

КРЕИРАЊЕ ЛИСТИ ВО ДИНАМИЧКИ СОФТВЕР

Ѓорѓи Маркоски¹

Јасмина Маркоска²

1. ВОВЕД

Под динамички (математички) софтвер се подразбира софтвер, т.е. програмски пакет, кој овозможува создавање на интерактивна средина за работа на корисникот. Основна карактеристика на ваквиот софтвер е можноста за промена на некои елементи и согледување на зависноста предизвикана од таа промена. Ова овозможува голема примена во наставата по математика, скоро во сите наставни теми. Почесто користени динамички софтвери се: Cabri, Geometer's Sketchpad, Cinderella, GeoGebra и други. Бидејќи GeoGebra е слободен софтвер кој е преведен на повеќе јазици, се одлучивме да работиме со него.

Повеќето наредби во GeoGebra се претставени во менито од наредби како алатки и многу често имаат и свое графичко претставување (како икона). За разлика од нив, наредбите поврзани со креирање листи не се присутни во менито со алатки, туку мора да се напишат преку тастатура. Затоа, наш впечаток е дека тие поретко се користат и помалку се познати кај корисниците. Ќе се задржиме на креирање листи во GeoGebra, како најчесто употребуван динамички софтвер кај нас. Креирањето листи ќе го илустрираме преку поедноставни примери. Понатаму, секој корисник, во зависност од неговите интереси, ќе може да ги примени овие наредби за свои потреби.

Под *листа* обично се подразбира конечна низа од објекти во дадениот софтвер. Тие објекти може да се броеви, функции, вектори, подредени парови и друго. Обично листите се означуваат со големи загради (таа ознака се користи и во други софтвери, на пример Mathematica). На пример листата од првите 5 природни броеви се означува со $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Иако големите загради асоцираат на претставување на множество, сепак овде важен е редоследот и дозволено е повторување на елементите. Така, на пример, $\{1, 1, 1\}$ и $\{1\}$ се различни листи.

Затоа поимите листа и конечна низа овде се синоними. Креирањето листи најчесто се користи кога треба да се формираат и/или прикажат повеќе објекти истовремено и да се манипулира со нив.

2. НАРЕДБИ ЗА ЛИСТИ ВО GEOGEBRA

На почетокот, ќе објасниме некои од наредбите поврзани со креирањето листи во GeoGebra. Притоа, наредбите ќе ги наведеме на англиски јазик, заради тоа што тие се слични и во други динамички софтвери. Доколку GeoGebra се користи на македонски јазик, наредбите имаат соодветен превод (Табела 1).

Англиски	Македонски
Sequence(<Expression>,<Variable>,<Start Value a>,<End Value b>,<Increment>)	Низа(<израз>,<променлива>,<од број>,<до број>,<чекор>)
Sequence(<Expression>,<Variable>,<Start Value>,<End Value>)	Низа(<израз>,<променлива>,<од број>,<до број>)
Append(<List>,<Object>)	Додади(<листа>,<објект>)
Element(<List>,<Position of Element>)	Елемент(<листа>,<број-позиција на елементот>)
First(<List>,<Number of Elements>)	Прво(<листа>,<број на елементи>)
Last(<List>,<Number of Elements>)	Последно(<листа>,<број на елементи>)
First(<List>)	Прво(<листа>)
Last(<List>)	Последно(<листа>)
Insert(<Object>,<List>,<Position>)	Вметни(<објект>,<листа>,<позиција>)
Sort(<List>)	Подреди(<листа>)
Union(<List>,<List>)	Унија(<листа>,<листа>)

Табела 1. Превод на наредбите за листи.

а) Основна наредба за листи во GeoGebra 5 е Sequence. Синтаксата на основната наредба е

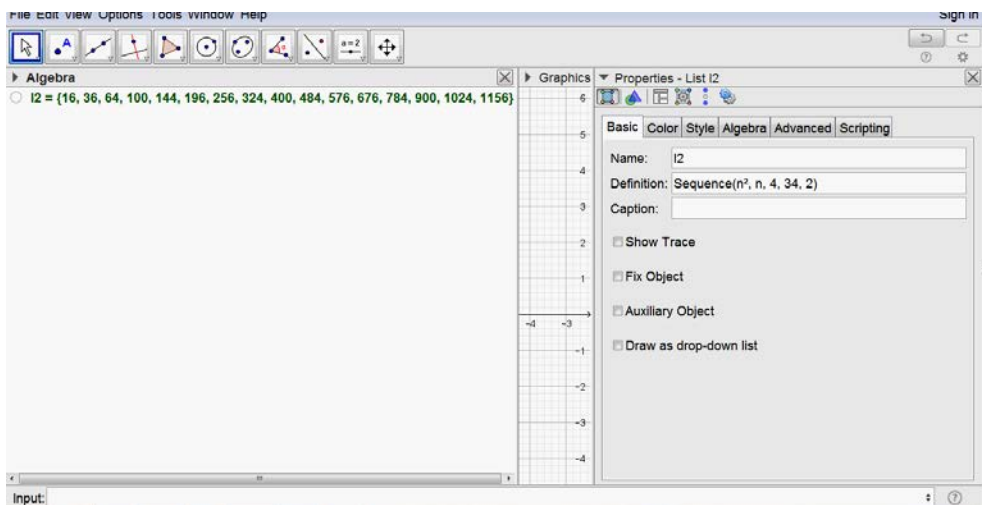
- $\text{Sequence}(\langle \text{Expression} \rangle, \langle \text{Variable} \rangle, \langle \text{Start Value } a \rangle, \langle \text{End Value } b \rangle, \langle \text{Increment} \rangle)$

каде што $\langle \text{Expression} \rangle$ е изразот со кој е определена низата (т.е. листата), $\langle \text{Variable} \rangle$, $\langle \text{Start Value } a \rangle$, $\langle \text{End Value } b \rangle$ се променливата, нејзината почетна и крајна вредност, соодветно, а $\langle \text{Increment} \rangle$ е чекорот на промената на променливата.

Така на пример, со

$$\text{Sequence}(n^2, n, 4, 34, 2)$$

се формира листа од квадратите на парните броеви (притоа n се менува со чекор 2) од 4 до 34. Приказот во GeoGebra е прикажан на Слика 1.



Слика 1. Приказ на резултатот од наредбата $\text{Sequence}(n^2, n, 4, 34, 2)$, заедно со менито со опции за оваа листа.

Да забележиме дека GeoGebra автоматски доделува име на листа. На Слика 1 тоа е I2. Името може да се смени во делот за опции на листата.

Наредбата Sequence има и други варијанти (синтаксички пократки) што се користат кога одредени параметри во самата синтакса се преодредени. Тие се:

- $\text{Sequence}(\langle \text{End Value} \rangle)$,

каде што се подразбира дека листата почнува од 1 и е со чекор 1, а $\langle \text{End Value} \rangle$ е вредноста на крајниот елемент во листата.

На пример, $\text{Sequence}(5)$ ја дава листата $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

- $\text{Sequence}(\langle \text{Start Value} \rangle, \langle \text{End Value} \rangle)$

Тука се задаваат почетната и крајната вредност на елементите во листата, а се подразбира дека чекорот е 1.

Со $\text{Sequence}(3, 7)$ се добива листата $\{3, 4, 5, 6, 7\}$.

- $\text{Sequence}(\langle \text{Start Value} \rangle, \langle \text{End Value} \rangle, \langle \text{Increment} \rangle)$

Ова е слично на претходната варијанта, само се задава и чекорот.

На пример, со $\text{Sequence}(1, 3, 0.5)$ се добива листата $\{1, 1.5, 2, 2.5, 3\}$.

Во претходните три варијанти се подразбира дека $\langle \text{Expression} \rangle$ е исто со $\langle \text{Variable} \rangle$.

Така на пример, листата $\{1, 1.5, 2, 2.5, 3\}$ се добива и со наредбата $\text{Sequence}(n, n, 1, 3, 0.5)$.

- $\text{Sequence}(\langle \text{Expression} \rangle, \langle \text{Variable} \rangle, \langle \text{Start Value} \rangle, \langle \text{End Value} \rangle)$

Овде се подразбира само дека чекорот е 1, а се внесуваат $\langle \text{Expression} \rangle$, $\langle \text{Variable} \rangle$, $\langle \text{Start Value} \rangle$, $\langle \text{End Value} \rangle$, т.е. изразот, променливата, нејзината почетна и крајна вредност, соодветно.

б) Ќе наведеме уште неколку поважни наредби директно поврзани со листи во GeoGebra.

- $\text{Append}(\langle \text{List} \rangle, \langle \text{Object} \rangle)$

Го додава $\langle \text{Object} \rangle$ како последен елемент на $\langle \text{List} \rangle$. Така се добива нова листа. На пример, со $\text{Append}(\{1, 2\}, 5)$ се добива листата $\{1, 2, 5\}$.

- $\text{Element}(\langle \text{List} \rangle, \langle \text{Position of Element} \rangle)$

Од листата $\langle \text{List} \rangle$ го издвојува елементот што се наоѓа на местото $\langle \text{Position of Element} \rangle$ (почнувајќи од 1).

На пример, со $\text{Element}(\{10, 20, 30\}, 3)$ се добива 30.

- $\text{First}(\langle \text{List} \rangle, \langle \text{Number of Elements} \rangle)$ и
 $\text{Last}(\langle \text{List} \rangle, \langle \text{Number of Elements} \rangle)$

Од листата $\langle \text{List} \rangle$ се издвојуваат во посебна листа првите односно последните $\langle \text{Number of Elements} \rangle$ елементи.

На пример, со $\text{First}(\{1, 2, 3\}, 2)$ се добива листата $\{1, 2\}$.

Со наредбите $\text{First}(\langle \text{List} \rangle)$ и $\text{Last}(\langle \text{List} \rangle)$ се извојуваат во листа првиот односно последниот елемент на листата $\langle \text{List} \rangle$.

- $\text{Insert}(\langle \text{Object} \rangle, \langle \text{List} \rangle, \langle \text{Position} \rangle)$

Во листата $\langle \text{List} \rangle$ се вметнува $\langle \text{Object} \rangle$ на позиција $\langle \text{Position} \rangle$.

На пример, со $\text{Insert}(5, \{1,3\}, 2)$ се добива листата $\{1,5,3\}$.

- $\text{Sort}(\langle \text{List} \rangle)$

Ја сортира листата $\langle \text{List} \rangle$ во растечки редослед.

На пример, со $\text{Sort}(\{3, 2, -5\})$ се добива листата $\{-5,2,3\}$.

- $\text{Take}(\langle \text{List} \rangle, \langle \text{Start Position} \rangle, \langle \text{End Position} \rangle)$

Се формира нова листа која се состои од елементите на $\langle \text{List} \rangle$ кои се наоѓаат меѓу $\langle \text{Start Position} \rangle$ и $\langle \text{End Position} \rangle$ елемент на $\langle \text{List} \rangle$.

На пример со $\text{Take}(\{1,2,3,4,5\}, 2, 4)$ се формира листата $\{2,3,4\}$.

- $\text{Union}(\langle \text{List 1} \rangle, \langle \text{List 2} \rangle)$

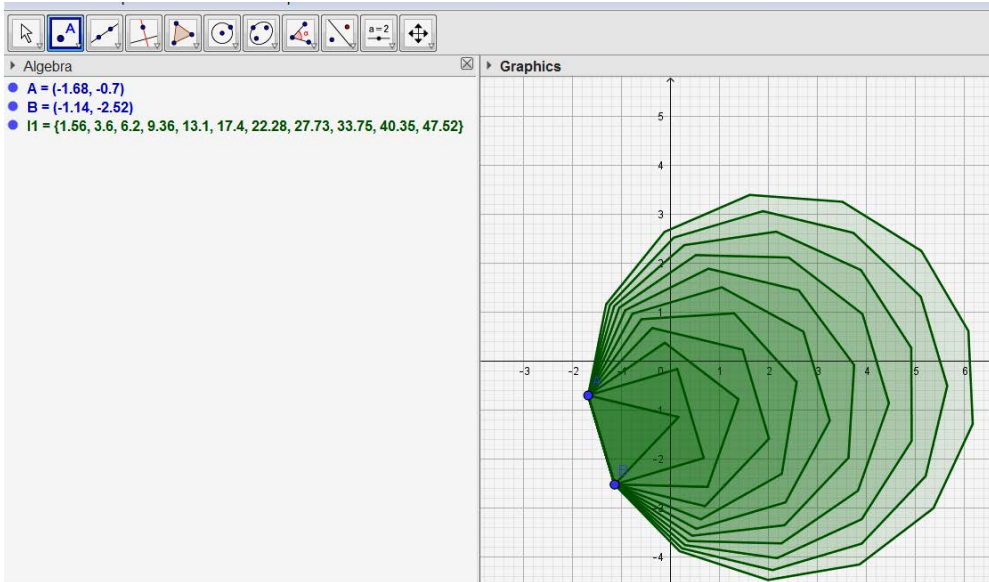
Се формира нова листа која е унија на двете листи, сметани како множества. Притоа, елементите што се повторуваат се бришат сите освен еден.

На пример, со $\text{Union}(\{1,1,1\}, \{1\})$ се добива листата $\{1\}$, а со $\text{Union}(\{2, 1, 2\}, \{1\})$ се добива $\{2,1\}$.

3. ПРИМЕРИ

Натаму, ќе наведеме неколку примери за примена на наредбата Sequence . Се надеваме дека овие примери ќе помогнат за поголема употреба на листи во GeoGebra.

Пример 1. Нека A и B се точки од рамнината (тие може да се изберат со кликување со алатката за точки или со задавање на нивните координати). Со наредбата $\text{Sequence}(\text{Polygon}(A,B,n), n, 3, 13)$ се прикажуваат сите правилни n -аголници, за $n = 3, 4, \dots, 13$ (Слика 2). Притоа се прикажува и низата Π од плоштините на многуаголниците.

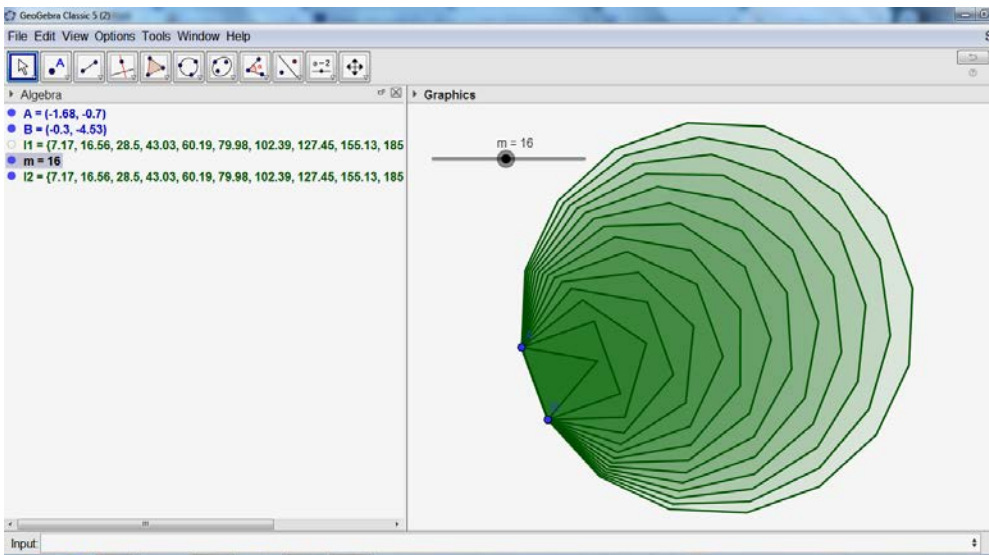


Слика 2. Приказ на резултатот од наредбата $\text{Sequence}(\text{Polygon}(A,B,n),n,3,13)$.

Доколку се дефинира и лизгач m кој прима вредности природни броеви (во овој случај од 3 до 30), со негова промена и со наредбата

$$\text{Sequence}(\text{Polygon}(A,B,n),n,3,m)$$

се прикажуваат правилните n -аголници, за $n = 3, \dots, m$. На Слика 3 е прикажано за вредност на лизгачот $m = 16$.



Слика 3. Резултат од примената на наредбата $\text{Sequence}(\text{Polygon}(A,B,n),n,3,m)$ со лизгач m за $m = 16$.

Пример 2. Нека F и G се две точки од рамнината, а n е лизгач кој прима вредности природни броеви (во нашиот случај до 30). Со наредбата

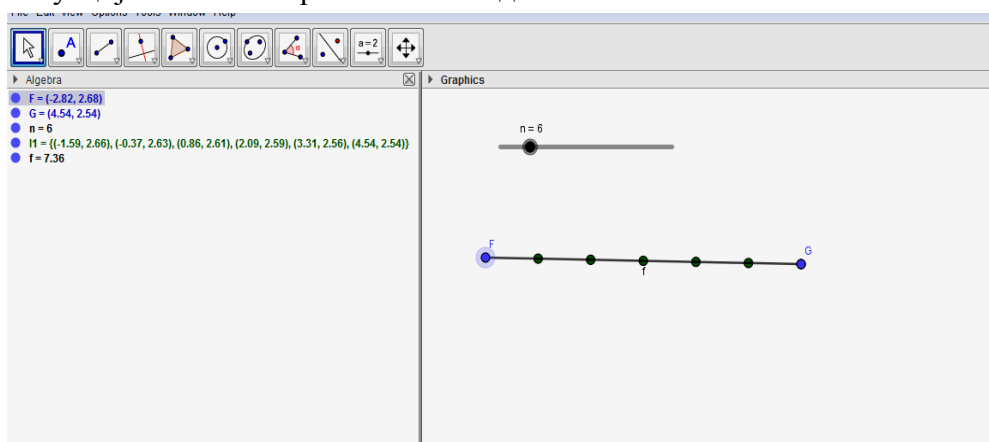
$$\text{Sequence}(\text{Translate}(F, \text{Vector}(F, G) * k/n), k, 1, n)$$

отсечката FG се дели на n еднакви делови, т.е. се формира низа од точки од отсечката FG со кои таа е поделена на n еднакви делови.

Овде секоја од точките на поделбата се добива со translација на

точката F за вектор $\frac{k}{n} \overrightarrow{FG}$, за $k = 1, \dots, n$. На слика 4 е прикажана

ситуацијата $n = 6$. Притоа низата од точки е Π .



Слика 4. Приказ на примената на наредбата $\text{Sequence}(\text{Translate}(F, \text{Vector}(F, G) * k/n), k, 1, n)$.

Пример 3. Нека k е даден природен број. Со наредбата

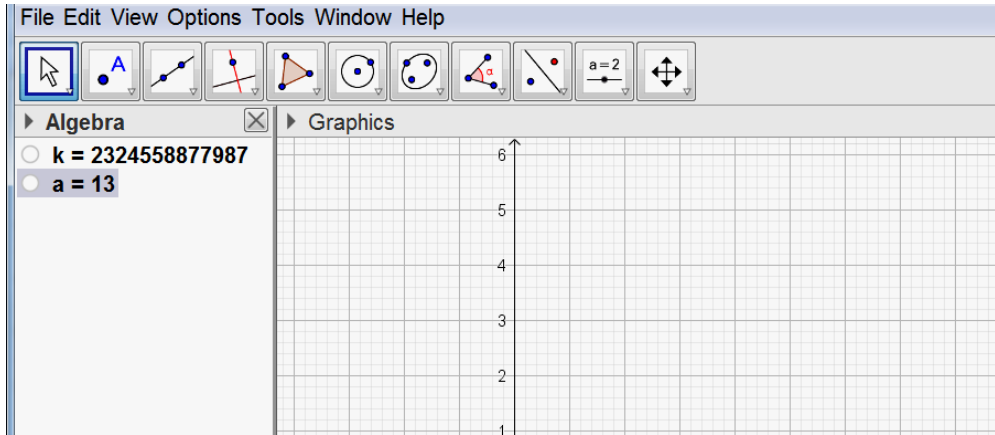
$$\text{Length}(\text{Sequence}(\text{If}(\text{floor}(k/10^{(j-1)}) \neq 0, 0, 1), j, 1, 20) \setminus \{0\})$$

се добива бројот на цифри на k за броеви со најмногу 20 цифри.

Бидејќи GeoGebra не е предвидена за големи нумерички пресметки, бројот на цифри го ограничиме до 20. Притоа, да забележиме дека во условот на наредбата If, наместо знакот „ \neq “, треба да се стави знакот „ \neq “, Floor(x) е наредба за цел дел од x , а со Length се определува бројот на елементи во листата. Така овде бројот k се дели последователно со 10^{j-1} , $j = 1, \dots, 20$ и ако целиот дел од количникот е различен од 0 во низата се става 1, што би значело дека бројот k има цифра на j -тото место од десно, а во спротивно 0. На овој начин се формира листа од 0

и 1. Потоа со $\{0\}$ (разлика на множества) се бришат сите нули од низата. Остануваат единици колку што има цифри бројот k , па со Length се бројат тие единици. Резултатот е прикажан на Слика 5.

Можеби овој начин на наоѓање на бројот на цифрите не е најоптимизиран, но сметаме дека добро прикажува употреба на повеќе наредби поврзани со листи.



Слика 5. Резултат од примена на наредбата
 $\text{Length}(\text{Sequence}(\text{If}(\text{floor}(k/10^{(j-1)})=0,0,1),j,1,20)\setminus\{0\})$
 за дадена вредност на бројот k .

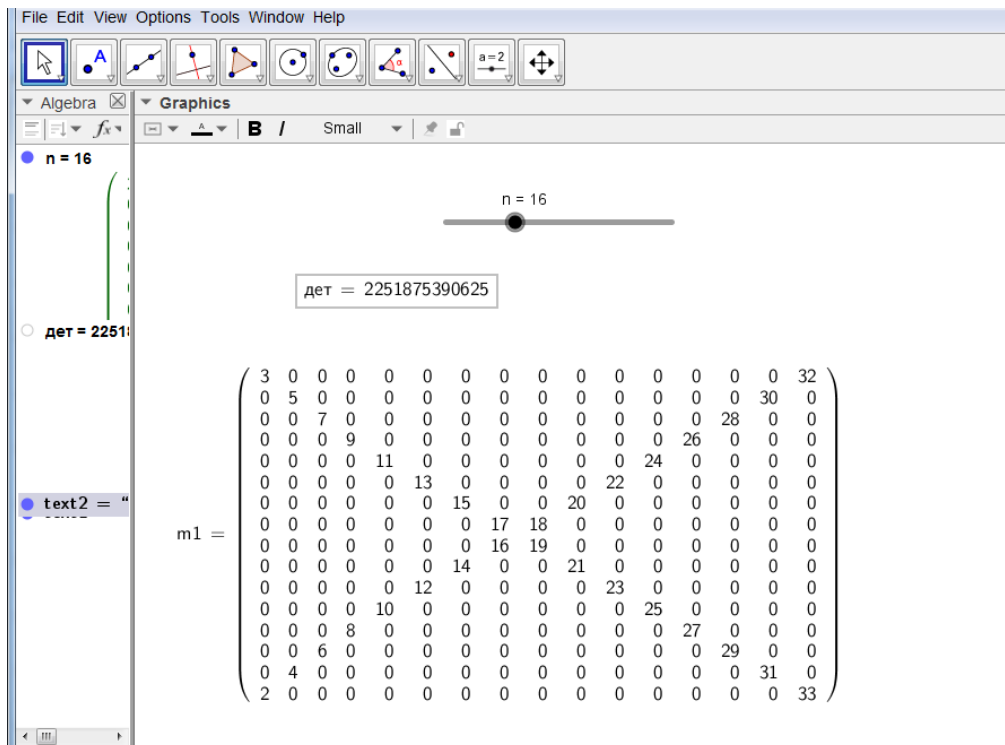
Пример 4. Нека n е природен број. Со

$\text{Sequence}(\text{Sequence}(\text{If}(i==j,2*i+1,\text{If}(i==n+1-j,2*i,0)),i,1,n),j,1,n)$
 се формира матрицата $m1$ (оваа ознака GeoGebra автоматски ја доделува и таа може корисникот да ја смени во секое време) од ред $n \times n$ која по главната дијагонала ги има броевите $3, 5, 7, \dots, 2n + 1$, почнувајќи од горниот лев агол, а по споредната ги има броевите $2, 4, 6, \dots, 2n$ почнувајќи од долниот лев агол (на слика 6, $n = 16$).

Со наредбата $\text{Determinant}(m1)$ се пресметува детерминантата на $m1$.

Со поместување на n може да забележиме дека детерминантата се пресметува само за $n \leq 23$, што е едно од ограничувањата на пакетот.

Креирање листи во динамички софтвер



Слика 6. Резултат од примената на
 $\text{Sequence}(\text{Sequence}(\text{If}(i==j, 2*i+1, \text{If}(i==n+1-j, 2*i, 0)), i, 1, n), j, 1, n)$
 за $n = 16$.

Пример 5. Нека A и B се две точки од рамнината, а n е лизгач кој е природен број. Со наредбата

$$\text{Polygon}(A, B, n)$$

се формира правилен n -аголник poly1 со страна AB . Потоа со

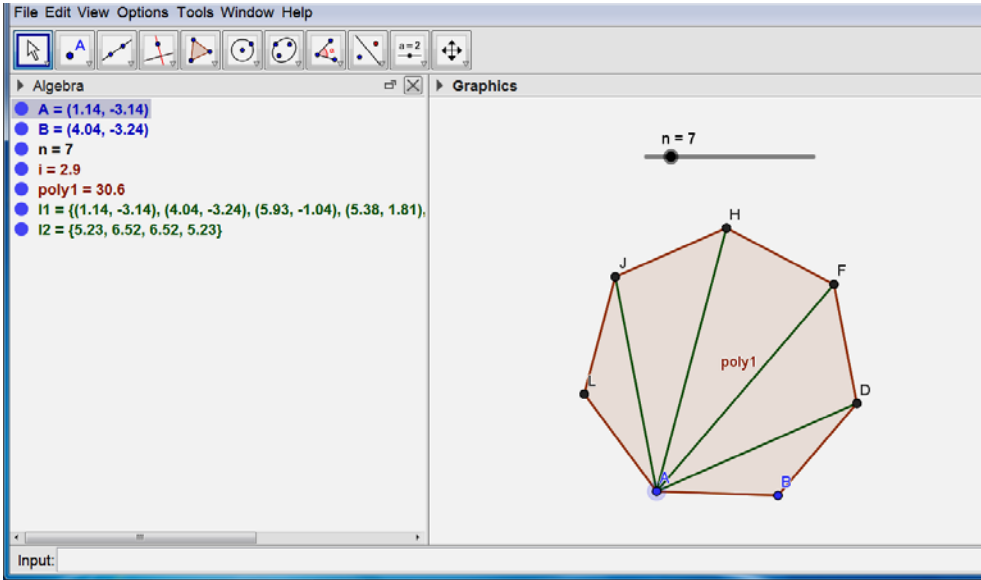
$$\text{Sequence}(\text{Vertex}(\text{poly1}, i), i, 1, n)$$

се формира листа $l1$ од темињата на тој многуаголник, а користејќи ја оваа листа со

$$\text{Sequence}(\text{Segment}(\text{Element}(l1, 1), \text{Element}(l1, v + 2)), v, 1, n - 3)$$

се формира листа од сите дијагонали од темето A , т.е. од првото теме од листата $l1$ што е определено со наредбата $\text{Element}(l1, 1)$.

На Слика 7 прикажани се сите овие елементи.



Слика 7. Приказ на примената на $\text{Sequence}(\text{Segment}(\text{Element}(l1, 1), \text{Element}(l1, v + 2)), v, 1, n - 3)$.

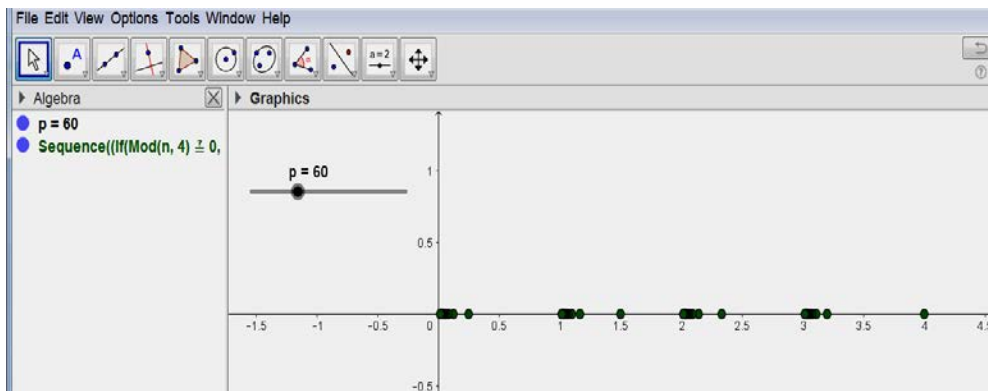
Пример 6. Нека p е лизгач природен број. Со

$$\text{Sequence}((\text{If}(\text{Mod}(n,4)==0,1/n,\text{If}(\text{Mod}(n,4)==2,(n+1)/n,\text{If}(\text{Mod}(n,4)==3,(2n+1)/n,\text{If}(\text{Mod}(n,4)==1,(3n+1)/n,0))))),0),n,1,p)$$

претставени се во листа првите p елементи на низата

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, n \equiv 0(\text{mod } 4) \\ \frac{3n+1}{n}, n \equiv 1(\text{mod } 4) \\ \frac{n+1}{n}, n \equiv 2(\text{mod } 4) \\ \frac{2n+1}{n}, n \equiv 3(\text{mod } 4) \end{cases}$$

т.е. точките $(a_n, 0)$ се претставени во рамнина, односно на бројната права. Оваа низа е пример на низа со 4 точки на натрупување. Распоредот на членовите на оваа листа (низа) кога $p = 60$ може да се види на Слика 8.

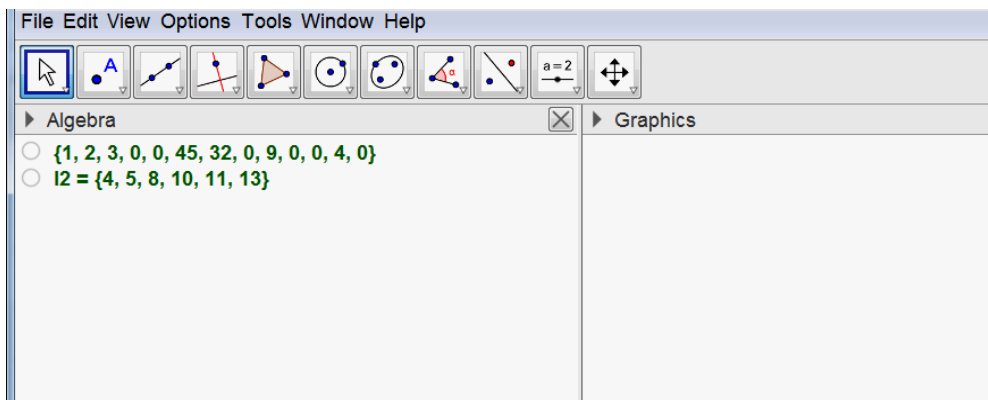


Слика 8. Првите 60 елементи од низата од Пример 6.

Пример 7. Нека L е листа. Со

$$\text{Sequence}(\text{If}(\text{Element}(L, i) = 0, i, 0), i, 1, \text{Length}(L)) \setminus \{0\}$$

се прикажуваат во листа местата на кои се наоѓа бројот 0 во листата L (Слика 9).



Слика 9. Местата на нултите елементи од дадена листа.

Се надеваме дека со наведените примери помогнавме да го доближиме до корисникот креирањето листи во GeoGebra и дел од нивната можна примена. Примерите овде се поедноставни. Посложени примени на листи може да се видат во [1].

Повеќе за GeoGebra може да се види на web страната за овој пакет [2]. Извонреден учебник со многу примери во кои се користи динамичноста на GeoGebra е [3].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] F. M. Jiménez, *Sequences in GeoGebra*,
<https://ggjro.files.wordpress.com/2011/07/5francisco-maiz-jimenez-version-12bun.pdf>
- [2] GeoGebra
www.geogebra.org
- [3] И. Е. Люблинская, С. В. Тихомирова, *Преподавание геометрии в начальной школе с использованием приложения GeoGebra. Методическое пособие для учителей*, Издательство Владимирского государственного университета, Владимир, Россия, 2017.

¹ Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје
Природно-математички факултет,
Архимедова 3, 1000 Скопје, Р. Македонија
e-mail: gorgi.markoski@gmail.com

² СУГС „Георги Димитров“, Скопје
e-mail: jmarkoska@gmail.com

Примен: 20.01.2019
Поправен: 05.02.2019
Одобен: 06.02.2019
Објавен на интернет: 12.02.2019