О НЕКИМ КАРАКТЕРИСТИКАМА ПОЛИНОМА ЧЕБИШЕВА

Зборник Радова Мат. Инст. Нова серија, књ. 4, (12), Београд, 1984, 165-168

1. Посматрајмо полиноме Чебишева прве врсте $T_u(x)$ и друге врсте $U_u(x)$. Познато је да они могу бити одређени генератрисним релацијама

$$(1-xt)\,(1-2\,xt+t^2)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)\,t^n,$$

односно

$$(1-2\,xt+t^2)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty} U_u(x)\,t^n.$$

Нека је

$$F_k(x,\,t)=\sum_{n=0}^{\infty} T_n^k\,(x)\,t^n, \tag{1}$$

и

$$G_k(x,\,t)=\sum_{n=0}^{\infty} U_n^k\,(x)\,t^n,\quad k\geqslant 1. \tag{2}$$

Циљ овога рада је да изрази функцију $F_k(x,\,t)$ и $G_k(x,t)$ у експлицитном облику. Генератрисне функције за полиноме $T_{nk}(x)$ и $U_{nk}(x)$ чији индекси су вишеструки бројеви, биће изведене такође.

2. Експлицитни облици полинома $T_n(x)$ и $U_n(x)$ су дати изрази

$$2\,T_n(x)=(x+\sqrt{x^2-1})^n+(x-\sqrt{x^2-1})^n, \tag{3}$$

и

$$2\,(x^2-1)^{1/2}\,U_n(x)=(x+\sqrt{x^2-1})^{n+1}-(x-\sqrt{x^2-1})^{n+1}. \tag{4}$$

Елементарном трансформацијом ових полинома добијамо познате релације

$$\begin{aligned} T_{n+m}(x)+T_{n-m}(x)&=2\,T_n(x)\,T_m(x),\\ U_{n+m}(x)+U_{n-m}(x)&=2\,U_n(x)\,U_m(x),\ \ n\geqslant m. \end{aligned} \tag{5}$$

Идентитет

$$r_1^{kn}+r_2^{kn}=\sum_{r=0}^{\omega}\,(-1)^r\frac{k}{k-r}\,C_{k-r}^r\,(r_1^n+r_2^n)^{k-2r}\,(r_1\,r_2)^{rn},\qquad \omega=[k/2],$$

за $r_{1/2}=x\pm\sqrt{x^2-1}$, нам даје релацију

$$T_{kn}(x)=\sum_{r=0}^{\omega}\,(-1)^r\frac{k}{k-r}\,C_{k-r}^r\,2^{k-2r-1}\;T_n^{k-2\,t}(x),\quad k\geqslant 1. \tag{6}$$

Узимајући у обзир

$$T_{n+1}(x)\pm\sqrt{x^2-1}\,U_n(x)=(x\pm\sqrt{x^2-1})^{n+1},$$

добијамо

$$W_{kn}(x)=\sum_{r=0}^{\omega}\;2^{(2\omega-r)}\frac{k}{k-r}\,C_{k-r}^r\,(x^2-1)^{\omega-r}\,U_n^{k-2\,t}\,(x),\quad k\geqslant 1 \tag{7}$$

где је
$$W_{kn}(x)=\begin{cases}2\,T_{k(n+1)}(x), & \text{ако је } k \text{ паран број}\\ U_{k(n+1)}(x), & \text{ако је } k \text{ непаран број.}\end{cases}$$

3. Релације (5) омогућавају добијање генератрисних функција полинома $T_{nk}(x)$ и $U_{nk}(x)$. Заиста, имаћемо

$$(1-2\,T_n(x)\,t+t^2)\,T_m(x,\,t)=T_0(x)-T_n(x)\,t, \tag{8}$$

где је

$$T_m(x,\,t)=\sum_{n=0}^{\infty} T_{nm}(x)\,t^n, \tag{9}$$

као и користећи релацију

$$U_{n+m}(x)-U_{n-m-2}(x)=2\,U_m(x)\,T_n(x), \tag{10}$$

добијамо

$$(1-2\,T_m(x)\,t+t^2)\,U_m(x,\,t)=U_0(x)+U_{m-2}(x)\,t,\ \ m\geqslant 1,\ \ U_{-1}(x)=0, \tag{11}$$

где је

$$U_m(x,\,t)=\sum_{n=0}^{\infty} U_{nm}(x)\,t^n.$$

Полазећи од (6), посматрајмо суму

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_{kn}(x)\,t^n=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^k\,2^{k-2r-1}\,\frac{k}{k-r}\,C_{k-r}^{r}\sum_{n=0}^{\infty} T_n^{k-2r}(x)\,t^n,\quad k\geqslant 1$$

која заједно са (1) и (9) нам даје

$$2^{k-1}F_k(x,\,t)=T_k(x,\,t)+\sum_{r=1}^{\omega}(-1)^r\,2^{k-2r-1}\,\frac{k}{k-r}\,C_{k-r}^{r}F_{k-2r}(x,\,t),$$

као и помоћу (2), (7) и (11) добијамо

$$2^{2\omega}(x^2-1)^{\omega}\,G_k(x,\,t)=W_k(x,\,t)-\sum_{r=1}^{\omega}2^{(\omega-r)}\,\frac{k}{k-r}\,C_{k-r}^{r}(x^2-1)^{\omega-r}\,G_{k-2r}(x,\,t),$$

где је

$$W_k(x,\,t)=\sum_{n=0}^{\infty} W_{kn}(x)\,t^n.$$

4. Степене полинома $T_n(x)$ и $U_n(x)$ добијамо из релација (3) и (4). Имаћемо

$$2^{n-1}\,T_n^k(x)=\sum_{r=0}^{\omega} C_k^r\,\tilde{T}_{(k-2r)n}(x), \tag{12}$$

са

$$\tilde{T}_n(x)=\begin{cases}T_n(x), & n\neq 0\\ {}^1/_2\,T_n(x), & n=0,\end{cases}$$

и

$$2^{\omega}(x^2-1)^{\omega}\,U_n^k(x)=\sum_{r=0}^{\omega}(-1)^r\,C_k^r\,W_{(k-2r)n}(x). \tag{13}$$

Ако се помножи сваки знак релација (12) и (13) са t^n и ове саберу за $n=0, 1, 2, \ldots$ добија се

$$2^{k-1} F_k(x, t) = \sum_{r=0}^{\omega} C_k^r \, T_{k-2r}(x,t),$$

где $T_0(x, t)$ треба поделити са 2, и

$$2^{\omega}(x^2-1)^{\omega} G_k(x, t) = \sum_{r=0}^{\omega} (-1)^r C_k^r W_{k-2r}(x).$$

Узимајући $T_{k-2r}(x, t)$ и $W_{k-2r}(x, t)$ из (8) и (10) добија се

$$2^{k-1} F_k(x, t) = \sum_{r=0}^{\omega} C_k^r \frac{T_0(x) - T_{k-2r}(x)\, t}{1 - 2\, T_{k-2r}(x)\, t + t^2},$$

и

$$2^{k-1}(x^2-1)^{\omega} G_k(x, t) = \sum_{2=0}^{\omega} (-1)^r C_k^r \frac{V_{k-2r}(x, t)}{1 - 2\, T_{k-2r}(x)\, t + t^2},$$

где је

$$V_k(x, t) = \begin{cases} T_0(x) - T_k(x)\, t, & k - \text{паран број} \\ U_0(x) + U_{k-2}(x)\, t, & k - \text{непаран број}. \end{cases}$$

Литература

[1] Chohat M. J., *Theorie générale des polynomes orthogonaux de Tchebychef*, Mew. des Sc. Math. fasc. LXVI, 1934, Paris.

[2] Rainville E. D., *Special Functions*, 1960, New-York.

[3] Szegő G., *Orthogonal Polynamials*, Coll. Publ. XXXIII. 1939.

[4] Митриновић Д. С., *Увод у специјалне функције*, Београд 1975.

QUELQUES CHARACTERISTIQUES SUR LES POLYNOMES DE TCHEBYCHEF

Résumé

On donnent quelques relations concernant les fonctions génératrices des polynomes de Tchebychef de premiere espèce $T_n(x)$ et de seconde espèce $U_n(x)$.