Математички Билтен
22 (XLVIII)
1998 (37–50)
Скопје, Македонија

ISSN 0351–336X

ПРОИЗВОД ОД РЕШЕНИЈАТА НА ДВЕ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ НА ВОЛТЕРРА КАКО РЕШЕНИЕ НА ДРУГА ЛИНЕАРНА ИНТЕГРАЛНА РАВЕНКА НА ВОЛТЕРРА

Димов А. Лазо

Apstract

Во теоријата на диференцијалните равенки позната е методата за нивно егзактно решавање со нивно сведување на диференцијални равенки од понизок ред. Па во таа смисла од многу автори е работено на проблематиката формирање на диференцијална равенка чие решение е производ од степените на решенијата или изводите од решенијата на диференцијални равенки од понизок ред.

Овде, слично како кај диференцијалните равенки, ќе формираме интегрални равенки, кои имаат особина нивните решенија да бидат производи од степените, на решенијата на попрости интегрални равенки

Да појдеме од интегралните равенки:

$$y + A\int_0^x y(t)\,dt = B, \qquad z + C\int_0^x z(t)\,dt = D\,. \tag{1}$$

Во зависност од природата на величините A, B, C и D ќе формираме интегрална равенка чие решение ќе има особина да биде производ од решенијата на интегралните равенки (1).

I. Да претпоставиме прво дека во интегралните равенки (1) A, C и D се ненулти константи а $B = B(x)$ е произволна два пати диференцијабилна функција. Ако ставиме:

$$u = uz\,, \tag{2}$$

од идентитетот

$$\int_0^x FG\,dt = F\int_0^x G\,dt - \int_0^x \left(F'\int_0^t G\,du\right) dt\,, \tag{3}$$

а во врска со равенките (1), запишани како

$$y' = B' - Ay\,, \qquad \int_0^x z\,dt - \frac{D-z}{C}$$

добиваме:

$$\int_0^x yz\,dt = y\int_0^x z\,dt - \int_0^x \left[y'\int_0^t z\,du\right] dt =$$
$$= \frac{D}{C}\,y - \frac{1}{C}\,yz - \frac{D^x}{C}\int_0^x B'\,dt + \frac{AD^x}{C}\int_0^x y\,dt - \frac{A^x}{C}\int_0^x yz\,dt\,.$$

Имајќи го предвид горното, во врска со (2), а имајќи ја во вид ознаката $B_0 = B(0)$ ја добиваме равенката:

$$u + (A+C)\int_0^x u\,dt = DB_0 + \int_0^x B'z\,dt\,. \tag{4}$$

Со интегрирање на равенката (4), во граници од 0 до x ја добиваме равенката:

$$\int_0^x u\,dt + (A+C)\int_0^x\int_0^t u\,dv\,dt = DB_0x + \int_0^x\int_0^t B'z\,dv\,dt\,. \tag{5}$$

За интегралот од десната страна на оваа равенка наоѓаме:

$$\int_0^x\int_0^t B'z\,dv\,dt = \int_0^x B'\frac{D-z}{C}\,dt - \int_0^x\int_0^t B''\frac{D-z}{C}\,dv\,dt =$$
$$= \frac{D}{C}\,B'x - \frac{1}{C}\int_0^x B'z\,dt + \frac{1}{C}\int_0^x \left(\frac{B''}{B'}\int_0^t B'z\,dv\right) dt -$$
$$- \frac{1}{C}\int_0^x\int_0^t \left[\left(\frac{B''}{B'}\right)'\int_0^v B'z\,ds\right] dv\,dt\,.$$

Сега равенката (4), во врска со равенката (5) имајќи ги во предвид ознаките $B_0' = B'(0)$, $B_0'' = B''(0)$ станува:

$$u+\int_0^x\left[A+2C-\frac{B''}{B'}\right]u\,dt+\int_0^x\int_0^t \left[C(A+C)-(C+A)\frac{B''}{B'}+\left(\frac{B''}{B'}\right)'\right] u\,dv\,dt=$$
$$= D\left[B_0 + \left(CB_0 + B_0' - \frac{1}{B_0'}\,B_0B_0''\right)x\right]\,.$$

Ако сега го имаме во вид уште и равенството на Коши:

$$\int_0^x \int_0^t \dots \int_0^u f(v)\,dv \cdots dt = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)\,dt\,. \qquad (*)$$

за трансформирање на n–кратен интеграл во интеграл со параметар тогаш последната интегрална равенка станува:

$$u+\int_0^x \left\{ A+2C-\frac{B''}{B'}+\left[C(A+C)-(C+A)\frac{B''}{B'}+\left(\frac{B''}{B'}\right)'\right](x-t)\right\} u\,dt=$$
$$= D\left[B_0+\left(CB_0+B_0'-\frac{1}{B_0'}\,B_0\,B_0''\right)x\right]. \qquad (6)$$

Начинот на кој ја добивме последната интегрална равенка ја докажува точноста на теоремата:

Теорема 1. *Интегралната равенка* (6) *има особина нејзиното решение да може да се напише како производ, од решенијата на интегралните равенки* (1) *за* A, C, D *произволни ненулти константи и* $B = B(x)$, *произволна три пати диференцијабилна функција, при што* $B'(x) \neq 0$.

Пример 1. Интегралните равенки:

$$y-\int_0^x y\,dt = x-\frac{1}{2}\,x^2, \qquad z-\int_0^x z\,dt = 1\,,$$

имаат, соодветно, решенија:

$$y = x\,, \qquad z = e^x.$$

Соодветната интегрална равенка (6) гласи:

$$u+\int_0^x \left\{-3+(1-t)^{-1}+\left[2-(1-t)^{-2}-2(1-t)^{-1}\right](x-t)\right\} u\,dt = x\,.$$

Лесно се проверува дека последната интегрална равенка има решение: $u = xe^x$.

II. Да претпоставиме дека во равенките (1) $A = A(x)$ и $B = B(x)$ се произволни три пати диференцијабилни функции, а C и D се ненулти константи. Тогаш имаме:

$$\int_0^x yz\,dt = \frac{D}{C}\,y-\frac{1}{C}\,yz-\frac{1}{C}\int_0^x\left[A-\frac{A'}{A}\right]yz\,dt-\frac{D}{C}\int_0^x B'\,dt+$$
$$+\frac{D}{C}\int_0^x Ay\,dt+\frac{D}{C}\int_0^x \frac{A'B}{A}\,dt-\frac{D}{C}\int_0^x \frac{A'}{A}\,y\,dt+\int_0^x A\left(\frac{B}{A}\right)' z\,dt\,.$$

Одовде, во врска со (2), при ознака $B_0 = B(0)$ лесно наоѓаме дека:

$$u+\int_0^x\left[C+A-\frac{A'}{A}\right]u\,dt-DB_0=\int_0^x A\left(\frac{B}{A}\right)'z\,dt\,. \tag{7}$$

Ак ставиме: $E=A\left(\frac{B}{A}\right)'$, а потоа ја интегрираме равенката (7), во граница од 0 до x, добиваме:

$$\int_0^x u\,dt+\int_0^x\int_0^t\left[C+A-\frac{A'}{A}\right]u\,dv\,dt-DB_0x=\int_0^x\int_0^t Ez\,dv\,dt\,.$$

За интегралот од десната страна на последната равенка, за $E(x)\neq 0$, добиваме:

$$\int_0^x\int_0^t Ez\,dv\,dt=\frac{D}{C}EX-\frac{1}{C}\int_0^x Ez\,dt+\frac{1}{C}\int_0^x\frac{E'}{E}\int_0^t Ez\,dv\,dt-$$
$$-\frac{1}{C}\int_0^x\int_0^t\left[\left(\frac{E'}{E}\right)'\int_0^v Ez\,ds\right]dv\,dt\,.$$

Сега од последната равенка, во врска со (7), при ознака $E_0=E(0)$ и со примена на формулата $(*)$ ја добиваме следната интегрална равенка:

$$u+\int_0^x\left\{2C+A-\frac{A'}{A}-\frac{E'}{E}+\left[\left(C+A-\frac{A'}{A}\right)\left(C-\frac{E'}{E}\right)+\left(\frac{E'}{E}\right)'\right](x-t)\right\}u\,dt=$$
$$=DB_0\left[1+\left(C+\frac{E_0}{B_0}-\frac{E_0'}{B_0}\right)x\right]\,. \tag{8}$$

Ако важи, $E(x)=\left(\frac{B}{A}\right)'=0$, тогаш ја добиваме интегралната равенка:

$$u+\int_0^x\left[C+A-\frac{A'}{A}\right]u\,dt=DB_0\,. \tag{8a}$$

Со ова ја докажавме следнава теорема:

Теорема 2. *Интегралните равенки* (8), *односно* (8a) *имаат особина нивните решенија да можат да се запишат како производи од решенијата на интегралните равенки* (1), *каде што функциите* $A=A(x)\neq 0$ *и* $B=B(x)$ *се произволни три пати диференцијабилни функции, ако* $E(x)\neq 0$, *односно ако* $E(x)=0$.

Пример 2. Интегралните равенки:

$$y+e^x\int_0^x y\,dt=e^{2x},\qquad z+2\int_0^x z\,dt=1\,,$$

имаат решенија соодветно:

$$y = e^x, \qquad z = e^{-2x}.$$

Интегралната равенка (8) во овој случај гласи:

$$u + \int_0^t (e^t + 1) u \, dt = x + 1 \, .$$

Лесно се проверува дека таа има решение:

$$u = e^{-x}.$$

Пример 3 За интегралните равенки:

$$y + (x+1) \int_0^x y \, dt = 2x + 2 \, , \qquad z - \int_0^x z \, dt = 1$$

е задоволен условот $E(x) = 0$ и тие имаат решенија соодветно

$$y = 2 \exp\left(-\frac{x^2}{x+1}\right) \; ; \qquad z = e^x.$$

Соодветната интегрална равенка (8а) гласи:

$$u + \int_0^x \left[t - \frac{1}{(t+1)^2} \right] u \, dt = 2 \, .$$

Со проверка може да се утврди дека нејзиното решение е:

$$u = 2 \exp\left(\frac{x}{x+1}\right) ,$$

т.е. производ од погоре запишаните решенија.

III. Да претпоставиме дека $B = B(x) \neq 0$ и $D = D(x) \neq 0$, се произволни функции, а A и C се произволни ненулти константи. Тогаш од идентитетот (3) добиваме:

$$\int_0^x yz \, dt = \frac{D}{C} y - \frac{1}{C} yz - \frac{1}{C} \int_0^x B' D \, dt + \frac{A}{C} \int_0^x D y \, dt + \frac{1}{C} \int_0^x B' z \, dt - \frac{A}{C} \int_0^x yz \, dt \, .$$

од каде во врска со (2), при ознаки $B_0 = B(0)$, $D_0 = D(0)$ ја добиваме равенката:

$$u + (A + C) \int_0^x u \, dt - B_0 D_0 = \int_0^x [B' z + D' y] \, dt \, . \tag{9}$$

Ако левата страна на оваа равенка ја означиме со сомболот L,

$$L = u + (A + C) \int_0^x u \, dt - B_0 D_0 \, . \tag{10}$$

тогаш таа станува:

$$L = \int_0^x [B'z + D'y]\,dt\,. \tag{11}$$

Со интегрирање на равенката (11), во граници од 0 до x добиваме:

$$\int_0^x L\,dt = \int_0^x\int_0^t [B'z + D'y]\,dv\,dt = \int_0^x B'\frac{D-z}{C}\,dt - \int_0^x\int_0^t B''\frac{D-z}{C}\,dv\,dt + \int_0^x\int_0^t D'y\,dv\,dt,$$

односно ја добиваме равенката:

$$C\int_0^x L\,dt = \int_0^x B'D\,dt - \int_0^x\int_0^t B''D\,dv\,dt - \int_0^x B'z\,dt + \int_0^x\int_0^t B''z\,dv\,dt + \int_0^x\int_0^t CD'y\,dv\,dt,$$

која можеме да ја напишеме и во вид:

$$A\int_0^x L\,dt = \int_0^x BD'\,dt - \int_0^x\int_0^t BD''\,dv\,dt - \int_0^x D'y\,dt + \int_0^x\int_0^t D''y\,dv\,dt + \int_0^x\int_0^t AB'z\,dv\,dt\,.$$

Со собирање на последниве две равенки ја добиваме равенката:

$$\begin{aligned} L + (A + C)\int_0^x L\,dt - (BD)'x - 2\int_0^x\int_0^t B'D'\,dv\,dt &= \\ = \int_0^x\int_0^t [(AB' + B'')z + (CD' + D'')y]\,dv\,dt\,. \end{aligned} \tag{12}$$

За интегралот I од десната страна на оваа равенка имаме:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^x\int_0^t [(AB' + B'')z + (CD' + D'')y]dv\,dt = \\ &= A\int_0^x\int_0^t [B'z + D'y]\,dv\,dt + (C - A)\int_0^x\int_0^t D'y\,dv\,dt + \\ &+ \int_0^x\int_0^t \frac{B''}{B'}[B'z + D'y]dv\,dt + \int_0^x\int_0^t \left[D'' - \frac{B''}{B'}D'\right] y\,dv\,dt\,. \end{aligned}$$

Понатаму во врска со (11) наоѓаме:

$$I = A\int_0^x L\,dt + \int_0^x \frac{B''}{B'}L\,dt - \int_0^x\int_0^t \left(\frac{B''}{B'}\right)' L\,dv\,dt + \int_0^x\int_0^t \alpha y\,dv\,dt\,.$$

Притоа имаме означено:

$$\alpha = (C-A)D' + D'' - \frac{B''}{B'}D'.$$

Со заменување на вака добиената вредност за I во равенката (12) ја добиваме следната равенка:

$$L+C\int_0^x L\,dt-\int_0^x \frac{B}{B'}L\,dt+\int_0^x\int_0^t \left(\frac{B}{B'}\right)' L\,dv\,dt-(BD)_0'x-2\int_0^x\int_0^t B'D'\,dv\,dt=\int_0^x\int_0^t \alpha y\,dv\,dt. \tag{13}$$

Сега од равенката (13), во врска со (10), ја добиваме следнава равенка:

$$u+\int_0^x \left[A+2C-\frac{B}{B'}\right] u\,dt+\int_0^x\int_0^t \left[AC+C^2-(A+C)\frac{B}{B'}+\left(\frac{B}{B'}\right)'\right] u\,dv\,dt-(BD)'x$$

$$-2\int_0^x\int_0^t B'D'\,dv\,dt+B_0D_0\left[-1-Cx+\frac{B_0''}{B_0'}x\right]=\int_0^x\int_0^t \alpha y\,dv\,dt. \tag{14}$$

Ако левата страна на последната равенка ја означиме со симболот M, таа станува:

$$M=\int_0^x\int_0^t \alpha y\,dv\,dt. \tag{15}$$

Со интегрирање на оваа равенка, во граници од 0 до x, добиваме:

$$\int_0^x M\,dt=\frac{1}{A}\alpha_0B_0\frac{x^2}{2}+\frac{1}{A}\int_0^x\int_0^t\int_0^v \alpha\beta'\,ds\,dv\,dt-$$

$$-\frac{1}{A}\int_0^x\int_0^t \alpha y\,dv\,dt+\frac{1}{A}\int_0^x\int_0^t\int_0^v \alpha' y\,ds\,dv\,dt.$$

Ова равенство, во врска со (15) за $\alpha(x)\neq 0$, станува:

$$M+A\int_0^x M\,dt=\alpha_0B_0\frac{x^2}{2}+\int_0^x\int_0^t\int_0^v \alpha B'\,ds\,dv\,dt+\int_0^x\frac{\alpha'}{\alpha}\int_0^t\int_0^v \alpha y\,ds\,dv\,dt-$$

$$-2\int_0^x\int_0^t\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)'\int_0^v\int_0^s \alpha y\,dq\,ds\,dv\,dt+\int_0^x\int_0^t\int_0^v\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)''\int_0^s\int_0^q \alpha y\,dr\,dq\,ds\,dv\,dt.$$

Од каде се добива интегралната равенка:

$$M+A\int_0^x M\,dt-\int_0^x\frac{\alpha'}{\alpha}M\,dt+2\int_0^x\int_0^t\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)'M\,dv\,dt-\int_0^x\int_0^t\int_0^v\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)''M\,ds\,dv\,dt=$$

$$=\alpha_0B_0\frac{x^2}{2}+\int_0^x\int_0^t\int_0^v \alpha B'\,ds\,dv\,dt,. \tag{16}$$

Сега, по извесни пресметки на интегралите што тука фигурираат и по примена на формулата $(*)$ се добива следната интегрална равенка:

$$\begin{aligned}
u+\int_0^x\Big\{&2(A+C)-\frac{B''}{B'}-\frac{\alpha'}{\alpha}+\Big[A^2+3AC+C^2-(2A+C)\frac{B''}{B'}\left(\frac{B''}{B'}\right)'+2\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)'-\\
&-\frac{\alpha'}{\alpha}\left(A+2C-\frac{B''}{B'}\right)\Big](x-t)+\frac{1}{2}\Big[\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)'\left(A+2C-\frac{B''}{B'}\right)-\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)''+\\
&+\left(AC+C^2-(A+C)\frac{B''}{B'}+\left(\frac{B''}{B'}\right)'\right)\left(A-\frac{\alpha'}{\alpha}\right)\Big](x-t)^2\Big\}u\,dt=\\
&=B_0D_0\Big\{1+\Big[A+C+\frac{(BD)'_0}{B_0D_0}-\frac{B''_0}{B'_0}-\frac{\alpha'_0}{\alpha_0}\Big]x+\Big[\left(A-\frac{\alpha'_0}{\alpha_0}\right)\Big(C-\frac{B''_0}{B'_0}+\\
&+\frac{(BD)'_0}{B_0D_0}+\frac{\alpha_0}{D_0}+\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)'_0\Big]\frac{x^2}{2}+2\int_0^x\int_0^t B'D'\,dv\,dt+\\
&+\int_0^x\int_0^t\int_0^v\Big[2B'D'\left(A-\frac{\alpha'}{\alpha}\right)+\alpha B'\Big]\,ds\,dv\,dt\,. \qquad (17)
\end{aligned}$$

Ако е задоволен услово $\alpha(x)=0$, односно:

$$(C-A)D'+D''-\frac{B''}{B'}D'=0\,, \qquad (18)$$

тогаш бараната интегрална равенка е:

$$\begin{aligned}
u+\int_0^x\Big\{&A+2C-\frac{B''}{B'}+\Big[C^2+AC-(A+C)\frac{B''}{B'}+\left(\frac{B''}{B'}\right)'\Big](x-t)u\,dt=\\
&=(BD'_0+B_0D_0\Big[1+Cx-\frac{B''_0}{B'_0}x\Big]+2\int_0^x\int_0^t B'D'\,dv\,dt\,. \qquad (19)
\end{aligned}$$

Со постапката за добивање на интегралните равенки (17) и (19) ја докажавме следнава:

Теорема 3. *Интегралните равенки* (17), *односно* (19) *имаат особина нивните решенија да бидат производи од решенијата на интегралните равенки* (1), *ако не е задоволен условот* (18), *односно ако е задоволен условот* (18).

Пример 4. Интегралните равенки:

$$y+\int_0^x dt=2e^x-1\,, \qquad z+2\int_0^x z\,dt=e^x,$$

имаат решенија:

$$y = e^x, \qquad z = \frac{1}{3}e^x + \frac{2}{3}e^{-2x}.$$

Интегралната равенка (17), во овој случај гласи:

$$u + \int_0^x [4 + 3(x-t)]u\,dt = -\frac{1}{4} + \frac{3}{2}x + \frac{5}{4}e^{2x}.$$

Со проверка лесно се убедуваме дека нејзиното решение е:

$$u = \frac{1}{3}e^{2x} + \frac{2}{3}e^{-x} = e^x\left[\frac{1}{3}e^x + \frac{2}{3}e^{-2x}\right].$$

Пример 5. Интегралните равенки:

$$y + \int_0^x y\,dt = 2e^x - 1, \qquad z - 2\int_0^x z\,dt = e^{4x}.$$

имаат решенија:

$$y = e^x, \qquad z = 2e^{4x} - e^{2x}.$$

Соодветната интегрална равенка (19), во овој случај гласи:

$$u + \int_0^x [-4 + 3(x-t)]u\,dt = \frac{9}{25} - \frac{1}{5}x + \frac{16}{25}e^{5x}.$$

Нејзино решение е:

$$u = 2e^{5x} - e^{3x} = e^x(2e^{4x} - e^{2x}).$$

IV. Да претпоставиме дека во равенките (1) $A = A(x) \neq 0$, $B = B(x)$, $D = D(x)$ се произволни функции а C е ненулта константа. Тогаш имаме:

$$\begin{aligned} &\int_0^x y\,dt = \frac{B-y}{A}, \qquad y' = A\left(\frac{B}{A}\right)' + \frac{A'}{A}y - Ay, \\ &\int_0^x z\,dt = \frac{D-z}{C}, \qquad z' = D' - Cz. \end{aligned} \tag{20}$$

Од идентитетот (3) во врска (20) добиваме:

$$\int_0^x zy\,dt = \frac{1}{A}yz - \int_0^x D'\frac{B}{A}\,dt + \frac{B}{A}D - \int_0^x \left(\frac{B}{A}\right)' D\,dt +$$
$$+ \int_0^x \left(\frac{B}{A}\right)' z\,dt + \int_0^x \frac{D'}{A}y\,dt - \int_0^x \frac{C}{A}yz\,dt.$$

Оттука, во врска со (2), ја имаме равенката:

$$\frac{1}{A}u + \int_0^x \left[1 + \frac{C}{A}\right]u\,dt - \frac{B_0 D_0}{A_0} = \int_0^x \left[\frac{D'}{A}y + \left(\frac{B}{A}\right)' z\right]dt. \tag{21}$$

Ако во идентитетот (4) y ја земеме за прва, а z за втора величина, во врска со формулите (20) и (2), добиваме:

$$y + \int_0^x \left[C + A - \frac{A'}{A}\right] u\,dt - B_0 D_0 = \int_0^x \left[D'y + A\left(\frac{B}{A}\right)' z\right] dt\,. \tag{22}$$

Ако ставиме:

$$L_1 = \frac{1}{A}u + \int_0^x \left[1 + \frac{C}{A}u\,dt - \frac{B_0 D_o}{A_0}\right., \qquad L_2 = u + \int_0^x \left[C + A - \frac{A'}{A}\right] u\,dt - B_0 D_0\,, \tag{23}$$

ги добиваме помошните равенки:

$$L_1 = \int_0^x \left[\frac{D'}{A}y + \left(\frac{B}{A}\right)' z\right] dt\,, \qquad L_2 = \int_0^x \left[D'y + A\left(\frac{B}{A}\right)' z\right] dt\,. \tag{24}$$

Со интегрирање, во граници од 0 до x, на првата од помошните равенки наоѓаме:

$$\begin{aligned} C\int_0^x L_1\,dt = D_0 \left(\frac{B}{A}\right)'_0 x + \int_0^x\int_0^t D'\left(\frac{B}{A}\right)' dv\,dt - \int_0^x \left(\frac{B}{A}\right)' z\,dt + \\ + \int_0^x\int_0^t \left[C\,\frac{D'}{A}y + \left(\frac{B}{A}\right)'' z\right] dv\,dt\,. \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} \int_0^x L_2\,dt = \frac{1}{A_0}D_0' B_0 x + \int_0^x\int_0^t D'\left(\frac{B}{A}\right)' dv\,dt - \int_0^x \frac{D'}{A}y\,dt + \\ + \int_0^x\int_0^t \left[\frac{D'}{A}y + A\left(\frac{B}{A}\right)' z\right] dv\,dt\,. \end{aligned} \tag{26}$$

Со собирање на равенките (25) и (26) добиваме:

$$\begin{aligned} L_1 + \int_0^x [L_2 + CL_1]\,dt = \left[D\,\frac{B}{A}\right]'_0 x + 2\int_0^x\int_0^t D'\left(\frac{B}{A}\right)' dv\,dt + \\ + \int_0^x\int_0^t \alpha\left[\frac{D'}{A}y + \left(\frac{B}{A}\right)' z\right] dv\,dt + \int_0^x\int_0^t \beta z\,dv\,dt\,, \end{aligned} \tag{27}$$

каде што:

$$\alpha = C + \frac{D''}{D'}\,, \qquad \beta = \left(\frac{B}{A}\right)'\left[A - C - \frac{D''}{D'}\right] + \left(\frac{B}{A}\right)''\,. \tag{28}$$

Со оглед на тоа дека важи:

$$\int_0^x\int_0^t \alpha\left[\frac{D'}{A}y+\left(\frac{B}{A}\right)'z\right]dv\,dt=\int_0^x \alpha L_1\,dt-\int_0^x\int_0^t \alpha' L_1\,dv\,dt\,, \tag{$*$}$$

равенката (27) станува

$$\begin{aligned}&L_1+\int_0^x[L_2+CL_1]\,dt-\int_0^x \alpha L_1\,dt+\int_0^x\int_0^t \alpha' L_1 dv\,dt-\\&-\left[D\,\frac{B}{A}\right]_0' x-2\int_0^x\int_0^t D'\left(\frac{B}{A}\right)' dv\,dt=\int_0^x\int_0^t \beta z\,dv\,dt\,.\end{aligned} \tag{29}$$

Со замена на вредностите на L_1 и L_2 од (24) во (27), спрема (28). по извесни пресметки ја добиваме равенката:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{A}u+\int_0^x\left[2+\frac{C}{A}-\frac{D''}{AD'}\right]u\,dt+\int_0^x\int_0^t\left[C+A-\frac{A'}{A}+\frac{1}{A}\left(\frac{D''}{D'}\right)'-\right.\\&\left.-\left(1+\frac{C}{A}\right)\frac{D''}{D'}\right]u\,dv\,dt-\frac{1}{A_0}B_0D_0[1+(A_0+C-\alpha_0)x]-\\&-\left[D\,\frac{B}{A}\right]_0' x-2\int_0^x\int_0^t D'\left(\frac{B}{A}\right)' dv\,dt=\\&=\int_0^x\int_0^t \beta z\,dv\,dt\,.\end{aligned} \tag{30}$$

Означувајќи ја левата страна на последната равенка со M, а потоа интегрирајќи во граници од 0 до x добиваме

$$\int_0^x M\,dt=\int_0^x\int_0^t\int_0^v \beta z\,ds\,dv\,dt\,. \tag{31}$$

За интегралот од левата страна на последната равенка при $\beta(x)\neq 0$, имаме:

$$\begin{aligned}\int_0^x\int_0^t\int_0^v \beta z\,ds\,dv\,dt&=\frac{1}{2C}\,\beta_0D_0x^2+\frac{1}{C}\int_0^x\int_0^t\int_0^v \beta D'\,ds\,dv\,dt-\frac{1}{C}\int_0^x\int_0^t \beta z\,dv\,dt+\\&+\frac{1}{C}\int_0^x\frac{\beta'}{\beta}\left[\int_0^t\int_0^v \beta z\,ds\,dv\right]dt-\frac{2}{C}\int_0^x\int_0^t\left(\frac{\beta'}{\beta}\right)'\left[\int_0^v\int_0^s \beta z\,dq\,ds\right]dv\,dt+\\&+\frac{1}{C}\int_0^x\int_0^t\int_0^v\left(\frac{\beta'}{\beta}\right)''\left[\int_0^s\int_0^q \beta z\,dr\,dq\,ds\right]dv\,dt\,.\end{aligned}$$

Сега, во врска со вредноста на M добиваме:

$$M+C\int_0^x M\,dt-\int_0^x \frac{\beta'}{\beta}M\,dt+2\int_0^x\int_0^t\left(\frac{\beta'}{\beta}\right)' M\,dv\,dt-\int_0^x\int_0^t\int_0^v\left(\frac{\beta'}{\beta}\right)'' M\,ds\,dv\,dt=$$
$$=\frac{1}{2}\beta_0 D_0 x^2+\int_0^x\int_0^t\int_0^v \beta D' ds dv dt.$$

По кратки пресметки и по примена на формулата (∗) се добива интегралната равенка:

$$\frac{1}{A}u+\int_0^x\Big\{2+2\frac{C}{A}-\frac{D''}{AD'}-\frac{\beta'}{A\beta}+\left[\left(C-\frac{\beta'}{\beta}\right)\left[2\frac{C}{A}-\frac{D''}{AD'}\right]+\right.$$
$$\left.+C+A-\frac{A'}{A}+\frac{1}{A}\left(\frac{D''}{D'}\right)'-\left(1+\frac{C}{A}\right)\frac{D''}{D'}+\frac{2}{A}\left(\frac{\beta'}{\beta}\right)'\right](x-t)+$$
$$+\frac{1}{2}\left[\left(C-\frac{\beta'}{\beta}\right)\left(C+A-\frac{A'}{A}+\frac{1}{A}\left(\frac{D''}{D'}\right)'-\left(1+\frac{C}{A}\right)\frac{D''}{D'}\right)-\frac{1}{A}\left(\frac{\beta'}{\beta}\right)''+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\beta'}{\beta}\right)'\left(2+\frac{C}{A}-\frac{D''}{AD'}\right)\right](x-t)^2\Big\}u\,dt=$$
$$=\frac{1}{A_0}B_0D_0\Big\{1+cx-\frac{\beta_0'}{\beta_0}x+\frac{1}{2}\left(\frac{\beta'}{\beta}\right)_0' x^2+ \tag{32}$$
$$+(A_0+C-\alpha_0)\left[x+\frac{c}{2}x^2-\frac{1}{2}\frac{\beta_0'}{\beta_0}x^2\right]\Big\}+\left[D\frac{B}{A}\right]_0'\left[x+\frac{c}{2}x^2-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\frac{\beta_0'}{\beta_0}x^2\right]+\frac{1}{2}\beta_0D_0x^2+2\int_0^x\int_0^t D'\left(\frac{B}{A}\right)' dv\,dt+$$
$$+\int_0^x\int_0^t\int_0^v D'\left[\beta+2\left(C-\frac{\beta'}{\beta}\right)\left(\frac{B}{A}\right)'\right]ds\,dv\,dt\,.$$

Ако е задоволен условот $\beta(x)=0$ односно:

$$\left(\frac{B}{A}\right)'\left[A-C-\frac{D''}{D'}\right]+\left(\frac{B}{A}\right)''=0 \tag{33}$$

тогаш јаимаме интегралната равенка

$$\frac{1}{A}u+\int_0^x\Big\{2+\frac{C}{A}-\frac{D''}{AD'}+\left[C+A-\frac{A'}{A}+\frac{1}{A}\left(\frac{D''}{D'}\right)'-\left(1+\frac{C}{A}\right)\frac{D''}{D'}\right](x-t)\Big\}u\,dt=$$
$$=\frac{1}{A_0}B_0D_0[1+(A_0+C-\alpha_0)x]-\left[D\frac{B}{A}\right]_0' x-2\int_0^x\int_0^t D'\left(D\frac{B}{A}\right)' dv\,dt=0\,. \tag{34}$$

Од начинот како ги добивме последните две интегрални равенки следува дека сме ја докажале следната теорема:

Теорема 4. *Решенијата на интегралните равенки* (32), *односно* (34) *можат да се добијат како производ од решенијата на интегралните ревенки* (1), *при што* $A = A(x) \neq 0$, $B = B(x)$, $D = D(x)$ *се произволни четирипати диференцијабилни функции а* C *е ненулта константа, ако не е задоволен условот* (33), *односно ако е задоволен тој услов.*

Пример 5. Интегралните равенки

$$y + e^x \int_0^x y(t)dt = e^{2x}, \qquad z + 2\int_0^x z\,dt = 3e^x - 2\,,$$

имаат решенија:

$$y = e^x\,, \qquad z = e^x\,.$$

Равенката (32) во овој случај станува:

$$e^{-x}u + \int_0^x \Big\{2 + 2e^{-t} - (e^t - 2)^{-1} + \big[e^t - 2e^{-t} - 4(e^t - 2)^{-1} -$$
$$-2(e^t-2)^{-2}\big](x-t) = \frac{1}{2}\Big[-1 + \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}(e^t-2)^{-1} - 3(e^t-2)^{-2}\Big](x-t)^2\Big\}u\,dt =$$
$$= \frac{1}{9}e^{3x} + \frac{3}{4}e^{2x} - 12e^x + \frac{7}{2}x^2 + \frac{97}{6}x + \frac{437}{36} - 48\int_0^x\int_0^t\int_0^v (e^s-2)^{-1}\,ds\,dv\,dt.$$

Со проверка лесно се уверуваме дека нејзиното решение е:

$$u = e^{2x}.$$

Литература

[1] Goursat E.: *Cours d'analyse matematique*, Paris, 1942.

[2] Димов А. Л.: *Прилог кон теоријата на решавањето на линеарните интегрални равенки на Волтерра*, докторска дисертација, Скопје, 1995.

[3] Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И.: *Интегральные уравнения*, Издат. Наука, Москва, 1976.

[4] Trajan Lalesko: *Introduction a la theorie des equations integrales*, Paris, 1912.

[5] Šapkarev I. A.: *Grades of the solutions of more simple as solutions of more complex Volterra linear integral equations*, Proceedings of the mathematical conference in Priština s. 95-99, 1994.

PRODUCT OF THE SOLUTIONS OF TWO VOLTERRA LINEAR INTEGRAL EQUATIONS AS SOLUTION OF ANOTHER VOLTERRA LINEAR INTEGRAL EQUATION

Dimov A. Lazo

Summary

One of the methods for solving exactly differential equations, according to the theory, is reducting them to differential equations of lower order. That's why many of the authors were treating the problems of forming differentiel equation, whose solution is a product of the grades of the solutions or it is a product of the derivatives of the solutions of differential equations of lower order.

Here, we form integral equations, whose solutions are product of the grades of the solutions of more simple integral equations, property which is similar with the one mentioned above for the differential equations.

Mašinski fakultet

p. fah 464

91000 Skopje,

Republika Makedonija