ПРИМЕДБА О ЈЕДНОМ ПОСТУПКУ ЗБИРЉИВОСТИ FOURIER-ОВИХ РЕДОВА

М. Томић (Београд)

1. Нека је $s_n(x)$ n-ти парцијални збир Fourier-овог реда непрекидне функције $f(x)$ периоде 2π. Један став Рогозинског [1] тврди да

$$\frac{1}{2}\{s_n(x+\alpha_n)+s_n(x-\alpha_n)\}\to f(x),\ n\to\infty, \tag{1}$$

униформно по x ако је $\alpha_n=\pi k/(2n+1)$, где је k утврђен непаран цео број. Из доказа непосредно следи да став важи и ако $k=k(n)$ варира са n под условом да $k(n)$ остаје непарно и ограничено. А. Ф. Тиман ([2], теорема 1, стр. 85) је показао да низ реалних бројева α_n ($|\alpha_n|\leqslant\pi$) задовољава (1) униформно по x за сваку непрекидну функцију $f(x)$ периоде 2π, тада и само тада ако је

$$\alpha_n=\frac{\pi k(n)}{2n+1}+O\left(\frac{1}{n\lg n}\right), \tag{2}$$

где је $k(n)$ непаран и ограничен број.

Овде ћемо показати да се познајући модул непрекидности $\omega(t)$ функције $f(x)$ дефинисан са

$$\omega(t)=\sup_{|x_1-x_2|\leqslant t}|f(x_2)-f(x_1)|,\quad x_1,\ x_2\in[0,\ 2\pi], \tag{3}$$

услов (2) може проширити на следећи начин: *да би низ реалних бројева* α_n ($|\alpha_n|\leqslant\pi$) *задовољавао* (1) *униформно по* x *за сваку непрекидну периодичну функцију* $f(x)$ *чији је модул непрекидности* $\omega(t)$, *довољно је да буде*

$$\alpha_n=\frac{\pi k(n)}{2n+1}+\frac{1}{n\lg n}\,o\left(\frac{1}{\omega(1/n)}\right), \tag{4}$$

где је $k(n)$ *непаран и ограничен број.*

2. Нека је

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Fourier-ов ред функције $f(x)$ L-интеграбилне у размаку $(0, 2\pi)$. Ако

$$\frac{\lambda_0^n a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \to f(x), \quad n \to \infty$$

униформно по $x \in [0, 2\pi]$, тада кажемо да је Fourier-ов ред функције $f(x)$ збирљив (Λ) поступком збирљивости.

За низ бројева $\{\lambda_\nu^n\}$ кажемо да је *квазиконвексан* униформно по n ако је

$$\sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1) \, |\Delta^2 \lambda_\nu^n| \leqslant H, \text{ где је } \Delta^2 \lambda_\nu^n = \lambda_\nu^n - 2\lambda_{\nu+1}^n + \lambda_{\nu+2}^n$$

и где константа H не зависи од n.

Доказ тврђења из претходне тачке заснива се на следећем ставу чији је доказ скициран у нашем раду [3] (§ 4, став 4):

Ако је низ $\{\lambda_k^n\}$ квазиконвексан униформно по n и

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_k^n = 1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\lambda_n^n \lg n \, \omega\left(\frac{1}{n}\right) = o(1), \quad n \to \infty,$$

тада је Fourier-ов ред непрекидне и периодичне функције $f(x)$ у размаку $[0, 2\pi]$ са модулом непрекидности $\omega(t)$ збирљив (Λ) поступком збирљивости.

Наиме, из (1) следи да је

$$\varkappa_n(\xi) = \frac{1}{2} \{s_n(\xi + \alpha_n) + s_n(\xi - \alpha_n)\} =$$

$$= \frac{\lambda_0^n a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^n (a_k \cos k\xi + b_k \sin k\xi),$$

где је

$$\lambda_k^n = \cos k\alpha_n, \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

Остало је још да покажемо да низ λ_k^n, $k = 0, 1, 2, \ldots$ задовољава услове претходног става.

Због (4) имамо

$$| \Delta \ \cos k \, \alpha_n | \leqslant \alpha_n = O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{5}$$

$$| \Delta^2 \cos k \, \alpha_n | \leqslant \alpha_n^2 = O\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{6}$$

Из ове последње неједначине непосредно следи да је низ $\{\lambda_k^n\}$ квазиконвексан униформно по n. За утврђено k је према (4) очевидно

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_k^n = 1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Најзад је

$$\lambda_n^n = \cos \left\{ n \left[\frac{k(n)\pi}{2n+1} + \frac{1}{n \lg n} \, o\left(\frac{1}{\omega(1/n)}\right) \right] \right\} =$$

$$= o\left(\frac{1}{\lg n \, \omega(1/n)}\right), \quad n \to \infty,$$

јер је $k(n)$ непарно и ограничено.

Према томе на основу претходног става

$$\varkappa_n(\xi) \to f(\xi), \quad n \to \infty$$

униформно по $\xi \in [0, 2\pi]$. Тиме је тврђење из тачке 1 доказано.

3. *Доказ става.* Ако ставимо

$$a_0(\xi) = \frac{a_0}{2}$$

$$a_k(\xi) = a_k \cos k \xi + b_k \sin k \xi,$$

тада је

$$\varkappa_n(\xi) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^n \, \alpha_k(\xi) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi + t) \; K_n(t) \, dt, \tag{7}$$

где је

$$K_n(t) = \frac{\lambda_0^n}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^n \cos k t.$$

Као што смо навели у нашем раду [3] свакој непрекидној периодичној функцији $f(x)$ чији је модул непрекидности $\omega(t)$ одговара увек један тригонометриски полином $T_n(x)$ реда $m=[n/2]$ (Jackson-ов полином) и једна константа C тако да је

$$|f(x)-T_n(x)|\leqslant C\,\omega\left(\frac{1}{n}\right) \tag{8}$$

за све x.

Тада се (7) може написати у облику

$$\varkappa_n(\xi)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} T_n(\xi+t)\,K_n(t)\,dt+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\{f(\xi+t)-T_n(\xi+t)\}\;K_n(t)\,dt=$$

$$=A_n(\xi)+B_n(\xi). \tag{9}$$

Двострука Abel-ова трансформација суме $K_n(t)$ даје

$$K_n(t)=\sum_{\nu=0}^{n-2}\frac{\Delta^2\lambda_\nu^n}{2}\left(\frac{\sin(\nu+1)\,t/2}{\sin t/2}\right)^2+\frac{\lambda_n^n}{2}\,\frac{\sin(n+1/2)\,t}{\sin t/2}+$$

$$+\frac{\Delta\lambda_{n-1}^n}{2}\left(\frac{\sin nt/2}{\sin t/2}\right)^2$$

па је

$$\int_0^{2\pi}|K_n(t)|\,dt\leqslant\sum_{\nu=0}^{n}\frac{|\Delta^2\lambda_\nu^n|}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin(\nu+1)\,t/2}{\sin t/2}\right)^2 dt+$$

$$+\frac{|\lambda_n^n|}{2}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\sin(n+1/2\,t}{\sin t/2}\right|\,dt+\frac{|\Delta\lambda_{n-1}^n|}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin nt/2}{\sin t/2}\right)^2 dt.$$

Познате вредности Fejér-овог интеграла и Lebesgue-ове константе своде ову последњу неједначину на

$$\int_0^{2\pi}|K_n(t)|\,dt\leqslant\pi\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)\,|\Delta^2\lambda_\nu^n|+M\,|\lambda_n^n|\,\lg n+\pi n\,|\Delta\lambda_{n-1}^n|. \tag{10}$$

Како је $\lambda_n^n\;\omega(1/n)\;\lg n=o(1)$, $n\to\infty$, то из (10) следи да је

$$\int_0^{2\pi}|K_n(t)|\;dt=o\left(\frac{1}{\omega(1/n)}\right),\quad n\to\infty. \tag{11}$$

Према (8) и (9) је

$$|B_n(\xi)| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(\xi+t) - T_n(\xi+t)|\,|K_n(t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{\pi}\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)\int_0^{2\pi} |K_n(t)|\,dt,$$

а одавде с обзиром на (11) следи да

$$B_n(\xi) \to 0, \quad n \to \infty$$

униформно по ξ.

Остаје нам да покажемо да $A_n(\xi)$ конвергира ка $f(\xi)$. Како је ([4] стр. 319)

$$T_n(\xi) = \sum_{k=0}^{n} D\left(\frac{k}{m}\right)\alpha_k(\xi),$$

где је $m = [n/2]$ и

$$D(x) = \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x^3, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \frac{1}{4}(2-x)^3, & 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ 0, \; x > 2, \end{cases} \tag{12}$$

то из

$$A_n(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} T_n(\xi+t)\,K_n(t)\,dt,$$

с обзиром да је $K_n(t)$ косинусни полином, n-тог реда, следи да је

$$A_n(\xi) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^n D\left(\frac{k}{m}\right) a_k(\xi).$$

Нека је даље

$$s_n(\xi) = \sum_{k=0}^{n} a_k(\xi)$$

и

$$\sigma_n(\xi) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_k(\xi).$$

На основу познатог Fejér-овог става, низ аритметичких средина делимичних збирова Fourier-овог реда непрекидне функције $f(x)$ конвергира униформно ка $f(x)$ кад $n \to \infty$.

Како је

$$a_k(\xi) = \Delta^2 \{(k-1)\, \sigma_{k-2}(\xi)\}$$

то је

$$A_n(\xi) = \sum_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu^n D\left(\frac{\nu}{m}\right) \Delta^2 \{(\nu-1)\, \sigma_{\nu-2}(\xi)\} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1)\, \Delta^2 \left\{\lambda_\nu^n D\left(\frac{\nu}{m}\right)\right\} \sigma_\nu(\xi)\,.$$

тј.

$$A_n(\xi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} t_{n\nu}\, \sigma_\nu(\xi)$$

где је

$$t_{n\nu} = \begin{cases} (\nu+1)\, \Delta^2 \left\{\lambda_\nu^n D\left(\frac{\nu}{m}\right)\right\}, & \nu \leqslant n, \\ 0, \quad \nu > n. \end{cases}$$

Остало је према томе да покажемо да је матрицом $\| t_{n\nu} \|$ дефинисан један регуларан поступак збирљивости, односно да су задовољени услови познатог Toeplitz—Schur-овог става:

1° Из (12) следи да је

$$\left| D\left(\frac{\nu}{m}\right)\right| \leqslant 1, \quad (\nu+1)\left| \Delta D\left(\frac{\nu}{m}\right)\right| \leqslant A, \quad \left| \Delta^2 D\left(\frac{\nu}{m}\right)\right| \leqslant \frac{B}{n^2},$$

па је

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} | t_{n\nu} | = \sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1) \left| \Delta^2 \left\{ \lambda_\nu^n\, D\left(\frac{\nu}{m}\right)\right\}\right| =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} \left| \left\{(\nu+1)\, D\left(\frac{\nu}{m}\right)\right\} \Delta^2 \lambda_\nu^n + 2(\nu+1)\, \Delta \lambda_{\nu+1}^n\, \Delta D\left(\frac{\nu}{m}\right) + \right.$$

$$\left. + (\nu+1)\, \lambda_{\nu+2}^n\, \Delta^2 D\left(\frac{\nu}{m}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1)\, |\Delta^2 \lambda_\nu^n| + 2A \sum_{\nu=0}^{n} |\Delta \lambda_{\nu+1}^n| + \frac{HB}{n^2} \sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1)\, |\lambda_{\nu+2}^n| \leqslant M.$$

2° Из

$$|t_{n\nu}| \leqslant (\nu+1)\left(|\lambda_\nu^n - 1| + 2|\lambda_{\nu+1}^n - 1| + |\lambda_{\nu+2}^n - 1|\right) + \\ + 2A\left(|\lambda_\nu^n - 1| + |\lambda_{\nu+1}^n - 1|\right) + (\nu+1)\frac{HB}{n^2}$$

и чињенице да $\lambda_\nu^n \to 1$, $n \to \infty$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ следи да је

$$\lim_{n\to\infty} t_{n\nu} = 0, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots$$

3° Како је

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} t_{n\nu} = \sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1)\,\Delta^2 \left\{\lambda_\nu^n D\left(\frac{\nu}{m}\right)\right\} = \lambda_0^n D(0)$$

то је коначно

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} t_{n\nu} = 1.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] *W. W. Rogosinski*, Über die Abschnitte trigonometrischer Reihen. *Mat. Ann.* 95 (1925) стр. 110—134.

[2] *A. F. Timan*, On some methods of summation of Fourier series. *Izvestya Akad. Nauk SSSR*. Ser. Mat. 14 (1950) стр. 85—94 (на руском).

[3] *M. Tomić*, Sur les facteurs de convergence des séries de Fourier des fonctions continues. *Publ. Mat. Inst. Beograd*, T. VIII. стр. 23—32 (1955).

[4] *Н. И. Ахиезер*, Лекции по теории аппроксимации, Москва—Ленинград, 1947.

Résumé

REMARQUE SUR UN PROCÉDÉ DE SOMMATION DES SÉRIES DE FOURIER

M. Tomić (Beograd)

A. F. Timan [2] a montré que (2) représente la condition nécessaire et suffisante pour qu'on ait (1) uniformément pour chaque fonction continue et périodique $f(x)$ (à période 2π), $k(n)$ étant un nombre impair mais borné. En connaissant le module de continuité $\omega(t)$ de $f(x)$ (défini par la formule (3)), l'auteur a déduit que la condition (4) est suffisante pour assurer la convergence uniforme dans (1). Dans la formule (4), $k(n)$ désigne un nombre impair et borné. Ce résultat découle immédiatement de notre théorème 4 ([3], p. 25) c. à. d. du théorème

Soit $\{\lambda_\nu^n\}$ une suite quasi-convexe par rapport à n c. à. d.

1° $$\sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1) \left| \Delta^2 \lambda_\nu^n \right| < H,$$

où H est indépendant de n,

2° $$\lim \lambda_k^n = 1, \quad k=0, 1, 2, \ldots$$

3° $$\lambda_n^n \lg n\, \omega\left(\frac{1}{n}\right) = o(1).$$

Dans ce cas le procédé de sommation $\{\lambda_\nu^n\}$ somme la série de Fourier de toute fonction $f(x)$, continue et périodique à période 2π, dont le module de continuité est $\omega(t)$.

Dans [3] nous avons esquissé une démonstration, ici nous donnons une démonstration complète.

Nous partons de

$$\begin{aligned}\varkappa_n(\xi) &= \frac{\lambda_0^n a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^n (a_k \cos k\xi + b_k \sin k\xi) = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^n \alpha_k(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi+t)\, K_n(t)\, dt,\end{aligned} \tag{7}$$

avec

$$K_n(t) = \frac{\lambda_0^n}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^n \cos kt.$$

Soit à présent $T_n(x)$ le polynôme trigonométrique de Jackson d'ordre $m=[n/2]$ de la fonction $f(x)$ continue et périodique à periode 2π. On a alors pour tout x

$$|f(x) - T_n(x)| < C\omega\left(\frac{1}{n}\right). \tag{8}$$

Ceci posé, on peut écrire (7) sous la forme

$$\varkappa_n(\xi)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} T_n(\xi+t)\,K_n(t)\,dt+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\{f(\xi+t)-T_n(\xi+t)\}\,K_n(t)\,dt$$

$$=A_n(\xi)+B_n(\xi). \tag{9}$$

De (8) résulte

$$|B_n(\xi)|\leqslant\frac{C}{\pi}\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)\int_0^{2\pi}|K_n(t)|\,dt.$$

Une double sommation par partie montre d'après 1° et 8° que $B_n(\xi)\to 0$, $n\to\infty$.

Pour montrer que $A_n(\xi)\to f(\xi)$, nous remarquons d'abord ([4], p. 319), que $T_n(\xi)$ prend la forme

$$T_n(\xi)=\sum_{k=0}^{n} D\left(\frac{k}{m}\right)\alpha_k(\xi),$$

avec $m=[n/2]$ et

$$D(x)=\begin{cases}1-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{4}x^3, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ \frac{1}{4}(2-x)^3, & 1\leqslant x\leqslant 2\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

De

$$A_n(\xi)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} T_n(\xi+t)\,K_n(t)\,dt$$

résulte

$$A_n(\xi)=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k^n\,D\left(\frac{k}{m}\right)a_k(\xi).$$

Une double sommation par partie donne

$$A_n(\xi)=\sum_{\nu=0}^{\infty} t_{n\nu}\,\sigma_\nu(\xi),$$

avec

$$t_{n\nu}=(\nu+1)\,\Delta^2\left\{\lambda_\nu^n\,D\left(\frac{\nu}{m}\right)\right\},\quad \nu\leqslant n,\quad t_{n\nu}=0,\quad \nu>n,$$

où nous avons désigné par $\sigma_\nu(\xi)$ les sommes de Fejér de fonction continue $f(x)$.

Du fait que la suite $\lambda_\nu^n\,D\left(\frac{\nu}{m}\right)$ comme le produit de deux suites quasi-convexes est lui aussi quasi-convexe, il résulte que le procédé défini par $\{t_{n\nu}\}$ satisfait aux conditions de Toeplitz—Schur, c. à. d. que

$$A_n(\xi)\to f(\xi),\quad n\to\infty.$$