биће

$$\Lambda = \delta^{jk}_{pq}\, g_{mj}\, r^m \frac{D}{Dx^k}\left(r^p g^{ql} \frac{\partial}{\partial x^l}\right).$$

ON THE DETERMINATION OF THE ANGULAR MOMENTUM OPERATOR IN QUANTUM MECHANICS

T. P. Angelitch, (Beograd)

The square of the angular momentum operator

$$M^2 = -\frac{h^2}{4\pi^2}\Lambda,$$

where it is

$$\Lambda = (\mathbf{r}\times\nabla)\cdot(\mathbf{r}\times\nabla),$$

can by simple vectorial operation be developed and written as follows

$$\Lambda = \mathbf{r}^2\Delta - (\mathbf{r}\cdot\nabla)^2 - \mathbf{r}\cdot\nabla.$$

On the other side using the contravariant coordinates r^i of the position vector, for the some operator is obtained the following expression which is suitable for any system of coordinates whatever

$$\Lambda = \delta^{jk}_{pq}\, g_{mj}\, r^m \frac{D}{Dx^k}\left(r^p g^{ql} \frac{D}{Dx^l}\right),$$

resp. when this operator is applied to a scalar function of position

$$\Lambda = \delta^{jk}_{pk}\, g_{mj}\, r^m \frac{D}{Dx^k}\left(r^p g^{ql} \frac{\partial}{\partial x^l}\right).$$

Here denotes g_{ij} the fundamental metric tensor of euclidean three dimensional space, $\frac{D}{Dx^i}$ the covariant derivatives with respect to the general coordinate x^i and δ^{jk}_{pq} the Kronecker symbol of the fourth order.
