МАТЕМАТИЧКИ ОМНИБУС, 5 (2019), 33 – 55
http://im-pmf.weebly.com/matematicki-omnibus-kniga-5.html

ОДЛУЧУВАЊЕ ВО УСЛОВИ НА РИЗИК И НЕИЗВЕСНОСТ

Ирена Стојковска [1]

Одлучувањето е составен дел од секојдневниот живот на човекот. Многу често кога треба да донесеме одлука треба да одбереме една од две или повеќе понудени можности без да бидеме сигурни за последиците од нашиот направен избор. Така, нашата одлука за избор на факултет и студиска програма може да ни обезбеди сигурно и високопрофитабилно вработување, или може и да нè доведе до невработеност и големи долгови. Посетата на доктор може да резултира со рано откривање и навремено лечење на болеста, или, пак, да биде загуба на време и пари. Имено, тешко е да се замисли ситуација која не бара од нас да донесеме одлука.

Задачата на теоријата на одлучување е изучувањето и примената на методите за одредување на најдобриот избор во услови на ризик, кога не се знае што ќе се случи, но позната е распределбата на веројатности на сите можни исходи, или, во услови на неизвесност, кога ниту се знае што ќе се случи, ниту е позната распределбата на веројатности на исходите. Теоријата на одлучување е интердисциплинарна област која ја проучуваат и применуваат економистите, статистичарите, психолозите, биолозите, филозофите, а наоѓа примена и во политичките и другите општествени науки, како и во компјутерските науки. Теоријата на одлучување е блиска со теоријата на игри, при што првата се однесува на одлуките на една личност, додека втората ја проучува интеракцијата на играчите чии одлуки имаат взаемно влијание. Основен постулат на теоријата на одлучување е вреднување на донесената одлука единствено според последиците од таа одлука. На пример, кај наједноставните проблеми на одлучување во услови на ризик, кај кои на последиците може да им се доделат монетарни вредности, најчесто за најдобра одлука се зема одлуката чии последици имаат највисока очекувана монетарна вредност. Ако, пак, се разгледува корисноста на последиците, тогаш често најдобрата одлука се одредува според теоријата на очекувана корисност.

Во продолжение на овој труд ќе изложиме некои од повлијателните критериуми (теории) за одлучување, почнувајќи од критериумот на очекувана вредност, теоријата на очекувана корисност, теоријата на перспектива и теоријата на кумулативна перспектива, кои се стремат на најдобар можен начин да ја измоделираат психолошката природа на човекот при процесот на одлучување, [1, 4, 7, 9, 10].

1. ОЧЕКУВАНА ВРЕДНОСТ

Ќе го објасниме одлучувањето врз основа на очекувана вредност со помош на еден едноставен пример на одлучување во услови на ризик. Претпоставете дека играте игра на среќа при што среќата ви зависи од исходите од фрлањето на една монета. Значи веројатностите на исходите ви се познати, тие се пара или грб и се реализираат со еднакви веројатности од 0,5 секоја. Правилата на играта се следните: ако се падне пара добивате 10 денари, а ако се падне грб не добивате ништо. Која е највисоката сума на пари која би ја платиле за да играте една ваква игра на среќа? Логичниот одговор е дека таа сума не треба да ја надмине очекувата вредност на добивката која се пресметува како збир од прозводите меѓу вредностите на добивките при секој од исходите и нивните веројатности. Односно, во овој случај очекуваната добивка е $10 \cdot 0{,}5 + 0 \cdot 0{,}5 = 5$ денари, па вие не би требало да платите повеќе од 5 денари за да ја играте оваа игра.

Очекуваната вредност не секогаш може да биде прифатлива за носителот на одлуката. Ако наместо добивка од 10 денари, добивката беше 10 000 денари, дали ќе се одлучевте да вложите 5 000 денари за да ја играте играта на среќа опишана погоре? Даниел Бернули (Daniel Bernoulli, 1700-1782), швајцарски физичар и математичар, меѓу првите забележал дека кога луѓето треба да донесат одлуки, не секогаш ја максимизираат добивката, туку ја максимизираат „корисноста“ од добивката, што претставува слика на нивната лична сатисфакција и придобивка. Тој забележал дека постои врска меѓу вредноста на парите и корисноста, но дека таа врска исчезнува со зголемувањето на вредноста на добиените пари, [1]. На пример, дополнителен приход од 1 000 денари нема иста корисност за човек кој има плата од 15 000 денари и за човек кој има плата од 150 000 денари.

1.1. ПАРАДОКСОТ САНКТ ПЕТЕРСБУРГ

Дека одлучувањето врз основа на очекуваната вредност не е најдобро решение се покажува и со помош на хипотетичката игра на среќа позната како пардоксот Санкт Петерсбург, чие решение дадено од Даниел Бернули за првпат е публикувано во *Мемоарите на Империјалната Академија на Науки во Санкт Петерсбург* во 1738 година, [1]. Теориската игра се состои во следното: фрлате фер монета и ако се падне пара, добивате 2 долари и повторно ја фрлате монетата. Ако во второто фрлање се падне пара, добивате 4 долари и повторно ја фрлате монетата. Ако во третото фрлање се падне пара, добивате 8 долари итн. Ако во k-тото фрлање се падне пара, добивате 2^k долари. Тогаш, кога ќе се падне грб за прв пат, играта завршува, а вашата добивка е збирот на сите дотогашни добивки. Под претпоставка дека играта продолжува сè додека не се падне грб, теориски таа може бесконечно да трае. Притоа, веројатноста за добивка од 2^k долари е еднаква на $1/2^k$. Тогаш, очекуваната добивка е

$$E = 2\cdot\tfrac{1}{2} + 4\cdot\tfrac{1}{4} + 8\cdot\tfrac{1}{8} + \ldots + 2^k\cdot\tfrac{1}{2^k} + \ldots = 1+1+1+\ldots+1+\ldots = \infty,$$

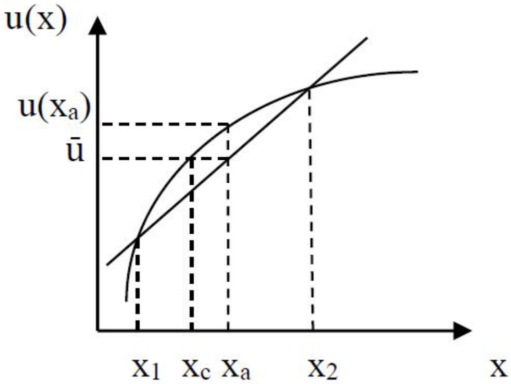
па би требало секој да се нафати да ја игра оваа игра и тоа за која било висина на влог. Меѓутоа, според коментарите објавени заедно со играта, многумина не би дале повеќе од 25 долари за да ја играат. Парадоксот тука произлегува од неволноста на луѓето да платат за да играат игра која има бесконечна очекувана добивка.

2. ТЕОРИЈА НА ОЧЕКУВАНА КОРИСНОСТ

Парадоксот Санкт Петерсбург бил повод Даниел Бернули во 1738 година, да ја предложи теоријата на очекувана корисност и да предложи експлицитен облик на функција на корисност основан на претпоставката за исчезнувачка (опаѓачка) маргинална корисност на парите, [1]. Според теоријата на очекувана корисност, при одлучувањето, луѓето не одлучуваат врз основа на очекуваната вредност на добивката, туку врз основа на нејзината очекувана корисност. Ако со $(x_1, p_1;\ldots;x_n, p_n)$ ја означиме лотаријата при која износот x_k се добива со веројатност p_k, $k=1,\ldots,n$ и $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$, тогаш *очекуваната корисност* на таа лотарија е

$$EU = u(x_1)\cdot p_1 + ... + u(x_n)\cdot p_n \ , \qquad (1)$$

каде што $u(x)$ е функцијата на корисност која, според Даниел Бернули, кај игрите на среќа е монотоно растечка и конкавна. За очекувана корисност, дефиницијата (1) соодветно се проширува и во случај на бесконечна дискретна распределба и во случај на непрекината распределба на добивката. Конкавноста, пак, на функцијата на корисност се совпаѓа со аверзијата на ризик, односно ненаклонетоста на луѓето кон преземање ризици. Ова значи дека носителот на одлука доделува поголема корисност на очекуваната добивка од лотаријата (x_a), отколку на очекуваната корисност од таа лотарија ($\bar{u}$), види Слика 1. Аверзијата на ризик придонесува да играчот повеќе би се одлучил за сигурна добивка x, отколку за ризична лотарија со очекувана добивка x. Од друга страна, конвексна функција на корисност укажува на склоност кон ризик, а линеарна функција на корисност значи неутрален став кон ризикот.



Слика 1. Функција на корисност.

2.1. РЕШЕНИЕ НА ПАРАДОКСОТ САНКТ ПЕТЕРСБУРГ

Функцијата на корисност која Даниел Бернули ја предложил како можно решение на парадоксот Санкт Петерсбург е логоритамската функција $u(x) = \log x$, [1]. Па, според тоа, очекуваната корисност на предложената лотарија е

$$EU = \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{2^k} \cdot u(2^k) = \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{2^k} \cdot \log 2^k = \log 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{k}{2^k},$$
$$= (\log 2) \cdot 2 = \log 2^2 = \log 4 = u(4) < \infty$$

што индицира дека лотаријата е корисна колку и корисноста на 4 долари. Па, доколку рационално размислувате, не би требало да платите повеќе од 4 долари за да ја играте оваа игра на среќа.

Понуденото решение на Даниел Бернули не е совршено. Имено повторно добиваме парадокс: ако добивката од 2^k долари во k-тото фрлање на монетата се замени со 10^{2^k} долари, тогаш очекуваната корисност станува бесконечна. Всушност, која било неограничена функција на корисност би имала неуспех во решавањето на парадоксот. Но, ова не значи дека мора да работиме со функција на корисност која е константа за сите $x \geq \bar{x}$, за некое $\bar{x}$, имено ограничена конкавна функција, која не е константа во ниеден дел, е функцијата $u(x) = 1 - e^{-x}$. Друг начин да се надмине парадоксот е да не се дозволи бесконечна очекувана вредност на добивката, што е многу пореално, односно добивката да се удвојува сè додека не се достигне максималната вредност која казиното, каде што се игра оваа игра, може да ја покрие.

2.2. АКСИОМАТИКА НА ТЕОРИЈАТА НА ОЧЕКУВАНА КОРИСНОСТ

Недостатоците при дефинирањето на функцијата на корисност на Даниел Бернули, ги надминуваат Џон фон Нојман (John Von Neumann) и Оскар Моргенштерн (Oskar Morgenstern) кои во 1944 година предлагаат аксиоматски пристап при дефинирање на функцијата на корисност во услови на ризик, [10], и Леонард Севиџ (Leonard Savage) кој во 1954 година ги поставува аксиоматските темели на теоријата на субјективна очекувана корисност, т.е. носењето одлуки во услови на неизвесност, [7]. Пред да ги разгледаме овие два аксиоматски пристапа, треба да се осврнеме за кратко на некои основни поими од теоријата на одлучување.

Кај еден типичен проблем на одлучување разликуваме *дејствија (избори)*, потоа *состојби (настани)* на системот кој е предмет на разгледување и *последици (исходи)* од дејствијата при секоја од состојбите. Овие поими ќе ги илустрираме на примерот со „омлетот на Севиџ“, кој претставува и пример за проблем на одлучување во кој не се вклучени монетарни вредности.

Пример 1. (Омлетот на Севиџ). ([7, 8]) Вашата жена тукушто скршила пет јајца во чинијата, а вие во тој момент доаѓате и се нудите да го завршите правењето на омлетот. Шестото јајце не е скршено и заради некоја причина, вие треба да одлучите дали ќе го искористите за омлетот или ќе го фрлите. Треба да се одлучите за едно од следниве дејствија:
А) да го скршите јајцето во чинијата заедно со останатите пет јајца,
Б) да го скршите јајцето во друга чинија за да проверите дали е добро,
В) да го фрлите јајцето без да го проверите дали е добро.

Последниците од преземеното дејствие (А, Б или В), при секоја од состојбите на јајцето (добро или расипано) се дадени во следната Табела 1.

Дејствија	*Состојби*	
	Добро јајце	Расипано јајце
Да се скрши во чинијата (А)	*Омлет од шест јајца.*	*Нема омлет, уништени пет добри јајца.*
Да се скрши во друга чинија (Б)	*Омлет од шест јајца, една плус чинија за миење.*	*Омлет од пет јајца, една плус чинија за миење.*
Да се фрли (В)	*Омлет од пет јајца, уништено едно добро јајце.*	*Омлет од пет јајца.*

Табела 1. Последиците кај проблемот „Омлетот на Севиџ“.

Нека со S го означиме множеството од сите различни состојби, а дејствијата кои се конечновредносни функции ги означуваме со $f:S \to X \subset \mathbb{R}$, каде што X е просторот од последиците. Множеството од сите дејствија го означуваме со A. Нека $L(X)$ е множеството од сите распределби на веројатност $P: X \to [0,1]$ индуцирани од некое дејствие f т.е. $P(x) = \int_{\{s\in S: f(s)=x\}} f(s)\,ds$ за $x \in f(S)$, и $P(x)=0$ за $x \notin f(S)$. Односно, за дефинирање на веројатноста $P(x)$ за реализирање на последицата x од дејствието f, се зема предвид и тоа дека последицата x

може да биде последица на истото дејствие f при повеќе состојби на системот. Во случај на дискретен птостор од состојби S, интегралот преминува во сума. Тогаш, теоријата на очекувана корисност во услови на ризик, претставува збир од својства на бинарна релација дефинирана над множеството $L(X)$ од сите распределби на веројатност, која во услови на неизвесност се разгледува над множеството A од сите дејствија. Да забележеме уште дека при одлучување во услови на ризик, елементите на $L(X)$ ги нарекуваме и *лотарии*, [5].

Дефиниција 1. Над множеството $L(X)$ дефинираме *бинарна релација на допаѓање (преферирање)* со $P \succ Q$, ако лотаријата P е подопадлива од лотаријата Q, односно носителот на одлуката кога би требало да одлучува меѓу P и Q, би ја одбрал P. Ако носителот на одлуката е неодлучен (индиферентен) меѓу P и Q, означуваме $P \sim Q$. Ако P е подопадлива или индиферентна во однос на Q, пишуваме $P \succeq Q$.

Четирите аксиоми на кои се заснова теоријата на очекувана корисност на фон Нојман и Моргенштерн, во услови на ризик, се следните:

A1. Комплетност. Кои било две лотарии $P, Q \in L(X)$ се во релација на допаѓање или индиферентност, т.е. важи $P \succeq Q$ или $Q \succeq P$.

A2. Транзитивност. Ако за $P, Q, R \in L(X)$ важи $P \succeq Q$ и $Q \succeq R$, тогаш важи $P \succeq R$. Слично и за релациите $\succ$ и $\sim$.

A3. Непрекинатост. Ако за $P, Q, R \in L(X)$ важи $P \succeq Q \succeq R$, тогаш постои веројатност $p \in [0,1]$ така што $pP + (1-p)R \sim Q$, каде изразот од левата страна означува дека лотаријата P се прифаќа со веројатност p, а лотаријата R со веројатност $(1-p)$.

A4. Независност. За секои $P, Q, R \in L(X)$ и $p \in [0,1]$,

$$P \succeq Q \Leftrightarrow pP + (1-p)R \succeq pQ + (1-p)R.$$

Да забележиме дека во аксиомите A3 и A4 искористено е дека множеството $L(X)$ е затворено во однос на мешаната операција од интерес, односно за $P, Q \in L(X)$ и $p \in [0,1]$ имаме дека и $pP + (1-p)Q \in L(X)$ и важи

$$(pP+(1-p)Q)(x)=pP(x)+(1-p)Q(x)\text{, за } x\in X\ .$$

Следната теорема покажува дека ако овие аксиоми се исполнети, тогаш индивидуата има рационално однесување, па допаѓањата може да се претставaт со помош на функција на корисност за најдобриот избор во однос на релацијата на допаѓање да биде оној кој има најголема очекувана корисност.

Теорема 1. (Теорема на фон Нојман и Моргенштерн за репрезентација на очекуваната корисност). ([10]) *Под претпоставка дека важат аксиомите* A1 − A4*, постои кардинална функција на корисност (единствена до позитивна линеарна трансформација)* $u: X\to\mathbb{R}$ *така што за кои било две лотарии* $P,Q\in L(X)$ *важи*

$$P\succeq Q \ \Leftrightarrow\ EU(P)=\sum_{x\in \operatorname{supp}(P)} P(x)u(x)\geq \sum_{x\in \operatorname{supp}(Q)} Q(x)u(x)=EU(Q)\,, \qquad (2)$$

каде што $EU(P)$ *и* $EU(Q)$ *се очекуваните корисности на лотариите* P *и* Q*, соодветно.*

При одлучување во услови на неизвесност, Севиџ ја заменува релацијата на допаѓање со релација на недопаѓање, па така, со $f\succeq g$ се означува дека на носителот на одлуката *не му се допаѓа повеќе* дејствието g во споредба со f. Севиџ предложил седум аксиоми кои наликуваат на оние на фон Нојман и Моргенштерн. И во аксиомите на Севиџ се претпоставува комплетност и транзитивност на релацијата, постои аксиома за независност, како и аксиоми од техничка природа за нетривијалност, непрекинатост и доминација. Специјални аксиоми се аксиомите со кои се постигнува субјективната веројатност од субјективната корисност, во што е и предноста на аксиомите на Севиџ, [5, 7, 8].

Според Севиџ, аксиомите кои ги воведува се еквивалентни со постоењето на единствена неатомска конечно-адитивна веројатносна мера μ на S и неконстантна кардинална единствена функција на корисност $u: X\to\mathbb{R}$ за која важи следната репрезентација на субјективната очекувана корисност SEU:

$$f\succeq g \ \Leftrightarrow\ SEU(f)=\int_S u(f(s))d\mu(s)\geq \int_S u(g(s))d\mu(s)=SEU(g)\,. \qquad (3)$$

Да забележиме дека, како и кај лотариите, дејствието $f\in A$ се означува со $(x_1,E_1;\ldots;x_n,E_n)$, каде што x_k е последицата од дејствието при состојба E_k на системот кој е предмет на разгледување и при тоа настаните E_k формираат разбивање на S.

Теоријата на фон Нојман и Моргенштерн е поприменлива кај игрите со позната матрица на исплати и познат избор на стратегии, додека теоријата на Севиџ е поприменлива за моделирање на игри креирани од природата, кога играчот треба да ги одреди своите субјективни убедувања. Но, и двете теории имаат недостатоци при нивна примена во економските проблеми на одлучување, [8].

3. ТЕОРИЈА НА ПЕРСПЕКТИВА

Теоријата на очекувана корисност скоро веднаш по нејзиното предлагање наишла на критики и контрапримери. Едни од поистакнатите критичари на теоријата на очекувана корисност се Даниел Канеман (Daniel Kahnemen) и Амос Тверски (Amos Tversky), кои во 1979 година ја предлагаат теоријата на перспектива како алтернативна теорија на одлучување во услови на ризик, [4].

3.1. КРИТИКИ НА ТЕОРИЈАТА НА ОЧЕКУВАНА КОРИСНОСТ

Пред да ја изложат теоријата на перспектива, Канеман и Тверски, набљудувале некои феномени кои противречат на претставувањето на корисноста од дејствието, како тежинска сума од корисностите на последиците и нивните веројатности. Можеби најпознат контрапример на теоријата на очекувана корисност е тој на францускиот економист Морис Але (Maurice Allais) од 1953 година со кој се испитува *ефектот на сигурност*, односно дека луѓето им придаваат поголемо значење на настаните кои се сигурни во однос на настаните кои се помалку веројатни, дури и на сметка на помала добивка. При промена на сигурниот настан во помалку веројатен настан, наклонетоста забележително се сменила. Ваквото однесување на испитаниците противречи на теоријата на очекувана корисност, според која корисноста од некоја добивка не треба да се менува со промена на нејзината веројатност за добивка. Подолу, оваа противречност е покажана. Ние се обидовме ефектот на сигурност и некои од останатите феномени кои ги испитувале Канеман и Тверски, да ги анализираме на нова група испитаници.

Резултатите изложени во овој дел се дел од одговорите на анкетата спроведена со група студенти и вработени на Природно-математичкиот факултет во Скопје на почетокот од месец декември 2018 година. Испитаниците одговараа на 20 анкетни прашања. Анкетните прашања се состоеја од избор помеѓу две понудени опции. Најголемиот дел од прашањата содржеа парични износи кои беа прилагодени за да бидат споредливи со месечните примања во Република Македонија. Од испитаниците се бараше да замислат дека прикажаната ситуација е реална и да забележат за што би се одлучиле. Пополнувањето на анкетата беше анонимно, а анкетата беше спроведена на 52 испитаници, од кои 38 студенти и 14 вработени, при што половата застапеност беше 38 од женски пол и 14 од машки пол. Во продолжение излагаме дел од прашањата, соодветните одговори и нивното толкување.

Едноставен пример за илустрација на ефектот на сигурност се следните две прашања. Во средни загради е означен процентот од испитаниците кои ја одбрале соодветната лотарија.

Проблем 1. Одберете помеѓу:

А: + 40 000 ден. со 80% шанси	Б: + 30 000 ден. со 100% шанси
0 ден. со 20% шанси	
[38,46%]	**[61,54%]**

Проблем 2. Одберете помеѓу:

В: + 40 000 ден. со 20% шанси	Г: + 30 000 ден. со 25% шанси
0 ден. со 80% шанси	0 ден. со 75% шанси
[53,85%]	[46,15%]

Според добиените одговори на Проблемот 1 мнозинството испитаници ја одбраа сигурната лотарија Б, додека пак во Проблемот 2 мнозинството испитаници ја одбраа помалку веројатната лотарија В која е со повисока добивка. Ваквиот модел на избор противречи на теоријата на очекувана корисност. Имајќи предвид дека $u(0)=0$, од начинот на извршениот избор добиваме дека

$$0,8\cdot u(40000) < u(30000) \text{ и } 0,2\cdot u(40000) > 0,25\cdot u(30000).$$

Со замена на првото неравенство во второто, добиваме

$$0,2\cdot u(40000)>0,25\cdot u(30000)>0,25\cdot 0,8\cdot u(40000)=0,2\cdot u(40000),$$

што е противречност. Не толку големата разлика во процентите на избор на лотарија во секоја од ситуациите, може да се толкува и со индиферентност (посебно во Проблемот 2) меѓу предложените лотарии, но и во случај на индиферентност ќе дојдеме до противречност во претставувањето заради поголемата разлика во допаѓањата меѓу лотариите во Проблемот 1. За разлика од овие резултати, во резултатите кај Канеман и Тверски, [4], ефектот на сигурност е значително поизразен. Недоволната изразеност на овој ефект во нашите резултати, можеби се должи на евентуалните пресметки кои испитаниците ги правеа додека одлучуваа, бидејќи последиците имаат нумерички вредности. Затоа пак, ефектот на сигурност најмногу дојде до израз кај единствените прашања без монетарни последици, како што покажуваат следните резултати.

Проблем 3. Одберете помеѓу:

А: Тринеделна тура низ Англија, Франција и Италија со 50% шанси. Ништо со 50% шанси.	Б: Еднонеделна тура низ Англија со 100% шанси.
[21,15%]	**[78,85%]**

Проблем 4. Одберете помеѓу:

В: Тринеделна тура низ Англија, Франција и Италија со 5% шанси. Ништо со 95% шанси.	Г: Еднонеделна тура низ Англија со 10% шанси. Ништо со 90% шанси.
[61,54%]	[38,46%]

На сличен начин како претходно се покажува дека одлуките на испитаниците во овие две ситуации (Проблем 3 и Проблем 4) противречат на теоријата на очекувана корисност. Имено, ако со x_1 ја означиме тринеделната тура низ Англија, Франција и Италија, а со x_2 ја означиме еднонеделната тура низ Англија, тогаш од резултатите имаме дека истовремено важи

$$u(x_1)\cdot 0,5<u(x_2) \text{ и } u(x_1)\cdot 0,05>u(x_2)\cdot 0,1,$$

односно

$$\frac{u(x_1)}{u(x_2)}<\frac{1}{0,5}=2 \text{ и } \frac{u(x_1)}{u(x_2)}>\frac{0,1}{0,05}=2,$$

што претставува противречност. Интересно е да се забележи дека според индивидуалната анализа на одговорите, 52% од испитаниците го имаат направено мнозинскиот избор и во едната и во другата ситуација, а дури 63% од испитаниците со својот избор ја побиваат теоријата на очекувана корисност.

Покрај ефектот на сигурност и други појави ја нарушуваат аксиоматиката на теоријата на очекувана корисност, на пример влијанието на *веројатноста* и *возможноста*. Имено, кога веројатностите за добивка се воочливи, доволно големи, тогаш луѓето ја одбираат лотаријата која е поверојатна да се добие (Проблем 5). Кога добивката е малку веројатна, но сепак возможна, тогаш луѓето ја одбираат лотаријата со поголема добивка (Проблем 6). Слично како претходно може да се покаже дека и овие избори противречат на претставувањето на очекуваната корисност.

Проблем 5. Одберете помеѓу:

А: + 60 000 ден. со 45% шанси	Б: + 30 000 ден. со 90% шанси
0 ден. со 55% шанси	0 ден. со 10% шанси
[25%]	**[75%]**

Проблем 6. Одберете помеѓу:

В: + 60 000 ден. со 0,1% шанси	Г: + 30 000 ден. со 0,2% шанси
0 ден. со 99,9% шанси	0 ден. со 99,8% шанси
[76,92%]	[23,08%]

Досега беа разгледувани лотарии со добивки. Но, што се случува кога последиците се загуби наместо добивки? Да ги погледнеме следните две ситуации на лотарии (Проблем 7 и Проблем 8) кои се со негативни износи, спротивни на износите во последните две лотарии (Проблем 5 и Проблем 6).

Проблем 7. Одберете помеѓу:

А: − 60 000 ден. со 45% шанси	Б: − 30 000 ден. со 90% шанси
0 ден. со 55% шанси	0 ден. со 10% шанси
[51,92%]	[48,08%]

Проблем 8. Одберете помеѓу:

А: − 60 000 ден. со 0,1% шанси	Б: − 30 000 ден. со 0,2% шанси
0 ден. со 99,9% шанси	0 ден. со 99,8% шанси
[42,31%]	**[57,69%]**

Тука се забележува *ефектот на рефлексија*, при кој одлучувањето помеѓу лотарии со загуби е огледална слика на одлучувањето помеѓу лотарии со добивки, што значи аверзијата на ризик во полето на добивките е пропратена со наклоност на ризик во полето на загубите. Попрецизно кажано, ако кај добивките ефектот на сигурност доведува до аверзија на ризик и одбирање на сигурна или многу веројатна добивка споредено со поголема добивка која е забележливо помалку веројатна (Проблем 5), во случај на загуби, истиот ефект доведува до склоност на ризик и одбирање на загуба која е забележливо помалку веројатна споредено со сигурна или многу веројатна загуба (Проблем 7). На ист начин како кај добивките, и кај загубите, направените избори во последните две ситуации противречат на претставувањето на очекуваната корисност.

За да си го упростат процесот на одлучување, луѓето најчесто ги игнорираат компонентите кои се заеднички за алтернативите и се фокусираат на компонентите по кои тие се разликуваат. Како последица, кога истиот избор е презентиран на поинаков начин, тие може да се одлучат за друга алтернатива, односно одлуките им се непостојани. Оваа појава е позната како *ефекет на изолација*. Следната ситуација е илустрација на овој ефект.

Проблем 9. Ја играте следната игра во две фази: Во првата фаза, постојат 75% шанси дека целата игра ќе заврши без добивка, а 25% шанси дека ќе преминете на втората фаза. Ако сте влегле во втората фаза, треба да одберете една од следните две лотарии и притоа изборот да го направите пред почетокот на играта, без да знаете дали ќе влезете во втората фаза:

А: + 40 000 ден. со 80% шанси 0 ден. со 20% шанси	Б: + 30 000 ден. со 100% шанси
[26,92%]	**[73,08%]**

Збирно, првата и втората фаза заедно, всушност формираат две лотарии: во првата лотарија добивката е 40000 ден. со 25% · 80% = 20% шанси, а во втората лотарија добивката е 30000 ден. со 25% · 100% = 25% шанси, односно Проблемот 9 има крајни последици и веројатности како Проблемот 2. Но, заради ефектот на изолација, реакцијата на испитаниците и нивниот избор е како во Проблемот 1, односно мнозинството ја занемаруваат првата фаза затоа што е заедничка за двете лотарии и се фокусираат само на втората фаза.

Носењето одлуки многу зависи од начинот на претставување на проблемите. Во следните две ситуации (Проблем 10 и Проблем 11), мнозинството од испитаниците ја занемаруваат почетната дадена сума на пари, затоа што таа карактеристика е заедничка за двете ситуации (иако сумата се разликува) и се фокусираат само на лотариите, кои, ако ги анализираме направените избори, го илустрираат ефектот на рефлексија, т.е. аверзија на ризик при добивки и склоност на ризик при загуби.

Проблем 10. За да ја играте следната игра ви даваат 10 000 ден. Ги земате и треба да одлучите во која од следните две лотарии ќе учествувате (заокружете една):

А: + 10 000 ден. со 50% шанси Б: + 5 000 ден. со 100% шанси
0 ден. со 50% шанси
[36,54%] **[63,46%]**

Проблем 11. За да ја играте следната игра ви даваат 20 000 ден. Ги земате и треба да одлучите во која од следните две лотарии ќе учествувате (заокружете една):

В: − 10 000 ден. со 50% шанси Г: − 5 000 ден. со 100% шанси
0 ден. со 50% шанси
[57,69%] [42,31%]

Да забележиме дека, кога ќе се земат предвид почетните суми, лотариите во Проблем 10 и Проблем 11 се соодветно еднакви, имено

А = В: + 20 000 ден. со 50% шанси Б = Г: + 15 000 ден. со 100% шанси
+ 10 000 ден. со 50% шанси

Очигледното игнорирање на почетните суми во Проблем 10 и Проблем 11, повлекува дека вредноста или корисноста на парите зависи од промените во богатството, повеќе отколку од крајната состојба на богатството. Ова согледување е основа на која се темели *теоријата на перспектива*.

3.2. РАВЕНКА НА ТЕОРИЈАТА НА ПЕРСПЕКТИВА

Како последица од разгледаните ефекти кои покажуваат нарушување на аксиоматиката на теоријата на очекувана корисност, Канеман и Тверски во 1979 година ја предлагаат теоријата на перспектива како алтернативна теорија за одлучување во услови на ризик, [4]. Според оваа теорија, се доделуваат вредности на добивките и загубите, а не на крајните состојби, што значи веројатностите се заменети со нивни тежини. Така, вредноста на лотаријата $(x_1, p_1;...;\mathrm{x}_n, p_n)$, која може да содржи и добивки и загуби, согласно теорија на перспектива е

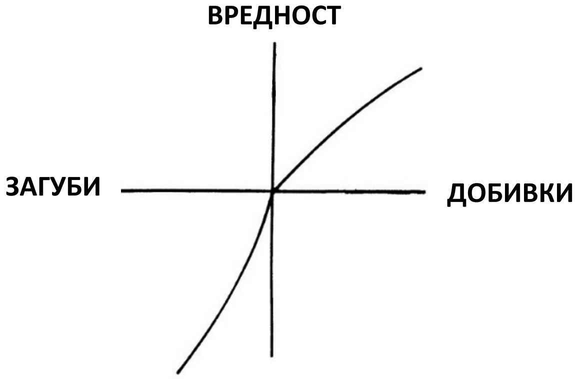
$$V_{PT} = \pi(p_1)\cdot v(x_1) + ... + \pi(p_n)\cdot v(x_n), \qquad (4)$$

каде што $v(x)$ е *функција на вредности* на последиците, која опишува како носителот на одлуките ги вреднува парите, а $\pi(p)$ е *тежинска функција* од веројатности и ги опишува ставовите на носителот на одлуките кон веројатностите. При тоа, $v(0)=0, \pi(0)=0, \pi(1)=1$.

Според Канеман и Тверски, за опишување на функцијата на вредности важна е моменталната состојба која се зема за *референтна точка* и *големината на промената* (позитивна или негативна) во однос на таа референтна точка, [4]. На пример, разликата меѓу добивка од 100 ден. и добивка од 200 ден. се чини дека е поголема отколку разликата меѓу добивка од 1100 ден. и добивка 1200 ден. Слично, разликата меѓу загуба од 100 ден. и загуба од 200 ден. се чини дека е поголема отколку разликата меѓу загуба од 1100 ден. и загуба 1200 ден. Затоа, тие предлагаат функција на вредности која е конкавна над референтната точка т.е. $v''(x)<0$ за $x>0$ и конвексна под референтната точка, т.е. $v''(x)>0$ за $x<0$. Исто така, тие забележуваат дека неатрактивноста на симетричните лотарии се зголемува со зголемување на вредноста, [4], односно за $x>y\geq 0$, лотаријата $(y,(0,5);-y,(0,5))$ е преферирана во однос на лотаријата $(x,(0,5);-x,(0,5))$, т.е.

$$\pi(0,5)\cdot v(y) + \pi(0,5)\cdot v(-y) > \pi(0,5)\cdot v(x) + \pi(0,5)\cdot v(-x),$$

од каде што ако ставиме $y=0$, добиваме $v(x)<-v(-x)$, што значи дека функцијата на вредности за загубите е пострмна од функцијата за вредности за добивките. На Слика 2 прикажан е S-обликот на функцијата на вредности според теоријата на перспектива.



Слика 2. Функција на вредности кај теоријата на перспектива, [4].

Насетувањата за обликот на функцијата на вредности, Канеман и Тверски ги потврдуваат и експериментално. Соодветни прашања беа поставени и во нашата анкета (Пример 12 и Пример 13).

Пример 12. Одберете помеѓу:

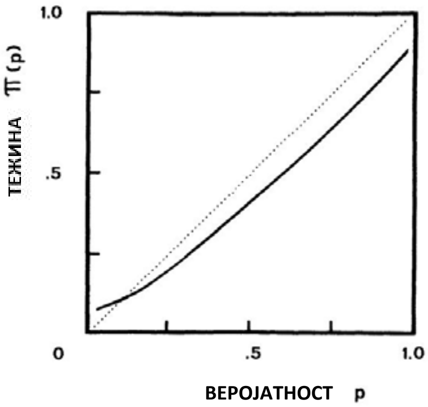
А: + 60 000 ден. со 25% шанси	Б: + 40 000 ден. со 25% шанси
0 ден. со 75% шанси	+ 20 000 ден. со 25% шанси
	0 ден. со 50% шанси
[30,77%]	**[69,23%]**

Пример 13. Одберете помеѓу:

В: − 60 000 ден. со 25% шанси	Г: − 40 000 ден. со 25% шанси
0 ден. со 75% шанси	− 20 000 ден. со 25% шанси
	0 ден. со 50% шанси
[38,46%]	**[61,54%]**

Добиените одговори на последните ситуации ја потврдуваат конкавноста на функцијата на вредности во доменот на добивките (Пример 12), меѓутоа забележлив е неуспехот за потврда на конвексноста на функцијата на вредности во доменот на загубите (Пример 13). Добиената конкавност на функцијата на вредности и во доменот на загуби, најверојатно се должи на висината на загубите во примерот, големи загуби доведуваат до драстична промена на начинот на живот, а и според коментарите на Канеман и Тверски, појавата на конкавност кај загубите е возможна.

Од друга страна, тежинската функција, која природно е растечка функција, е таква да произведува тежини кои се помали од соодветните веројатности, освен кај малите веројатности, каде што се приметува прецeнување на малите веројатности (Слика 3).



Слика 3. Тежинска функција кај теоријата на перспектива, [4].

Со следните две ситуации (Пример 14 и Пример 15) илустрирано е прецeнувањето на малите веројатности, односно $\pi(p) > p$ за мали вредности на p.

Пример 14. Одберете помеѓу:

А: + 50 000 ден. со 0,1% шанси 0 ден. со 99,9% шанси	Б: + 50 ден. со 100% шанси
[80,77%]	[19,23%]

Пример 15. Одберете помеѓу:

В: − 50 000 ден. со 0,1% шанси 0 ден. со 99,9% шанси	Г: − 50 ден. со 100% шанси
[28,85%]	**[71,15%]**

Резултатите од Пример 14 покажуваат дека луѓето би одбрале лотарија со мала веројатност за голема добивка, повеќе отколку сигурна мала добивка, додека Примерот 15 покажува дека тие би одбрале сигурна мала загуба (што може да се толкува и како плаќање на премија за осигурување), повеќе отколку голема загуба со мала веројатност. Според претставувањето на теоријата на перспектива имаме

$$\pi(0,001)\cdot v(50000) > v(50) \text{ и } \pi(0,001)\cdot v(-50000) < v(-50).$$

Од првото неравенство и од конкавноста на функцијата на вредности во доменот на добивки имаме

$$\pi(0,001) > \frac{v(50)}{v(50000)} > \frac{50}{50000} = 0,001,$$

односно преценување на малите веројатности. До истиот заклучок се доаѓа и од второто неравенство и конвексноста на функцијата на вредности во доменот на загуби. Инаку, преценувањето на малите веројатности, влијае на зголемување на привлечноста на осигурувањето и коцкањето.

Други особини на тежинската функција се *суперхомогеноста* за мали вредности на p т.е. $\pi(rp) > r\pi(p)$ за $0 < r < 1$, која што не мора да важи за големи вредности на p, додека, пак, за сите вредности на p забележливо е дека важи *субсигурноста*, т.е. $\pi(p) + \pi(1-p) < 1$, [4]. Преценувањето на малите веројатности и субсигурноста го повлекува потценувањето на големите и средните веројатности, т.е. $\pi(p) < p$ за големи и средни вредности на p.

Исто така, според Канеман и Тверски, [4], тежинската функција е премногу осетлива на промени во околина на крајните точки 0 и 1, каде што таа не се однесува добро (Слика 3). Образложението лежи во ограниченоста на способноста на луѓето за разбирање на екстремните веројатности, многу неверојатните настани или се игнорираат или се преценуваат, а високо веројатните и сигурни настани или се занемаруваат или се преувеличуваат.

3.3. НАРУШУВАЊЕ НА СТОХАСТИЧКАТА ДОМИНАНТНОСТ

Еден од теориските проблеми на теоријата на перспектива е токму предложениот нелинеарен облик на тежинската функција кој доведува до нарушување на *стохастичката доминантност од прв ред*. Една лотарија P е стохастички доминантна од прв ред во однос на лотаријата Q, ако веројатноста за добивка на еден износ при лотаријата P е поголема од соодветната веројатност за добивка на истиот износ при лотаријата Q, и тоа важи за секој износ. Стохастичката доминантност подразбира непроменлива допадливост на некоја алтернатива при позитивна промена на веројатностите. Нарушувањето на стохастичката доминантност е последица токму од претпоставката дека тежините на веројатностите зависат само од веројатностите. Да го илустрираме тоа нарушување на пример. Нека $\pi(0,5) < 0,5$, односно тежината на 0,5 е потценета. Да ги разгледаме следните две лотарии: $P = (10+\varepsilon,(0,5);10,(0,5))$ и $Q = (10,1)$, каде што $\varepsilon > 0$. Јасно е дека лотаријата P е стохастички доминантна во однос на лотаријата Q, па според претставувањето на теоријата на перспектива имаме

$$\pi(0,5)\cdot v(10+\varepsilon) + \pi(0,5)\cdot v(10) > v(10).$$

Од непрекинатоста и строгата монотоност на $v(x)$, следи дека може да најдеме доволно мало $\varepsilon > 0$, така што десната страна во последното неравенство има поголема вредност од левата, што е противречност. Слична дискусија може да се изведе и за случајот $\pi(0,5) > 0,5$, од што заклучуваме дека мора $\pi(0,5) = 0,5$. На сличен начин се покажува дека $\pi(p) = p$ за секој $p \in [0,1]$, со што единствената тежинска функција која што не ја нарушува стохастичката доминантност од прв ред е функцијата без тежини.

4. ТЕОРИЈА НА КУМУЛАТИВНА ПЕРСПЕКТИВА

Проблемот со нарушување на стохастичката доминантност и други недоследности на теоријата на перспектива е надминат од теоријата на кумулативна перспектива на Канеман и Тверски од 1992 година, со која се опишува носењето одлуки и во услови на ризик и во услови на неизвесност, [9]. За своите залагања во областа на когнитивната психологија и однесувањето во услови на незвесност и нивна примена во економски анализи, Даниел Канеман во 2002 година е добитник на Нобеловата награда за економија.

Основната идеја на теоријата на кумулативна перспектива е различно третирање на веројатностите на добивките и веројатностите на загубите, што се постигнува со помош на тежинска функција $w^{+}(p)$ дефинирана за веројатностите на добивките и тежинска функција $w^{-}(p)$ дефинирана за веројатностите на загубите. Нека $(x_1, p_1;...;x_n, p_n)$ е лотарија и нека $x_1 \le ... \le x_k \le 0 \le x_{k+1} \le ... \le x_n$, тогаш вредноста на таа лотарија според теоријата на кумулативна перспектива е:

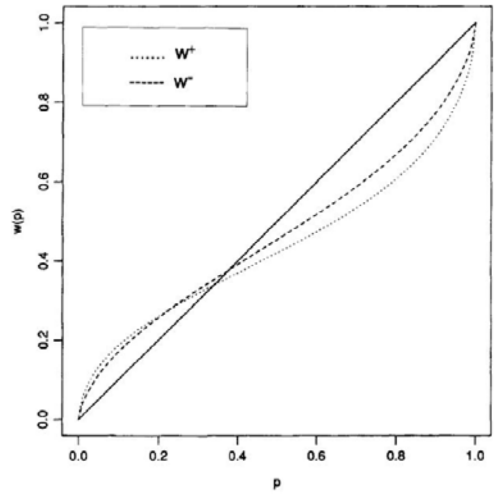
$$V_{CPT} = \sum_{i=1}^{k} \pi_i^{-} v(x_i) + \sum_{i=k+1}^{n} \pi_i^{+} v(x_i), \tag{5}$$

каде $v(x)$ е строго растечка и непрекината функција на вредности со $v(0) = 0$, а тежините π_i^{-}, π_i^{+} се дефинирани со

$$\pi_1^{-} = w^{-}(p_1),\ \pi_i^{-} = w^{-}(p_1 + ... + p_i) - w^{-}(p_1 + ... + p_{i-1}),\ i = 2,...,k, \tag{6}$$

$$\pi_n^{+} = w^{+}(p_n),\ \pi_i^{+} = w^{+}(p_i + ... + p_n) - w^{+}(p_{i+1} + ... + p_n),\ i = k+1,...,n-1. \tag{7}$$

Функциите $w^{+}(p)$ и $w^{-}(p)$ се строго растечки функциии со $w^{+}(0) = w^{-}(0) = 0$ и $w^{+}(1) = w^{-}(1) = 1$. Да забележиме дека кога $w^{-}(p) = w^{+}(p) = p$ за сите p, тогаш $\pi_i^{-} = p_i, i = 1,...,k$ и $\pi_i^{+} = p_i,$, $i = k+1,...,n$, па се добива класичната формула за очекувана корисност, [2]. Ако, пак, ги споредиме формулите за вредности според теоријата на перспектива (4) и теоријата на кумулативна перспектива $(5)-(7)$, кај првата се прави трансформација на веројатностите, додека кај втората се трансформираат кумулативните веројатности за добивките и декумулативните веројатности за загубите. Кумулативната веројатност ја опишува веројатноста за последицата или за нешто подобро од таа последица, па тежината на одлуката се добива како разлика од последните две трансформирани кумулативни веројатности. Предложениот облик на функциите $w^{+}(p)$ и $w^{-}(p)$ кој и експриментално е потврден, [9], е даден на Слика 4.



Слика 4. Тежинските функции кај теоријата на кумулативна перспектива, [9].

Од Слика 4 се забележива дека и двете тежински функции се осетливи на промената на веројатностите во околина на крајните точки 0 и 1, при што малите веројатности се преценуваат, а големите и средните се потценуваат. Двете тежински функции се релативно нечувствителни на промени во средината. Тежинската функција на загубите е повисока и помалку закривена.

Теорија на кумулативна перспектива успешно е применета на широк спектар ситуации кои делуваат дека отстапуваат од стандардите на економската логика, [5]. На пример, забележливо е дека инвеститорите долго ги чуваат акциите кои ја изгубиле вредноста во споредба со куповната цена, но спремни се веднаш да ги продадат акциите на кои им се зголемила вредноста, појава позната како *ефект на навика*. Објаснувањето на оваа појава е во подготвеноста на инвеститорите да се коцкаат во доменот на загубите, но имаат аверзија на ризик во доменот на добивките. Спротивно на ова, теоријата на очекувана корисност советува дека треба да ги чувате акциите сè додека растат, и да ги продадете ако очекувате да паднат, независно од нивната куповна цена.

Потоа, според *хипотезата за постојан доход*, луѓето кои имаат постојани примања треба во секој период да трошат константен дел од примањата. Меѓутоа, набљудувањата покажуваат дека луѓето трошат повеќе кога се очекува дека нивните идни примања ќе се зголемат, но не го намалуваат трошењето, кога се очекува нивните идни примања да се намалат. Едно објаснување е тоа што луѓето се чувствуваат лошо заради аверзијата на загуби кога би го намалиле трошењето, но подготвени се да се коцкаат дека сепак следната година платите може да им се зголемат.

Државните лотарии и осигурувањето одлично се објаснуваат со теоријата на кумулативна перспектива. Нелинеарните тежини, конкретно преценувањето на малите веројатности на екстремните исходи, повлекуваат атрактивност на државните лотарии со огромни добивки и голем број играчи. Исто така, во случајот на осигурувањето, луѓето многу често се осигуруваат од многу мали ризици.

5. ШТО ПОНАТАМУ?

Иако теоријата на кумулативна перспектива во моментов е водечката теорија за опишување на одлучувањето во услови на ризик и неизвесност, постоењето на голем број параметри (референтна точка, непознати функции) кои треба да се оценат, ја прави да биде тешка за конкретни примени, како на пример за предвидувања, [3, 6]. Од друга страна, тоа значи дека е отворен голем простор за нови истражувања и нови резултати. Дури и потврдата на некои класични резултати може да даде поголемо разбирање и различен поглед на разгледуваната појава, со цел што подобро да се опише психолошката природа на човекот и неговото однесување при одлучување во услови на ризик и неизвесност.

ЛИТЕРАТУРА

[1] D. Bernoulli, *Exposition of a new theory on the measurement of risk*, Econometrica 22 (1954), 23–36 (превод на D. Bernoulli, *Specimen theoriae novae de mensura sortis*, Papers Imp. Acad. Sci. St. Petersburg 5 (1738), 175–192).

[2] H. Fennema, P. Wakker, *Original and Cumulative Prospect Theory: A Discussion of Empirical Differences*, Journal of Behavioral Decision Making 10 (1997), 53-64.

[3] G. W. Harrison, J. T. Swarthout, *WP2016_05 Cumulative Prospect Theory in the Laboratory: A Reconsideration*, CEAR, June 30 2016, https://cear.gsu.edu/wp-2016_05-cumulative-prospect-theory-laboratory-reconsideration/

[4] D. Kahneman, A. Tversky, *Prospect Theory: An Analysis of Decision Under Risk*, Econometrica 47 (2) (1979), 263–292.

[5] M. Lewandowski, *Prospect Theory Versus Expected Utility Theory: Assumptions, Predictions, Intuition and Modeling of Risk Attitudes*, CEJEME 9 (2017), 275–321.

[6] W. Neilson, J. Stowe, *A Further Examination of Cumulative Prospect Theory Parametrizations*, The Journal of Risk and Uncertainty 24 (1) (2002), 31–46.

[7] L. Savage, *The Foundation of Statistics*, John Wiley and Sons, New York, 1954.

[8] D. Surowik, *Leonard Savage’s Mathematical Theory of Decisions*, Studies in Logic, Grammar and Rhetoric 5 (18) (2002), 65 – 75.

[9] A. Tversky, D. Kahneman, *Advances in Prospect Theory: Cumulative Representation of Uncertainity,* Journal of Risk and Uncertainty 5 (1992), 297–323.

[10] J. Von Neuman, O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, 1944.

[1] Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје
Природно-математички факултет
Архимедова 3, 1000 Скопје, Р. Македонија
e-mail: irenatra@pmf.ukim.mk, irena.stojkovska@gmail.com

Примен: 24.12.2018
Поправен: 07.02.2019
Одобрен: 12.02.2019
Објавен на интернет: 15.02.2019