Математички Билтен ISSN 0351–336X
20 (XX)
1996 (33–50)
Скопје, Македонија

ЗАБЕЛЕШКИ ЗА n–НОРМИРАНИ ПРОСТОРИ

Ристо Малчески

Апстракт

Концептот за n–скаларен производ на векторски простор со димензија поголема од $n-1$ и n–норма, воведен од A. Misiak ([8]), е повеќедимензионална аналогија на концептот за скаларен производ и норма. Во оваа работа се дадени некои резултати за n–скаларен производ и n–нормиран простор, кои всушност се генерализација на соодветни резултати за 2–скаларен производ и 2–нормиран простор, разгледувани во [4], [5], [6] и [7].

1. n–скаларен производ

Дефиниција 1 ([8]). Нека n е природен број, L е реален векторски простор таков што $\dim L \geq n$ и $(\bullet, \bullet \,|\, \underbrace{\bullet, \dots, \bullet}_{n-1})$ е реална функција на $\underbrace{L \times L \times \dots \times L}_{n+1}$ таква што

i) $(a, a \,|\, x_1, \dots, x_{n-1}) \geq 0$, за секои $a, x_1, \dots, x_{n-1} \in L$ и $(a, a \,|\, x_1, \dots, x_{n-1}) = 0$ ако и само ако $a, x_1, \dots, x_{n-1}$ се линеарно зависни;

ii) $(a, b \mid x_1, \ldots, x_{n-1}) = \big(\varphi(a), \varphi(b) \mid \pi(x_1), \ldots, \pi(x_{n-1})\big)$, за секои $a, b, x_1, \ldots, x_{n-1} \in L$ и за секои биекции $\pi\colon \{x_1, \ldots, x_{n-1}\} \to \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$; $\varphi\{a, b\} \to \{a, b\}$.

iii) $(a, a \mid x_1, x_2, \ldots x_{n-1} = (x_1, x_1 \mid a, x_2, \ldots, x_{n-1})$, за секои $a, x_1, \ldots, x_{n-1} \in L$;

iv) $(\alpha a, b \mid x_1, \ldots, x_{n-1}) = \alpha(a, b \mid x_1, \ldots, x_{n-1})$, за секои $a, b, x_1, \ldots, x_{n-1} \in L$ и за секој $\alpha \in R$; и

v) $(a{+}a_1, b \mid x_1, \ldots, x_{n-1}) = (a, b \mid x_1, \ldots, x_{n-1}) + (a_1, b \mid x_1, \ldots, x_{n-1})$, за секои $a, b, a_1, x_1, \ldots, x_{n-1} \in L$.

Функцијата $(\bullet, \bullet \mid \underbrace{\bullet, \ldots, \bullet}_{n-1})$ се нарекува n–скаларен производ, а $\big(L, (\bullet, \bullet \mid \underbrace{\bullet, \ldots \bullet}_{n-1})\big)$ се нарекува n–предхилбертов простор.

Пример 1. Нека $\big(L, (\bullet, \bullet)\big)$ е предхилбертов простор. Во [8] А. Мисиак со помош на n–вектори докажува дека

$$(a, b \mid x_1, \ldots, x_{n-1}) =$$

$$= \begin{vmatrix} (a, b) & (a, x_1) & (a, x_2) & \ldots & (a, x_{n-1}) \\ (x_1, b) & (x_1, x_1) & (x_1, x_2) & \ldots & (x_1, x_{n-1}) \\ (x_2, b) & (x_2, x_1) & (x_2, x_2) & \ldots & (x_2, x_{n-1}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (x_{n-1}, b) & (x_{n-1}, x_1) & (x_{n-1}, x_2) & \ldots & (x_{n-1}, x_{n-1}) \end{vmatrix} \qquad (1)$$

дефинира n–скаларен производ на L, со што L станува n–предхилбертов простор. Да забележиме дека ова навистина е n–скаларен производ следува од својствата на грамовата детерминанта. Имено,

$$(a, a \mid x_1, \ldots, x_{n-1}) =$$

$$= \begin{vmatrix} (a, a) & (a, x_1) & (a, x_2) & \ldots & (a, x_{n-1}) \\ (x_1, a) & (x_1, x_1) & (x_1, x_2) & \ldots & (x_1, x_{n-1}) \\ (x_2, a) & (x_2, x_1) & (x_2, x_2) & \ldots & (x_2, x_{n-1}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (x_{n-1}, a) & (x_{n-1}, x_1) & (x_{n-1}, x_2) & \ldots & (x_{n-1}, x_{n-1}) \end{vmatrix} \geq 0$$

за секои $a, x_1, \dots, x_{n-1} \in L$ и $(a, a \,|\, x_1, \dots, x_{n-1}) = 0$ ако и само ако $a, x_1, \dots, x_{n-1}$ се линеарно зависни, што значи условот i) од дефиницијата 1 е исполнет.

Ако се искористат својствата на детерминантите и скаларниот производ, лесно се докажува дека условите ii), iii), iv), и v) од дефиницијата 1 се исполнети, т.е дека $\big(L, (\bullet, \bullet \,|\, \underbrace{\bullet, \dots \bullet}_{n-1})\big)$ е n–пред-хилбертов простор во кој n–скаларниот производ е дефиниран со (1).

Во [8] се докажани следните својства:

Теорема 1. $(a, b \,|\, \alpha x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = \alpha^2 (a, b \,|\, x_1, \dots, x_{n-1})$, за секои $a, b, x_1, \dots, x_{n-1} \in L$ и за секој $\alpha \in R$.

Теорема 2. За секои $a, b, x_1, \dots, x_{n-1}, x_i' \in L$, $i = 1, 2, \dots, n-1$ важи

$$\begin{aligned} &(a, b \,|\, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + x_i' x_{i+1}, \dots, x_{n-1}) - \\ &- (a, b \,|\, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i - x_i', x_{i+1}, \dots, x_{n-1}) = \\ =&(x_i, x_i' \,|\, x_1, \dots, x_{i-1}, a + b, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}) - \\ &- (x_i, x_i' \,|\, x_1, \dots, x_{i-1}, a - b, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}). \end{aligned}$$

Теорема 3. За секои $a, b, x_1, \dots, x_{n-1} \in L$ важи неравенството

$$|(a, b \,|\, x_1, \dots, x_{n-1})| \le \sqrt{(a, a \,|\, x_1, \dots, x_{n-1})} \sqrt{(b, b \,|\, x_1, \dots, x_{n-1})}. \quad (2)$$

Неравенството (2) е n–**димензионална аналогија на неравенството на Коши–Буњаковски–Шварц**, и за истото ќе дадеме доказ, различен од оној во [8].

Доказ. Од дефиниција 1, за секој $t \in R$ добиваме

$$\begin{aligned} &0 \le (a + tb, a + tb \,|\, x_1, \dots, x_{n-1}) = \\ =&(a, a \,|\, x_1, \dots, x_{n-1}) + 2t(a, b \,|\, x_1, \dots, x_{n-1}) + t^2 (b, b \,|\, x_1, \dots, x_{n-1}). \end{aligned}$$

Квадратниот трином

$f(t) = (a, a \,|\, x_1, \dots, x_{n-1}) + 2t(a, b \,|\, x_1, \dots, x_{n-1}) + t^2(b, b \,|\, x_1, \dots, x_{n-1})$ е ненегативен за секој $t \in R$, па затоа неговата дискриминнта е непозитивна, т.е.

$$4(a, b \,|\, x_1, \dots, x_{n-1})^2 - 4(b, b \,|\, x_1, \dots, x_{n-1})(a, a \,|\, x_1, \dots, x_{n-1}) \leq 0\,.$$

Последното неравенство е еквивалентно на неравенството

$$(a, b \,|\, x_1, \dots, x_{n-1})^2 - (b, b \,|\, x_1, \dots, x_{n-1})(a, a \,|\, x_1, \dots, x_{n-1})$$

т.е. на неравенството (2).

Од теорема 1 и теорема 3 непосредно следуваат:

Последица 1. За секои $a, b, x_1, \dots, x_{n-1} \in L$ и за секои $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1} \in R$ важи

$$(a, b \,|\, \alpha_1 x_1, a_2 x_2, \dots, a_{n-1} x_{n-1}) = \alpha_1^2 \alpha_2^2 \dots a_{n-1}^2 (a, b \,|\, x_1, \dots, x_{n-1})\,.$$

Последица 2. $(a, x_i \,|\, x_1, \dots, x_{n-1}) = 0$, за секои $a, x_1, \dots, x_{n-1} \in L$ и секој $i = 1, 2, \dots, n-1$. На сличен начин како и теорема 2 може да се докаже следната

Лема 1. За секои $a, b, x_1, \dots, x_{n-1}, x_i' \in L$ важи

$$\begin{aligned}
&(a, b \,|\, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + x_i', x_{i+1}, \dots, x_{n-1}) = \\
=&(a, b \,|\, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}) + \\
&+ (a, b \,|\, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i', x_{i+1}, \dots, x_{n-1}) + \\
&+ \frac{1}{2}\left[(x_i, x_i' \,|\, x_1, \dots, x_{i-1}, a+b, x_{i+1}, \dots x_{n-1}) - \right.\\
&\left. - (x_i, x_i' \,|\, x_1, \dots, x_{i-1}, a-b, x_{i+1}, \dots, x_{n-1})\right].
\end{aligned}$$

Доказ. Според ii), iii) и v) од дефиниција 1 имаме

$$
\begin{aligned}
&(a,\, b \,|\, x_1,\, \dots,\, x_{i-1},\, x_i + x_i',\, x_{i+1},\, \dots,\, x_{n-1}) = \\
=&\frac{1}{4}\,[(a+b,\, a+b \,|\, x_1,\, \dots,\, x_{i-1},\, x_i + x_i',\, x_{i+1},\, \dots,\, x_{n-1})- \\
&-(a-b,\, a-b \,|\, x_1,\, \dots,\, x_{i-1},\, x_i + x_i',\, x_{i+1},\, \dots,\, x_{n-1})] = \\
=&\frac{1}{4}\,[(x_i + x_i',\, x_i + x_i' \,|\, x_1,\, \dots,\, x_{i-1},\, a+b,\, x_{i+1},\, \dots,\, x_{n-1})- \\
&-(x_i + x_i',\, x_i + x_i' \,|\, x_1,\, \dots,\, x_{i-1},\, a-b,\, x_{i+1},\, \dots,\, x_{n-1})] = \\
=&\frac{1}{4}[(x_i,\, x_i \,|\, x_1,\, \dots,\, x_{i-1},\, a+b,\, x_{i+1},\, \dots,\, x_{n-1})- \\
&-(x_i,\, x_i \,|\, x_1,\, \dots,\, x_{i-1},\, a-b,\, x_{i+1},\, \dots,\, x_{n-1})]+ \\
&+\frac{1}{4}[(x_i',\, x_i' \,|\, x_1,\, \dots,\, x_{i-1},\, a+b,\, x_{i+1},\, \dots,\, x_{n-1})- \\
&-(x_i',\, x_i' \,|\, x_1,\, \dots,\, x_{i-1},\, a-b,\, x_{i+1},\, \dots,\, x_{n-1})]+ \\
&+\frac{1}{2}[(x_i,\, x_i' \,|\, x_1,\, \dots,\, x_{i-1},\, a+b,\, x_{i+1},\, \dots,\, x_{n-1})- \\
&-(x_i,\, x_i' \,|\, x_1,\, \dots,\, x_{i-1},\, a-b,\, x_{i+1},\, \dots,\, x_{n-1})] = \\
=&\frac{1}{4}\,[(a+b,\, a+b \,|\, x_1,\, \dots,\, x_{i-1},\, x_i,\, x_{i+1},\, \dots,\, x_{n-1})- \\
&-(a-b,\, a-b \,|\, x_1,\, \dots,\, x_{i-1},\, x_i,\, x_{i+1},\, \dots,\, x_{n-1})]+ \\
&+\frac{1}{4}\,[(a+b,\, a+b \,|\, x_1,\, \dots,\, x_{i-1},\, x_i',\, x_{i+1},\, \dots,\, x_{n-1})- \\
&-(a-b,\, a-b \,|\, x_1,\, \dots,\, x_{i-1},\, x_i',\, x_{i+1},\, \dots,\, x_{n-1})]+ \\
&+\frac{1}{2}[(x_i,\, x_i' \,|\, x_1,\, \dots,\, x_{i-1},\, a+b,\, x_{i+1},\, \dots,\, x_{n-1})- \\
&-(x_i,\, x_i' \,|\, x_1,\, \dots,\, x_{i-1},\, a-b,\, x_{i+1},\, \dots,\, x_{n-1})] = \\
=&(a,\, b \,|\, x_1,\, \dots,\, x_{i-1},\, x_i,\, x_{i+1},\, \dots,\, x_{n-1})+ \\
&+(a,\, b \,|\, x_1,\, \dots,\, x_{i-1},\, x_i',\, x_{i+1},\, \dots,\, x_{n-1})+ \\
&+\frac{1}{2}[(x_i,\, x_i' \,|\, x_1,\, \dots,\, x_{i-1},\, a+b,\, x_{i+1},\, \dots,\, x_{n-1})- \\
&-(x_i,\, x_i' \,|\, x_1,\, \dots,\, x_{i-1},\, a-b,\, x_{i+1},\, \dots,\, x_{n-1})].
\end{aligned}
$$

Последица 3. Ако

$$
\begin{aligned}
&(a,\, b \,|\, x_1,\, \dots,\, x_{i-1},\, x_i,\, x_{i+1},\, \dots,\, x_{n-1}) = \\
&= (a,\, b \,|\, x_1,\, \dots,\, x_{i-1},\, x_i',\, x_{i+1},\, \dots,\, x_{n-1}) = 0,
\end{aligned}
$$

тогаш

$$(a,\, b\,|\, x_1,\, \ldots,\, x_{i-1},\, x_i + x_i',\, x_{i+1},\, \ldots,\, x_{n-1})$$
$$= -(a,\, b\,|\, x_1,\, \ldots,\, x_{i-1},\, x_i - x_i',\, x_{i+1},\, \ldots,\, x_{n-1})\,.$$

Доказ. Од

$$(a,\, b\,|\, x_1,\, \ldots,\, x_{i-1},\, x_i,\, x_{i+1},\, \ldots,\, x_{n-1}) =$$
$$= (a,\, b\,|\, x_1,\, \ldots,\, x_{i-1},\, x_i',\, x_{i+1},\, \ldots,\, x_{n-1}) = 0,$$

и од лема 3 добиваме:

$$\begin{aligned}
&(a,\, b\,|\, x_1,\, \ldots,\, x_{i-1},\, x_i - x_i',\, x_{i+1},\, \ldots,\, x_{n-1}) = \\
&= \frac{1}{2}\,[(x_i,\, -x_i'|\, x_1,\, \ldots,\, x_{i-1},\, a+b,\, x_{i+1},\, \ldots,\, x_{n-1}) - \\
&\quad - (x_i,\, -x_i',|\, x_1,\, \ldots,\, x_{i-1},\, a-b,\, x_{i+1},\, \ldots,\, x_{n-1})] = \\
&= \frac{1}{2}\,[(x_i,\, x_i'\,|\, x_1,\, \ldots,\, x_{i-1},\, a+b,\, x_{i+1},\, \ldots,\, x_{n-1}) - \\
&\quad - (x_i,\, x_i'\,|\, x_1,\, \ldots,\, x_{i-1},\, a-b,\, x_{i+1},\, \ldots,\, x_{n-1})] = \\
&= -\,(a,\, b\,|\, x_1,\, \ldots,\, x_{i-1},\, x_i + x_i',\, x_{i+1},\, \ldots,\, x_{n-1})\,.
\end{aligned}$$

Да забележиме дека теорема 2 е директна последица од лема 1.

2. n–нормиран простор

Дефиниција 2 ([8]). Нека L е реален векторски простор со димензија поголема од $n-1$ и $\|\underbrace{\bullet,\, \ldots,\, \bullet}_{n}\|$ е реална функција на $\underbrace{L \times L \times \ldots \times L}_{n}$ за која важат условите

i) $\|x_1,\, \ldots,\, x_n\| \geq 0,\ \forall x_1,\, \ldots,\, x_n \in L$, и $\|x_1,\, \ldots,\, x_n\| = 0$ ако и само ако множеството $\{x_1,\, \ldots,\, x_n\}$ е линеарно зависно;

ii) $\|x_1,\, \ldots,\, x_n\| = \|\pi(x_1),\, \ldots,\, \pi(x_n)\|,\ \forall x_1,\, \ldots,\, x_n$, за секоја биекција $\pi\colon \{x_1,\, \ldots,\, x_n\} \to \{x_1,\, \ldots,\, x_n\}$.

iii) $\|\alpha x_1,\, \ldots,\, x_n\| = |\alpha|\, \|x_1,\, \ldots,\, x_n\|,\ \forall x_1,\, \ldots,\, x_n \in L,\ \forall \alpha \in R$,

iv) $\|x_1 + x_1',\, \ldots,\, x_n\| \leq \|x_1,\, \ldots,\, x_n\| + \|x_1',\, \ldots,\, x_n\|,\ \forall x_1,\, \ldots,\, x_n,\, x_1' \in L$.

Функцијата $\|\underbrace{\bullet,\, \ldots,\, \bullet}_{n}\|$ се нарекува n–норма на L, а $(L,\, \|\underbrace{\bullet,\, \ldots,\, \bullet}_{n}\|)$ се нарекува n–нормиран простор.

Ќе докажеме две елементарни својства на n–нормата.

Лема 2. Нека $(L, \|\underbrace{\bullet, \ldots, \bullet}_{n}\|)$ е нормиран простор. За секои $a, x_1, \ldots, x_{n-1} \in L$ и за секои реални броеви $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ важи равенството

$$\|a, x_1, \ldots, x_{n-1}\| = \left\|a + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i, x_1, \ldots, x_{n-1}\right\|.$$

Доказ. Од iv) во дефиниција 2 следува дека за секои $a, x_1, \ldots, x_{n-1} \in L$ и за секои реални броеви $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ важи

$$\begin{aligned}\left\|a + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i, x_1, \ldots, x_{n-1}\right\| &\leq \|a, x_1, \ldots, x_{n-1}\| + \\ &+ \left\|\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i, x_1, \ldots, x_{n-1}\right\| = \\ &= \|a, x_1, \ldots, x_{n-1}\|.\end{aligned}$$

Од друга страна имаме

$$\begin{aligned}&\|a, x_1, \ldots, x_{n-1}\| = \left\|a + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i + \left(-\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i\right), x_1, \ldots, x_{n-1}\right\| \leq \\ &\leq \left\|a + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i, x_1, \ldots, x_{n-1}\right\| + \left\|-\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i, x_1, \ldots, x_{n-1}\right\| = \\ &= \left\|a + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i, x_1, \ldots, x_{n-1}\right\|.\end{aligned}$$

Од добиените неравенства следува точноста на тврдењето.

Лема 3 ([8]). Нека $f_1, \ldots, f_n \in L$ се такви што $\|f_1, \ldots, f_n\| \neq 0$. Тогаш функцијата $\| \bullet \| : L \to R$ дефинирана со

$$\|a\| = \sum_{j_k \neq j_i} \| a, f_{j_1}, \ldots, f_{j_{n-1}} \| \tag{3}$$

е норма во L.

Доказ. Ќе докажеме дека за функцијата дефинирана со (3) важат својствата од дефиницијата на норма.

i) За секои $\alpha \in R$, $a \in L$ важи

$$\|\alpha a\| = \sum_{j_k \neq j_i} \|\alpha a, f_{j_1}, \ldots, f_{j_{n-1}}\| = |\alpha| \sum_{j_k \neq j_i} \|a, f_{j_1}, \ldots, f_{j_{n-1}}\| = \\ = |\alpha| \cdot \|a\| .$$

ii) За секои $a, b \in L$ важи

$$\|a+b\| = \sum_{j_k \neq j_i} \left\|a + b, f_{j_1}, \ldots, f_{j_{n-1}}\right\| \leq \sum_{j_k \neq j_i} \left(\left\|a, f_{j_1}, \ldots, f_{j_{n-1}}\right\| + \right. \\ \left. + \left\|b, f_{j_1}, \ldots, f_{j_{n-1}}\right\|\right) = \\ = \sum_{j_k \neq j_i} \|a, f_{j_1}, \ldots, f_{j_{n-1}}\| + \sum_{j_k \neq j_i} \|b, f_{j_1}, \ldots, f_{j_{n-1}}\| = \\ = \|a\| + \|b\| .$$

iii) Јасно, $\|0\| = \sum_{j_k \neq j_i} \|0, f_{j_1}, \ldots, f_{j_{n-1}}\| = 0$. Нека претпоставиме дека $\|a\| = 0$. Имаме, $0 = \sum_{j_k \neq j_i} \|a, f_{j_1}, \ldots, f_{j_{n-1}}\|$ и од ненегативноста на n–нормата добиваме $\|a, f_{j_1}, \ldots, f_{j_{n-1}}\| = 0$, за секое $(n-1)$–елементно подмножество на $\{f_1, \ldots, f_n\}$, што значи множествата $A_i = \{a, f_1, \ldots, f_n\} \setminus \{f_i\}$, $i = 1, \ldots, n$ се линеарно зависни.

Множеството $A_n = \{a, f_1, \ldots, f_{n-1}\}$ е линеарно зависно, што значи постојат α_i, $i = 1, \ldots, n-1$ такви што $a = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i f_i$, (коефициентот пред a не може да е еднаков на 0, бидејќи множеството $\{f_1, \ldots, f_n\}$ по претпоставка е линеарно независно). Слично од линеарната зависност на множеството $A_{n-1} = \{a, f_1, \ldots, f_{n-3}, f_{n-2}, f_n\}$ следува дека постојат β_n и β_i, $i = 1, 2, \ldots, n-2$ такви што $a = \sum_{i=1}^{n-2} \beta_i f_i + \beta_n f_n$. Значи,

$$\sum_{i=1}^{n-2} (\beta_i - \alpha_i) f_i - \alpha_{n-1} f_{n-1} + \beta_n f_n = 0 ,$$

и бидејќи векторите $f_1, \ldots, f_n$ се линеарно независни добиваме $\alpha_{n-1} = \beta_n = 0$ и $\alpha_i = \beta_i$, $i = 1, 2, \ldots, n-2$. Ако претходните размислувања поодделно ги повториме за множеството A_n и секое од множествата A_i, $i = 1, 2, \ldots, n-2$ добиваме $\alpha_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n-2$. Според тоа, имаме $a = \sum_{i=1}^{n-1} 0 \cdot f_i = 0$.

3. Топологија во n–нормиран векторски простор

Во [8] е докажано дека секоја n–норма дефинира n–метрика и со оваа метрика е воведена природна топологија. Во овој параграф ќе докажеме дека во n–нормиран простор со помош на сепарирачка фамилија полунорми исто така може да се воведе топологија.

Дефиниција 3 Полунорма на реалниот векторски простор L е реална функција p на L таква што

(а) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

(б) $p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x)$

за секој $\alpha \in R$ и за секои $x, y \in L$.

Фамилијата $\mathcal{P}$ од полунорми на L ја нарекуваме сепарирачка ако за секој $x \neq 0$ постои најмалку една полунорма $p \in \mathcal{P}$ таква што $p(x) \neq 0$

Дефиниција 4. Множеството $B \subseteq L$ го нарекуваме урамнотежено ако $\{\alpha a | a \in B\} \subseteq B$, за секој $|\alpha| \leq 1$. Множеството $A \subseteq L$ го нарекуваме конвексно ако $tx + (1-t)y \in A$, за секои $x, y \in A$ и $t \in [0, 1]$. За конвексното множество $A \subseteq L$ ќе велиме дека е апсорбирачко ако за секој $x \in L$ постои $t = t(x) > 0$ таков што $t^{-1}x \in A$. Функционал на Минковски μ_A на A е дефиниран со

$$\mu_A(x) = \inf\{t > 0 | t^{-1}x \in A\}, \quad \forall x \in X\,.$$

Следната теорема, чиј доказ може да се види во [1], ги прецизира полунормите како функционали на Минковски на конвексни, урамнотежени и апсорбирачки множества.

Теорема 4. Нека p е полунорма на векторскиот простор L. Тогаш

а) $p(0) = 0$,

б) $|p(x) - p(y)| \leq p(x-y)$,

в) $p(x) \geq 0$,

г) $\{x \,|\, p(x) = 0\}$ е порпростор од L, и

д) множеството $B = \{x \,|\, p(x) < 1\}$ е конвексно, урамнотежено, апсорбирачко и $p = \mu_\beta$.

За нашите натамошни разгледувања од посебен интерес е следната теорема, чиј доказ исто така може да се најде во [1].

Теорема 5. Нека $\mathcal{P}$ е сепарирачка фамилија полунорми во векторскиот простор L. На секој $p \in \mathcal{P}$ и на секој $n \in N$ го придружуваме множеството

$$V(p;n) = \left\{ x \mid p(x) < \frac{1}{n} \right\} .$$

Нека $\mathbf{B}$ е фамилијата од сите конечни пресеци од множествата $V(p;n)$. Тогаш $\mathbf{B}$ е конвексна урамнотежена база за топологија τ на L, која го претвора L во локално конвексен простор таков што

а) секоја $p \in \mathcal{P}$ е непрекината, и

б) множеството $E \subseteq L$ е ограничено ако и само ако секоја $p \in \mathcal{P}$ е ограничена на E.

Нека $\left(L, \| \underbrace{\bullet, \ldots, \bullet}_{n} \|\right)$ е произволен n–нормиран простор и нека $f_1, \ldots, f_{n-1} \in L$. За реалната функција $p_{f_i, i=1,\ldots,n-1}$ дефинирана со

$$p_{f_i, i=1,\ldots,n-1}(x) = \|x, f_1, \ldots, f_{n-1}\| , \quad x \in L \tag{4}$$

важи

$$\begin{aligned} p_{f_i, i=1,\ldots,n-1}(x+y) =& \|x+y, f_1, \ldots, f_{n-1}\| \le \\ \le& \|x, f_1, \ldots, f_{n-1}\| + \|y, f_1, \ldots, f_{n-1}\| = \\ =& p_{f_i, i=1,\ldots,n-1}(x) + p_{f_i, i=1,\ldots,n-1}(y) , \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} p_{f_i, i=1,\ldots,n-1}(\alpha x) =& \|\alpha x, f_1, \ldots, f_{n-1}\| = \\ =& |\alpha \, \|x, f_1, \ldots, f_{n-1}\| = |\alpha| \, p_{f_i, i=1,\ldots,n-1}(x) , \end{aligned}$$

за секој $\alpha \in R$ и за секои $x, y \in L$. Со тоа ја докажавме следната лема:

Лема 4. За секое множество $\{f_1, \ldots, f_{n-1}\} \subset L$ функцијата $p_{f_i, i=1,\ldots,n-1}$ дефинирана со (4) е полунорма.

Нека $x \neq 0$ е произволен елемент на L. Бидејќи $\dim L \geq n$ постојат вектори $f_1, \ldots, f_{n-1}$ такви што $\{x, f_1, \ldots, f_{n-1}\}$ е линеарно независно множество во L, што значи

$$p_{f_i, i=1,\ldots,n-1}(x) = \|x, f_1, \ldots, f_{n-1}\| > 0 .$$

Со тоа ја докажавме следна лема:

Лема 5. Фамилијата полунорми

$$\left\{p_{f_i,\, i=1,\ldots,n-1} \,|\, \{f_1, \ldots, f_{n-1}\} \subset L\right\} \tag{5}$$

дефинирани со (4) е сепарирачка.

Според тоа, фамилијата полунорми (5) дефинирани со (4) е сепарирачка, па од теорема 5 следува дека со неа можеме да дефинираме топологија τ која L го претвора во локално конвексен простор таков што секоја полунорма $p_{f_i, i=1,\ldots,n-1}$ е непрекината, од што непосредно следува дека во τ n–нормата е непрекината во однос на секоја променлива, и множеството $E \subseteq L$ е ограничено ако и само ако секоја $p_{f_i,\, i=1,\ldots,n-1}$ е ограничена на E.

Во лема 4 докажавме дека секое множество $\{f_1, \ldots, f_{n-1}\} \subset L$ функцијата $p_{f_i,\, i=1,\ldots,n-1}$ дефинирана со (4) е полунорма, а во лема 3 дека во секој n–нормиран простор $\big(L, \|\underbrace{\bullet, \ldots \bullet}_{n}\|\big)$ со помош на n–нормата може да се дефинира норма.

Теорема 6 ([8]). За секој n–предхилбертов простор $\big(L, (\bullet, \bullet \,|\, \underbrace{\bullet, \ldots \bullet}_{n-1})\big)$ со

$$\|x_1, \ldots, x_n\| = \sqrt{(x_1, x_1|x_2, \ldots, x_n)}, \quad \forall x_1, \ldots, x_n \in L \tag{6}$$

е дефинирана n–норма за која

$$\begin{aligned}(x_1, x_1'|x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{4}(\|x_1 + x_1', x_2, \ldots, x_n\|^2 -\\ - \|x_1 - x_1', x_2, \ldots, x_n\|^2), \qquad \forall x_1, x_1', x_2, \ldots, x_n \in L\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\|x_1 + x_1', x_2, \ldots, x_n\|^2 + \|x_1 - x_1', x_2, \ldots, x_n\|^2 =\\ =2(\|x_1, x_2, \ldots, x_n|^2 + \|x_1', x_2, \ldots, x_n\|^2) \quad \forall x_1, x_1', x_2, \ldots, x_n \in L\end{aligned} \tag{8}$$

Равенството (8) е n–**димензионална аналогија на равенството за паралелограм.**

Нека $\big(L, (\bullet, \bullet \,|\, \underbrace{\bullet, \ldots \bullet}_{n-1})\big)$ е простор со n–скаларен производ. Според теорема 5 со

$$\|x_1, x_2, \ldots, x_n\| = \sqrt{(x_1, x_1|x_2, \ldots, x_n)}, \quad \forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in L$$

е дефинирана n–норма за која важи (7). Од досега изнесеното следува дека n–скаларниот производ е непрекината функција од првите две променливи x_1 и x_1' кога останатите $(n-1)$–на променливи се фиксирани и е непрекината функција од секоја од променливите x_i, $i = 1, \ldots, n$ кога останатите променливи x_1', x_1, x_j, $j \neq i$ се фиксирани.

Од теорема 6 следува дека за секој n–предхилбертов простор $\big(L, (\bullet, \bullet \mid \underbrace{\bullet, \ldots \bullet}_{n-1})\big)$ можеме да сметаме дека е n–нормиран простор, во кој придружената n–норма е дефинирана со (6). Во следната теорема е даден услов кога n–нормиран простор е n–предхилбертов простор.

Теорема 7 ([8]). Нека $\big(L, \| \underbrace{\bullet, \ldots, \bullet}_{n} \|\big)$ е n–нормиран простор во кој условот (8) важи за секои $x_1, \ldots, x_n, x_1' \in L$. Тогаш, на L со (7) е дефиниран n–скаларен производ.

Неравенството дадено во следната лема важи за 2–скаларен производ и придружената 2–норма дефинирана со (6). Природно е да се постави прашањето дали аналогно неравенство важи за n–скаларен производ и придружената n–норма дефинирана со (6).

Лема 6 ([7]). За секои $a, b, c \in L$ важи

$$|(a, b|c) - (b, x|a)| \leq (\|a, b\| + \|b, c\|)\, \|c, a\|$$

4. $n+1$–нормиран простор и фактор–просторот $L/P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Во пример 1 рековме дека во секој предхилбертов простор $\big(L, (\bullet, \bullet)\big)$ со (1) се воведува n–скаларен производ, со што добиваме и n–предхилбертов простор $\big(L, (\bullet, \bullet \mid \underbrace{\bullet, \ldots \bullet}_{n-1})\big)$. Согласно со теорема 6 во секој n–предхилбертов простор со (6) се воведува n–норма, па така добиваме n–нормиран простор. Бидејќи секој предхилбертов простор $\big(L, (\bullet, \bullet)\big)$ е нормиран векторски простор, во кој нормата се задава со $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ заклучуваме дека секој нормиран простор, во кој нормата е воведена со помош на скаларен производ, може да се разгледува како n–нормиран простор, во кој n–нормата е добиена со опишаната постапка. Се поставува прашање дали може од n–нормиран простор $\big(L, (\bullet, \bullet \mid \underbrace{\bullet, \ldots \bullet}_{n})\big)$ да се добие нормиран простор и дали својствата на овие простори се споредливи.

Нека $\big(L, \| \underbrace{\bullet, \ldots \bullet}_{n+1} \|\big)$ е $(n+1)$-нормиран простор и $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ е произволно линеарно независно множество во L. Со $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ да го означиме подпросторот од L генериран од $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, а со L_P фактор–просторот $L/P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. За секој $a \in L$ со a_P ја означуваме класата на еквиваленција на a во однос на $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. L_P е векторски простор со операции $\alpha a_P = (\alpha a)_P$ и $a_P + b_P = (a+b)_P$.

За произволни $a, b \in L$, ако $a_P = b_P$, тогаш $a - b = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, па затоа

$$| \, \|a, x_1, \ldots, x_n\| - \|b, x_1, \ldots, x_n\| \, | \leq \|a - b, x_1, \ldots, x_n\| = 0 \,,$$

т.е.

$$\|a, x_1, \ldots, x_n\| = \|b\, x_1, \ldots, x_n\| \,.$$

Значи, функцијата $\| \bullet \|_P$ на L_P, дефинирана со

$$\|a_P\|_P = \|a, x_1, \ldots, x_n\| \tag{9}$$

е добро дефинирана.

Лема 7. Функцијата $\| \bullet \|_P$ дефинирана со (9) е норма на фактор–просторот L_P.

Доказ. i) Јасно $\|\alpha_P\|_P \geq 0$ и $\|\alpha_P\|_P = 0$ ако и само ако $\|a, x_1, \ldots, x_n\| = 0$ ако и само ако $a \in P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, т.е. ако и само ако $a_P = 0_P$.

ii) Имаме,

$$\begin{aligned} \|\alpha a_P\|_P =& \|(\alpha a)_P\|_P = \|\alpha a, x_1, \ldots, x_n\| = |\alpha| \, \|a, x_1, \ldots, x_n\| = \\ =& |\alpha| \cdot \|a_P\|_P, \text{ за секои } a \in R, \ a_P \in L_P \,. \end{aligned}$$

iii) За секои $b_P, a_P \in L_P$ важи

$$\begin{aligned} \|a_P + b_P\|_P =& \|(a+b)_P\|_P = \|a + b, x_1, \ldots, x_n\| \leq \\ \leq& \|a, x_1, \ldots, x_n\| + \|b, x_1, \ldots, x_n\| = \\ =& \|a_P\|_P + \|b_P\|_P \,. \end{aligned}$$

Теорема 8. $(n+1)$–нормираниот простор $\big(L, \| \underbrace{\bullet, \ldots, \bullet}_{n} \|\big)$ е n–предхилбертов простор ако и само ако за секое линеарно независно множество $P = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq L$, $(L_P, \| \bullet \|_P)$ е предхилбертов простор.

Доказ. Нека $(n+1)$–нормираниот простор $\big(L, | \underbrace{\bullet, \ldots, \bullet}_{n+1}\big)$ е n–предхилбертов простор и $P = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ е произволно линеарно независно подмножество од L.

За произволни елементи $a_P, b_P \in L_P$ важи

$$\|a_P+b_P\|_P^2+\|a_P-b_P\|_P^2=\|a+b,x_1,\ldots,x_n\|^2+\|a-b,x_1,\ldots,x_n\|^2=$$

$$=2(\|a,x_1,\ldots,x_n\|^2+\|b,x_1,\ldots,x_n\|^2)=2(\|a_P\|_P^2+\|b_P\|_P^2)$$

т.е. $(L_P, \|\bullet\|_P)$ е предхилбертов простор.

Обратно, да претпоставиме дека за секое линеарно независно множество вектори $P=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}\subseteq L$, $(L_P, \|\bullet\|_P)$ е предхилбертов простор. Тогаш

$$\|a+b,x_1,\ldots,x_n\|^2+\|a-b,x_1,\ldots,x_n\|^2=$$

$$=\|a_P+b_P\|_P^2+\|a_P-b_P\|_P^2=2(\|a_P\|_P^2+\|b_P\|_P^2=$$

$$=2(\|a,x_1,\ldots,x_n\|^2+\|b,x_1,\ldots,x_n\|^2)\,,$$

т.е. $\big(L, \|\underbrace{\bullet,\ldots,\bullet}_{n+1}\|\big)$ е $(n+1)$–предхилбертов простор.

Забелешка. Претходната теорема дава делимичен одговор прашањето поставено на почетокот на овој дел. Во оваа теорема споредуваме својства на просторот L и фактор–просторот $L_P\equiv L/P(x_1,\ldots,x_n)$, каде $P(x_1,\ldots,x_n)$ е подпростор од L генериран од линеарно независното множество $\{x_1,\ldots,x_n\}\subseteq L$. Логично е да се постави прашањето: дали може да споредуваме својства само во просторот L или само во некој фактор–простор на L. За ваква споредба ќе стане збор во следните разгледувања.

Нека L е хилбертов простор и $\{x_1,\ldots,x_n\}$ е произволно линеарно независно подмножество на L. Ако $P(x_1,\ldots,x_n)$ е подпростор на L генериран од $\{x_1,\ldots,x_n\}$, тогаш $P(x_1,\ldots,x_n)$ е затворен подпростор, па затоа $L_P\equiv L/P(x_1,\ldots,x_n)$, е комплетен во однос на метриката определена со нормата

$$\|a_P\|=\inf_{\lambda_i\in R}\left\|a+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right\|\,. \tag{10}$$

и овој простор ќе го означиме со $(L_P, \|\bullet\|)$.

Согласно со пример 1, $\big(L,(\bullet,\bullet\,|\,\underbrace{\bullet,\ldots\bullet}_{n})\big)$ е $(n+1)$–предхилбертов простор во кој $(n+1)$–скаларниот производ е зададен со

$$(a,b|x_1,\ldots,x_n)=\begin{vmatrix}(a,b) & (a,x_1) & (a,x_2) & \ldots & (a,x_n)\\ (x_1,b) & (x_1,x_1) & (x_1,x_2) & \ldots & (x_1,x_n)\\ (x_2,b) & (x_2,x_1) & (x_2,x_2) & \ldots & (x_2,x_n)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ (x_n,b) & (x_n,x_1) & (x_n,x_2) & \ldots & (x_n,x_n)\end{vmatrix}. \tag{11}$$

Според теорема 5, ако со (11) е зададен $(n+1)$–скаларен производ, тогаш во $\big(L, (\bullet, \bullet \,|\, \underbrace{\bullet, \ldots \bullet}_{n})\big)$ со

$$\begin{aligned}\|a, x_1, \ldots, x_n\|^2 =&(a, a|x_1, \ldots, x_n) = \\ =&\begin{vmatrix} (a, a) & (a, x_1) & (a, x_2) & \ldots & (a, x_n) \\ (x_1, a) & (x_1, x_1) & (x_1, x_2) & \ldots & (x_1, x_n) \\ (x_2, a) & (x_2, x_1) & (x_2, x_2) & \ldots & (x_2, x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (x_n, a) & (x_n, x_1) & (x_n, x_2) & \ldots & (x_n, x_n) \end{vmatrix}\end{aligned}$$

е зададена $(n+1)$–норма со што добиваме $(n+1)$–нормиран простор $\big(L, (\bullet, \bullet \,|\, \underbrace{\bullet, \ldots \bullet}_{n+1})\big)$. Сега во фактор просторот L_P со

$$\begin{aligned}\|a_P\|_P^2 =&\|a, x_1, \ldots, x_n\|^2 = \\ =&\begin{vmatrix} (a, a) & (a, x_1) & (a, x_2) & \ldots & (a, x_n) \\ (x_1, a) & (x_1, x_1) & (x_1, x_2) & \ldots & (x_1, x_n) \\ (x_2, a) & (x_2, x_1) & (x_2, x_2) & \ldots & (x_2, x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (x_n, a) & (x_n, x_1) & (x_n, x_2) & \ldots & (x_n, x_n) \end{vmatrix}\end{aligned} \tag{12}$$

дефинираме норма $\| \bullet \|_P$. Според теорема 5 $(L_P, \| \bullet \|_P)$ е предхилбертов простор.

Логично се наметнува прашањето, дали постои врска меѓу нормите определени со (10) и (12) и ако постои, тогаш каква е таа. За да одговориме на ова прашање ќе ја разгледаме функцијата

$$\begin{aligned}f_{a, x_1, \ldots, x_n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) =&\|a\|^2 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \,\|x_i\|^2 + 2\sum_{i\neq j} \lambda_i\lambda_j(x_i, x_j) + \\ &+ 2\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(a, x_i)\,.\end{aligned} \tag{13}$$

Имаме

$$\frac{\partial f_{a, x_1, \ldots, x_n}}{\partial \lambda_i} = 2\lambda_i \,\|x_i\|^2 + 2\sum_{i\neq j} \lambda_j(x_i, x_j) + 2(a, x_i)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Решението $\lambda_0 = (\lambda_1^{(0)}, \ldots, \lambda_n^{(0)})$ на системот $\frac{\partial f_{a, x_1, \ldots, x_n}}{\partial \lambda_i} = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, е стационарна точка на функцијата (13). Имаме

$\lambda_i^{(0)} = \frac{\Delta_{\lambda_i}}{\Delta}$, $i = 1, \ldots, n$, каде

$$\Delta = \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & (x_1, x_2) & \ldots & (x_1, x_n) \\ (x_2, x_1) & (x_2, x_2) & \ldots & (x_2, x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (x_n, x_1) & (x_n, x_2) & \ldots & (x_n, x_n) \end{vmatrix}$$

$$\Delta\lambda_i = \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & \ldots & -(x_1, a) & \ldots & (x_1, x_n) \\ (x_2, x_1) & \ldots & -(x_2, a) & \ldots & (x_2, x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (x_n, x_1) & \ldots & -(x_n, a) & \ldots & (x_n, x_n) \end{vmatrix}$$

за $i = 1, \ldots, n$. За вторите парцијални изводи на функцијата (15) добиваме:

$$\frac{\partial^2 f_{a, x_1, \ldots, x_n}}{\partial \lambda_i \, \partial \lambda_j} = 2(x_i, x_j) \quad i, j = 1, 2, \ldots, n \, .$$

Ако се искористат својствата на Грамовата детерминанта за линеарно независните множества вектори

$$\{x_1\}; \{x_1, x_2\}; \ldots; \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

од критериумот на Силвестер добиваме дека квадратната форма

$$A(dx_1, \ldots, dx_n) = \sum_{i, j=1}^{n} \frac{\partial^2 f_{a, x_1, \ldots, x_n}}{\partial \lambda_i \, \partial \lambda_j} \, dx_i \, dx_j$$

е позитивно дефинирана, што значи функцијата (13) во стационарната точка $\lambda_0 = (\lambda_1^{(0)}, \ldots, \lambda_n^{(0)})$ има строг минимум. Непосредно се пресметува дека спомнатиот минимум е еднаков на $\frac{\|a_P\|_P^2}{\Delta}$.

Од друга страна, ако се искористи дека $\inf A \cdot \inf B = \inf AB$, каде $AB = \{xy| \; x \in A, y \in B\}$ и $x \geq 0$, $\forall x \in A$; $y \geq 0$, $\forall y \in B$; добиваме:

$$\|a_P\|^2 = \Big(\inf_{\lambda_i \in R} \Big\| a + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \Big\| \Big) \Big(\inf_{\lambda_i \in R} \Big\| a + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \Big\| \Big) =$$

$$= \inf_{\lambda_i \in R} \Big\| a + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \Big\|^2 = \inf_{\lambda_i \in R} f_{a, x_1, \ldots, x_n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \, .$$

Значи, $\|a_P\|^2 = \frac{1}{\Delta} \, \|a_P\|_P^2$, $\forall a_P \in L_P$, т.е.

$$\|a_P\| = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\|a_P\|_P\,, \quad \forall a_P \in L_P\,. \tag{14}$$

Според тоа, нормите $\|\bullet\|_P$ и $\|\bullet\|$ се еквивалентни, што значи просторот $(L_P, \|\bullet\|_P)$ е комплетен. Од (14) непосредно следува дека пресликувањето

$$T\colon (L_P, \|\bullet\|) \to (L_P, \|\bullet\|_P)$$

дефинирано со

$$Ta_P = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}a_P\,, \quad \forall a_P \in L_P$$

е изометрија. Јасно, T е и изоморфизам, па според тоа нормираните простори $(L_P, \|\bullet\|_P)$ и $(L_P, \|\bullet\|)$ се еквивалентни. Со тоа ја докажавме следната лема.

Лема 10. Нормираните $(L_P, \|\bullet\|)$ и $(L_P, \|\bullet\|_P)$, за кои нормите се дефинирани со (10) и (12), соодветно, се еквивалентни.

Литература

[1] W. Rudin: *Functional Analysis*, 2d ed., McGraw–Hill Book Company, New York, (1991).

[2] I. J. Maddox: *Elements of Functional Analisys*, Cambridge University Press, 1970.

[3] S. Gahler: *Lineare 2–normierte Raume*, Math. Nachr. 28 (1965).

[4] C. Diminnie, S. Gahler, A. White: *2–Inner Product Spaces*, Demonstratio Math. 6 (1973).

[5] C. Diminnie, S. Gahler, A. White: *2–Inner Product Spaces* II, Demonstratio Math. 10 (1977).

[6] S. Gahler, A. Misiak: *Remarks on 2–inner products*, Demonstratio Math. 17 (1984).

[7] Р. Малчески: *Забелешки за 2–нормирани простори*, Соопштение на I Конгрес на математичарите и информатичарите на Македонија, Охрид (1996).

[8] A. Misiak: *n–Inner Product Spaces*, Math. Nachr. 140 (1989).

REMARKS ON n–NORMED SPACES

Risto Malčeski

Summary

In this work we gives some results for n–Inner Product and n–Normed Spaces.

Tehnološko–metalurški fakultet

91 000 Skopje,

Makedonija