## БРОЈНИ ФУНКЦИИ ОД ВТОР РЕД

**Математички гласник, Скопје, 1983, 3-15**

Теоријата на броевите во доказите сврзува голем број идеи и методи. Притоа, постојат два основни принципи на кои се обрнува посебно внимание. Првиот е дека секое непразно множество од позитивни цели броеви има најмал елемент. Вториот принцип е математичката индукција, којашто е логична последица од првиот и може да се искаже на следниов начин: ако едно множество од цели позитивни броеви го содржи целиот број 1, и го содржи n+1 секогаш кога го содржи n, тогаш множеството се состои од сите цели позитивни броеви.

Во оваа работа разгледуваме некои својства од теоријата на броевите кои се однесуваат на посебен вид аритметички функции наречени рекурзивни функции. Овие функции претставуваат интерес бидејќи опфаќаат задачи кои се јавуваат во елементарната математика и кои се наоѓаат во опширната популарна математичка литература. Нив ги има во повеќе варијанти и допуштаат обопштување или сврзување со други проблеми. Како пример, само, ја наведуваме теоријата за броевите на Фибоначи (Fibonacci), која произлегува од познатиот „проблем на питомите зајаци" и се јавува во многу други математички гранки, како што е геометријата - златен триаголник, математичката биологија - теоријата на растењето*, информатиката - теоријата за испитување** итн.

1. Дефиниција. Бројна функција од втор ред ја викаме функцијата $f(n)$ определена на множеството на целите ненегативни броеви со дадени почетни вредности $f(0)$ и $f(1)$ и рекурзивната релација

$$f(n+1) = pf(n) - qf(n-1), \tag{1}$$

каде што $p,q,f(0)$ и $f(1)$ се произволно дадени броеви.

На овој начин $f(n)$ е еднозначно определена и зависи само од $p,q,f(0)$ и $f(1)$.

Наместо $f(n)$ за поголема удобност пишуваме $W_n$ и ставаме $f(0) = W_0$, $f(1) = W_1$. Тогаш релацијата (1) го добива обликот

$$W_{n+1} = pW_n - qW_{n-1}, \qquad n \geq 1. \tag{2}$$

За да добиеме попроста врска, последнава релација ја пишуваме во обликот

* Примена во филотоксијата, дел од морфологијата на растенијата што ги остранува правилностите во распределбата на листовите на стеблото.

** Оваа Теорија е развиена во време на Втората светска војна за воени цели за кои и денес се користи предимно. Но, се разбира, таа се вклучува и за мирољубиви цели како, на пример, за наоѓање на рибни јата (роеви).

$$W_{n+1} - xW_n = (p-x)(W_n - xW_{n-1}) - (x^2-px+q)W_{n-1}.$$

Ако $a$ и $b$ се корените на равенката $x^2-px+q=0$, тогаш $a+b=p$, па имаме

$$W_{n+1} - aW_n = b(W_n - aW_{n-1}),$$
$$W_{n+1} - bW_n = a(W_n - bW_{n-1}).$$

Оттука, бидејќи $W_n - aW_{n-1} = b(W_{n-1} - aW_{n-2})$ итн., добиваме:

$$W_{n+1} - aW_n = b^n(W_1 - aW_0),$$
$$W_{n+1} - bW_n = a^n(W_1 - bW_0).$$

Одземајќи ги овие равенства, добиваме

$$(b-a)W_n = (W_1 - aW_0)b^n - (W_1 - bW_0)a^n.$$

Затоа, при $a \neq b$ имаме

$$W_n = \frac{(W_1-aW_0)b^n - (W_1-bW_0)a^n}{b-a}. \tag{3}$$

Направо за $a=b$, од формулата

$$W_{n+1} - aW_n = b^n(W_1 - aW_0),$$

добиваме

$$W_n = nW_1a^{n-1} - (n-1)W_0a^n. \tag{4}$$

Значи, ги најдовме формулите за $W_n$ во двата случаи. Ако $p,q,W_0$ и $W_1$ се цели броеви, такви ќе бидат, поради (2) и сите $W_n$

2. Функции $U_n$ и $V_n$. Во зависност од почетните услови разликуваме посебни бројни функции. Ги уочуваме следниве две, коишто се јавуваат како основни во теоријата на бројните функции од втор ред:

$$U_{n+1} = pU_n - qU_{n-1}, \quad U_0=0, \quad U_1=1.$$
$$V_{n+1} = pV_n - qV_{n-1}, \quad V_0=2, \quad V_1=p.$$

Општата функција $W_n$ се изразува со помош на почетните вредности $W_0$ и $W_1$ и функциите $U_n$ и $V_n$ со една од формулите

$$W_n = W_1U_n - qW_0U_{n-1}$$
$$W_n = W_0U_{n+1} + (W_1 - pW_0)U_n.$$

Навистина, овие функции се проверени за $n=1,2$. Притоа, се знае дека секој алгебарски збир од бројни функции од ист ред, потчинети на едно исто рекурзивно правило, е исто така бројна функција од ист ред потчинета на истото правило. Посебно за функциите $U_n$ и $V_n$ имаме

$$V_n = pU_n - 2qU_{n-1},$$
$$V_n = 2U_{n+1} - pU_n.$$

Елиминацијата на $U_{n-1}$ од овие две формули ни позволува да ја изразиме функцијата $W_n$ како линеарна комбинација на $U_n$ и $V_n$

со формулата

$$2W_n = (2W_1-pW_0)U_n + W_0V_n.$$

Да забележиме уште дека, ако допуштиме за n било какви цели вредности, тогаш ги имаме релациите

$$U_{-n} = -q^{-n}U_n, \qquad V_{-n} = q^{-n}V_n. \tag{5}$$

3. Различни видови бројни функции. Според природата на дискриминантата

$$\Delta = p^2 - 4q$$

на равенката $x^2-px+q=0$, уочуваме различни видови бројни функции.

Најнапред да го разгледаме случајот $\Delta=0$. Добиваме дека

$$a = b, \quad p = 2a, \quad q = a^2.$$

Тогаш, според (4), не е тешко да се види дека

$$U_n = na^{n-1}, \qquad V_n = 2a^n.$$

Специјално за a=1 имаме

$$p = 2 \quad \text{и} \quad q = 1$$

па добиваме

$$U_n = n, \qquad V_n = 2$$

и функцијата $U_n$ ја претставува низата природни броеви.

Подвлекуваме дека забелешката во претходниот специјален случај е многу важна, бидејќи за сите изведени формули дава можност тие да се проверуваат, како и да се добијат попрости посебни формули.

Заклучуваме, за $\Delta=0$, општата функција $W_n$ се сведува било на аритметичка прогресија било на геометриска прогресија. Според тоа, секоја аритметичка или геометриска прогресија може да се разгледува како рекурзивна низа од втор ред.

Оставајќи го овој посебен, така наречен дегенериран случај, кога $\Delta=0$, да ги разгледаме различните случаи што се добиваат кога $\Delta\neq0$.

3.1°. Кога $\Delta$ е квадрат на еден цел број $\delta$, т.е. $\Delta=\delta^2$, триномот $x^2-px+q$ се разложува на линеарни фактори и имаме

$$x^2 - px + q = (x-a)(x-b),$$

каде што

$$a = \frac{p+\delta}{2}, \qquad b = \frac{p-\delta}{2}.$$

Тогаш $U_n$ и $V_n$, според (3), се изразуваат со формулите

$$U_n = \frac{a^n-b^n}{a-b}, \qquad V_n = a^n + b^n. \tag{6}$$

Непосредно оттука следува релацијата

$$U_{2n} = U_nV_n.$$

Посебно важен случај имаме за

$$p = 3, \quad q = 2$$

кога

$$\Delta = 1, \quad a = 2, \quad b = 1.$$

Според тоа,

$$U_n = 2^n-1, \quad V_n = 2^n+1.$$

Така, ги добиваме првите вредности на овие функции, што се познати под името низи на Ферма (Fermat)

$$(U_n(3,2)):0,1,3,7,15,31,...$$

$$(V_n(3,2)):2,3,5,9,17,33,...$$

3.2°. Во случајот кога $\Delta$ е цел позитивен број, којшто не е квадрат на цел број, триномот $x^2-px+q$ не се разложува на линеарни фактори.

На пример, ако

$$p = 1, \quad q = -1$$

тогаш

$$\Delta = 5, \quad a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad b = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

и ја добиваме низата, позната под името низа на Фибоначи

$$(U_n(1,-1)) \equiv (F_n):0,1,1,2,3,5,8,13,21,...$$

односно низата на Lucas

$$(V_n(2,1)) \equiv (L_n):2,1,3,4,7,11,18,29,...$$

Втор пример е, таканаречената низа на Пел (Pell), определена со

$$p = 2, \quad q = 1$$

за која $\Delta$=8. Имаме

$$(U_n(2,-1)):0,1,2,5,12,29,...$$

$$(V_n(2,-1)):2,2,6,14,34,82,...$$

3.3°. Ако е $\Delta$ негативен цел број се добиваат бројни функции од нов вид. Така, при претпоставка

$$p = 1, \quad q = 1,$$

за кои $\Delta$=-3, ја добиваме следнава низа

$$U_{3n} = 0, \quad U_{3n+1} = (-1)^n, \quad U_{3n+2} = (-1)^n,$$

$$V_{3n} = (-1)^n\cdot 2, \quad V_{3n+1} = (-1)^n, \quad V_{3n+2} = (-1)^{n+1}.$$

Во овој вид спаѓаат и, таканаречените конјугирани низи на Пел, определени со

$$p = 2, \quad q = 3$$

за кои $\Delta = -8$,

$$(U_n(2,3)):\ 0,1,2,1,-4,-11,-10,...$$

$$(V_n(2,3)):\ 2,2,-2,-10,-14,2,46,86,...$$

## 4. Развивање на $U_n$ и $V_n$

4.1°. Развивање по степените на p и q. Со помош на рекурзивната функција (точка 2), пресметувајќи ги вредностите на $U_n$ за $n=1,2,\ldots,$ уочуваме дека функцијата $U_n$ е хомоген полином од степен $(n-1)$ по p и q земајќи го p на прв степен а q на втор. Имаме

$$U_1 = 1, \quad U_2 = p, \quad U_3 = p^2-q, \quad U_4 = p^3-2pq, \quad U_5 = p^4-3p^2q+q^2,\ldots$$

или, со помош на индукција, добиваме дека

$$U_{n+1}(p,q) \equiv U_{n+1} = \sum_{r=0}^{[n/2]} (-1)^r C_{n-r}^r p^{n-2r} q^r .$$

На пример, за низата на Фибоначи имаме

$$U_{n+1}(1,-1) \equiv F_{n+1} = \sum_{r=0}^{[n/2]} C_{n-r}^r ,$$

а за низата природни броеви имаме

$$U_{n+1}(2,1) \equiv n+1 = \sum_{r=0}^{[n/2]} (-1)^r C_{n-r}^r 2^{n-2r}$$

Слично, за функцијата $V_n$ првите вредности се:

$$V_0 = 2, \quad V_1 = p, \quad V_2 = p^2-2q, \quad V_3 = p^3-3pq, \quad V_4 = p^4-4p^2q+2q^2,\ldots$$

или, со помош на математичка индукција, добиваме дека

$$V_n(p,q) \equiv V_n = p^n + \sum_{r=1}^{[n/2]} (-1)^r \frac{n}{r} C_{n-r-1}^{r-1} p^{n-2r} q^r .$$

4.2°. Развивање по степените на p и Δ. Од релациите

$$2a = p + \delta,$$

$$2b = p - \delta,$$

со степенување на двете страни, а потоа со собирање и вадење добиваме

$$2^{n-1}U_n = \sum_{r=0}^{[n/2]} C_n^{2r+1} p^{n-2r-1} \Delta^r ,$$

$$2^{n-1}V_n = \sum_{r=0}^{[n/2]} C_n^{2r} p^{n-2r} \Delta^r .$$

## 5. Обопштување на формулите

Видовме дека функциите $U_n$ и $V_n$ се изразуваат со формулите (6):

$$U_n = \frac{a^n-b^n}{a-b}, \qquad V_n = a^n + b^n,$$

во функција од двата броја a и b, при што

$$p = a+b, \qquad q = ab, \qquad \delta = a-b.$$

Ако наместо броевите a и b кои ги определуваат функциите $U_n$ и $V_n$ ги разгледуваме броевите $a^r$ и $b^r$, каде што r е произволен цел број, ги добиваме соодветните функции

$$U_n' = \frac{a^{nr}-b^{nr}}{a^r-b^r}, \qquad V_n' = a^{nr} + b^{nr}$$

и

$$p' = a^r + b^r, \quad q' = a^r b^r, \qquad \delta' = a^r - b^r$$

Од друга страна, ако замениме n со $n^r$ во (6) добиваме

$$U_{nr} = \frac{a^{nr}-b^{nr}}{a-b}, \qquad V_{nr} = a^{nr} + b^{nr}$$

па, значи, имаме

$$U_n' = \frac{U_{nr}}{U_r}, \qquad V_n' = V_{nr}$$

Но функциите $U_n'$ и $V_n'$ ги задоволуваат рекурзивните релации

$$U_{n+2}' = p'U_{n+1}' - q'U_n',$$
$$V_{n+2}' = p'V_{n+1}' - qV_n',$$

па, имаме

$$p' = V_r, \qquad q' = q^r, \qquad \Delta' = \Delta U_r^2.$$

Заклучуваме дека сите формули што ги содржат $U_n$ и $V_n$ односно $p, q$ и $\Delta$ може да се обопштат, заменувајќи во нив

$$U_n \text{ со } \frac{U_{nr}}{U_r}, \qquad V_n \text{ со } V_{nr},$$

и

$$p \text{ со } V_r, \qquad q \text{ со } q^r \quad \text{и} \quad \Delta \text{ со } \Delta U_r^2.$$

6. Адициони формули на аргументите.

6.1°. Од релациите

$$a^n - b^n = \delta U_n, \qquad a^n + b^n = V_n$$

наоѓаме

$$2a^n = V_n + \delta U_n, \qquad 2b^n = V_n - \delta U_n. \tag{7}$$

Според тоа

$$4a^{m+n} = V_mV_n + \Delta U_mU_n + \delta(U_mV_n+U_nV_m)$$
$$4b^{m+n} = V_mV_n + \Delta U_mU_n - \delta(U_mV_n+U_nV_m)$$

од каде што

$$\left.\begin{aligned} 2U_{m+n} &= U_mV_n + U_nV_m \\ 2V_{m+n} &= V_mV_n + \Delta U_mU_n. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Овие формули овозможуваат наоѓање на вредностите на U и V за аргумент m+n кога се знаат вредностите на U и V за аргумент m односно n.

Со заменување на n со -n, земајќи ги предвид релациите $U_{-n} = -q^{-n}U_n$ и $V_{-n} = q^{-n}V_n$, добиваме:

$$2q^nU_{m-n} = U_mV_n - U_nV_m,$$
$$2q^nV_{m-n} = V_mV_n - \Delta U_mU_n.$$

6.2°. Не е тешко да се види дека овие формули може да се обопштат за аргумент $n_1+n_2+\ldots+n_k$ кога се знаат вредностите на функциите за аргументи $n_1, n_2, \ldots, n_k$, позитивни или негативни.

Забележуваме дека првата од формулите (8) може да се напише во обликот

$$2\,\frac{U_{m+n}}{U_n} = \frac{U_m}{U_n}\,V_n + V_m$$

од каде што добиваме

$$2\,\frac{U_{m+n}U_{m+n-1}U_{m+n-2}\cdots U_{m+1}}{U_nU_{n-1}\cdots U_1} =$$

$$= \frac{U_{m+n-1}U_{m+n-2}\cdots U_m}{U_nU_{n-1}\cdots U_1}\,V_n + \frac{U_{m+n-1}\cdots U_{m+1}}{U_{n-1}\cdots U_1}\,V_m,$$

којашто релација го изразува својството формирано како

Теорема: Производот на $n$ произволни членови од низата $U_n$ земени еден по друг со позитивни индекси (аргументи) е делив со производот на првите $n$ членови $U_1, U_2, \ldots, U_n$.

7. Многукратни аргументи. Ако претпоставиме дека $m=n$, тогаш адиционите формули (8) добиваат облик

$$\begin{aligned} U_{2n} &= U_nV_n, \\ 2V_{2n} &= V_n^2 + \Delta U_n^2. \end{aligned} \tag{9}$$

Од друга страна од (7) наоѓаме

$$4q^n = V_n^2 - \Delta U_n^2. \tag{10}$$

Од (9) и (10) добиваме:

$$V_{2n} = V_n^2 - 2q^n,$$

$$V_{2n} = \Delta U_n^2 + 2q^n.$$

Со овие формули можат да се пресметаат направо вредностите на $U_n$ и $V_n$ за вредности на индексите што се членови на аритметичка прогресија со разлика 2. Тоа се формули на удвојување на аргументите.

За утројување на аргументите наоѓаме

$$\frac{U_{3n}}{U_n} = \Delta U_n^2 + 3q^n, \qquad \frac{U_{3n}}{U_n} = V_n^2 - q^n,$$

$$\frac{V_{3n}}{V_n} = \Delta U_n^2 + q^n, \qquad \frac{V_{3n}}{V_n} = V_n^3 - 3q^n.$$

Поопшто, ако ја примениме постапката изложена во 5 за обопштување на формулите за развивањето на $U_n$ и $V_n$ по степените на $p$ и $q$ добиваме

$$\frac{U_{nr}}{U_r} = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k C_{n-k-1}^k q^{kr} V_r^{n-2k-1}.$$

Слично, имаме

$$V_{nr} = V_r^n + \sum_{k=1}^{[n/2]} (-1)^k \frac{n}{k}\, C_{n-k-1}^{k-1} q^{kr} V_r^{n-2k}.$$

Развивањето, пак, на $U_n$ и $V_n$ по степените од $p$ и $\Delta$ ни дава

$$2^{n-1}\,\frac{U_{nr}}{U_r} = \sum_{k=0}^{[n/2]} C_n^{2k+1}\Delta^k U_r^{2k} V_r^{n-2k-1},$$

$$2^{n-1}V_{nr} = \sum_{k=0}^{[n/2]} C_n^{2k}\Delta^k U_r^{2k} V_r^{n-2k}.$$

8. Линеаризација на степени од $U_n$ и $V_n$. Биномната формула може да се напише во обликот

$$(\alpha+\beta)^r = \sum_{k=0}^{[n/2]} C_r^k \alpha^k \beta^k (\alpha^{r-2k}+\beta^{r-2k}).$$

Според тоа, ако ставиме $\alpha = a^n$ и $\beta = b^n$ добиваме

$$V_n^{2r} = \sum_{k=0}^{r} C_{2r}^k q^{kn} \tilde{V}_{2(r-k)n}, \quad \tilde{V}_s = V_s,\ s\neq 0, \quad \tilde{V}_o = V_o/2$$

и

$$V_n^{2r+1} = \sum_{k=0}^{r} C_{2r+1}^k q^{kn} V_{2(r-k)n+n}.$$

Слично, со развивањето на $(\alpha-\beta)^n$ добиваме

$$\Delta^r U_n^{2r} = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k C_{2r}^k q^{kn} \tilde{V}_{2(r-k)n}$$

и

$$\Delta^r U_n^{2r+1} = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k C_{2r+1}^k q^{kn} U_{2(r-k)n+n}.$$

Да покажеме дека развивањето по степените на еден бином дава можност да се изведат и други формули. Така, од

$$\alpha = (\alpha+\beta) - \beta \text{ и } \beta = (\alpha+\beta) - \alpha$$

со степенување на двата членови на некој непарен показател $r$, добиваме

$$\alpha^r+\beta^r = (\alpha+\beta)^r - C_r^1\beta(\alpha+\beta)^{r-1}+\ldots+C_r^1\beta^{r-1}(\alpha+\beta)$$

и

$$\beta^r+\alpha^r = (\alpha+\beta)^r - C_r^1\alpha(\alpha+\beta)^{r-1}+\ldots+C_r^1\alpha^{r-1}(\alpha+\beta).$$

Со собирање и вадење, по заменувањето на $\alpha$ со $a^n$ и на $\beta$ со $b^n$, водејќи сметка за (6), следува

$$2V_{rn} = V_o V_n^r - C_r^1 V_n V_n^{r-1} + C_r^2 V_{2n} V_n^{r-2}+\ldots+C_r^1 V_{(r-1)n} V_n,$$

$$0 = C_r^1 U_n V_n^{r-1} - C_r^2 U_{2n} V_n^{r-2}+\ldots+C_r^1 U_{(r-1)n} V_n.$$

Читателот може да изведе слични формули и во случај кога $r$ е парен број, од развивањето на степените од

$$\alpha = (\alpha-\beta) + \beta \quad \text{и } \beta = (\beta-\alpha) + \alpha.$$

9. Сумирање на функциите U и V.

9.1°. За собирање на аргументите ги најдовме следниве релации (8):

$$2U_{m+n} = U_mV_n - U_nV_m,$$
$$2V_{m+n} = V_mV_n + \Delta U_mV_n,$$

а за одземање на аргументите, формулите:

$$2q^nU_{m-n} = U_mV_n - U_nV_m,$$
$$2q^nV_{m-n} = V_mV_n - \Delta U_mU_n.$$

Ако ставиме

$$m+n = 2r, \quad m-n = 2s$$

во претходните формули по собирање или вадење добиваме

$$U_{2r} + q^{r-s}U_{2s} = V_{r+s}U_{r-s},$$
$$U_{2r} - q^{r-s}U_{2s} = U_{r-s}V_{r+s}, \qquad (11)$$
$$V_{2r} + q^{r-s}V_{2s} = V_{r+s}V_{r-s},$$
$$V_{2r} - q^{r-s}V_{2r} = \Delta U_{r+s}U_{r-s}.$$

Од овие формули лесно се изведуваат и следниве

$$\sum_{k=0}^{n} q^{-kr}U_{m+2kr} = q^{-nr}\,\frac{U_{(n+1)r}}{U_r}\,U_{m+nr},$$
$$\sum_{r=0}^{n} q^{-kr}V_{m+2kr} = q^{-nr}\,\frac{U_{(n+1)r}}{U_r}\,V_{m+nr}.$$

9.2°. Да дадеме сега една постапка за добивање поопшти релации од претходните.

Од (11) имаме

$$U_{s+kr} = V_rU_{s+(k-1)r} - q^{r}U_{s+(k-2)r}$$

Множејќи ја оваа релација со $z^k$ и собирајќи за к=0,1,2,...,n-1 добиваме

$$\sum_{k=1}^{n} z^{k-1}U_{s+(k-1)r} = \frac{zU_{s+r}+(zV_r-1)(z^nU_{s+(n-1)r}-U_r)-z^{n+1}U_{s+nr}}{1-zV_r+z^2q^k} \qquad (12)$$

Така, добиваме сума од производи на функциите U чии аргументи се во аритметичка прогресија, помножени респективно со членовите на една геометриска прогресија.

Слична формула се добива со замена на U со V во броителот на десната страна на (12).

9.3°. Од количникот на $(\alpha^n \pm \beta^n)$ со $(\alpha \pm \beta)$ ги добиваме непосредно при $\Delta > 0$ следниве сумациони формули

$$\frac{U_{2nr}}{U_r} = V_{(2k-1)r} + q^rV_{(2n-3)r} + q^{2r}V_{(2n-5)r} + \ldots + q^{(n-1)r}V_r$$

$$\frac{U_{2nr}}{V_r} = U_{(2n-1)r} - q^rU_{(2n-3)r} + q^{2r}U_{(2n-5)r} + \ldots + (-1)^{n-1}\cdot q^{(n-1)r}V_r$$

односно

$$\frac{U_{(2n+1)r}}{U_r} = V_{2nr} + q^r V_{(2n-2)r} + q^{2r} V_{(2n-4)r} + \dots + q^{nr}$$

$$\frac{V_{(2n+1)r}}{V_r} = V_{2nr} - q^r V_{2(n-1)r} + q^{2r}_{2(n-2)r} + \dots + (-1)^n q^{nr}$$

Овие релации покажуваат дека $U_m$ е делив со $U_n$ кога m е делив со n, а $V_m$ е делив со $V_n$ кога m е непарен број и делив со n.

На пример, во низата $(F_n)$ на Фибоначи, членовите $F_2, F_3$ и $F_5$ се деливи со 2,3 и 5 како и членовите $F_{2n}, F_{3n}, F_{5n}$.

## 10. Сумирање на дропки.

10.1°. Од идентитетот

$$\frac{U_{n-1}}{U_n} = \frac{U_2}{U_1} + \left(\frac{U_3}{U_2} - \frac{U_2}{U_1}\right) + \left(\frac{U_4}{U_3} - \frac{U_3}{U_2}\right) + \dots + \left(\frac{U_{m+1}}{U_n} \quad \frac{U_n}{U_{n-1}}\right),$$

по собирање на дропките во секоја од заградите, добиваме

$$\frac{U_{n-1}}{U_n} = \frac{U_2}{U_1} - \frac{q}{U_1 U_2} - \frac{q^2}{U_2 U_3} - \dots - \frac{q^{n-1}}{U_{n-1} U_n}.$$

На пример, за низата на Фибоначи имаме

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{1\ 1} - \frac{1}{1\ 2} + \frac{1}{2\ 3} - \frac{1}{3\ 5} + \dots + \frac{1}{F_{n-1} F_n}$$

10.2°. Од релациите

$$2V_{2n} = V_n^2 + \Delta U_n^2,$$

$$U_{2n} = U_n V_n,$$

со делење добиваме

$$2\,\frac{V_{2n}}{U_{2n}} = \frac{V_n}{U_n} + \Delta\,\frac{U_n}{V_n}.$$

Ако во оваа формула го замениме еден по друг бројот n со $2n, 2^2 n, \dots, 2^{r-1} n$, и ги собереме добиените равенства, претходно помножени со

$$2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^{r-1},$$

добиваме

$$2^r\,\frac{V_{2^r n}}{U_{2^r n}} = \frac{V_n}{U_n} + \Delta\left(\frac{U_n}{V_n} + 2\,\frac{U_{2n}}{V_{2n}} + \dots + 2^{r-1}\,\frac{U_{2^{r-1} n}}{V_{2^{r-1} n}}\right).$$

### ЛИТЕРАТУРА


[1] N.N.Worobosov, Die Fibonaccischen Zahlen, Berlin 1977

[2] I.Niven; A.Zuckerman, An introduction to the Theory of Numbers John Wiley and Sons inc. New York, 1972